Közgazdasági Szemle, XLIII. évf., 1996. október (863–890. o.)

Molnár György–Simonovits András

Várakozások, stabilitás és működőképesség az együttélő korosztályok egy realista modelljében*

Ebben a dolgozatban az együttélő nemzedékek modelljének sok korosztályos általánosítását vizsgáljuk, nevezetesen az *együttélő korosztályok modelljét* (angol rövidítés: OLC). Minden időszakban a különböző korú szereplők előrejelzéseket tesznek az életük végéig bekövetkező kamattényezőkről, és a hátralévő fogyasztási pályájuk hasznosságát maximalizálják a zéró várható örökség feltevése mellett. Minden időszakban egy koordinátor olyan új kamattényezőt határoz meg, amely mellett a társadalom teljes fogyasztása egyenlő a társadalom teljes keresetével. A cikk mondanivalója a következő: *1.* az OLC-modellben a racionális várakozások melletti dinamika nemcsak instabil, hanem működésképtelen is; *2.* az OLC-modellben a naiv várakozások melletti dinamika nemcsak aszimptotikusan stabil, hanem tág környezetben működőképes is.

Az utóbbi évtizedek egyik legfontosabb elméleti fejleménye az *együttélő nemzedékek és korosztályok modellcsaládja*. E folyóirat hasábjain egyikünk már foglalkozott e kérdéskörrel – a szakirodalom ismertetését saját eredményeivel kiegészítve. *Simonovits* [1994] a két korosztályos modellek dinamikáját ismertette, *Simonovits* [1995] a több korosztályos zárt modell állandósult állapotait és ciklusait vizsgálta racionális várakozások esetén. Ebben a cikkben megpróbáljuk leküzdeni mindkét megközelítés korlátait, s a nemzetközi irodalomban először a *több korosztályos zárt modell igazi dinamikáját* elemezzük racionális és naiv várakozások esetén. Nem feltételezzük a fenti tanulmányok ismeretét, ugyanakkor eltekintünk az ott szereplő állítások részletes ismertetésétől.

Föltesszük, hogy a gazdaságban minden időszakban „keletkezik” egy fogyasztási cikk, amelyet romlandósága miatt azonnal el kell fogyasztani. Minden időszakban a különböző korú szereplők előrejelzéseket tesznek az életük végéig bekövetkező kamattényezőkről, és a hátralévő fogyasztási pályájuk hasznosságát maximalizálják a zéró várható örökség feltevése mellett. Minden időszakban egy koordinátor olyan új kamattényezőt határoz meg, amely mellett a társadalom teljes fogyasztása egyenlő a társadalom teljes keresetével.

A kamattényezőkre vonatkozóan két várakozási típust vizsgálunk: *racionális várakozás*okat (ahol az előrejelzés pontos) és *naiv várakozás*okat (ahol csupán a közvetlen jövő előrejelzése pontos, s a további időszakokra szóló előrejelzések azonosak a közvetlen

* Simonovits András kutatását az OTKA T 019696 és az MKM 242/96 számú pályázata finanszírozta. Köszönetet mondunk *Augusztinovics Máriának,* aki megismertetett a témakörrel; *Bródy Andrásnak, Eső Péternek, Martos Bélának* és *Rátfay Attilának* a dolgozat korábbi változataihoz fűzött megjegyzéseikért. Természetesen a cikkben kifejtettekért egyedül a szerzők felelősek.

Molnár György a Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos főmunkatársa.

Simonovits András a Magyar Tudományos Akadémia Közgazdaságtudományi Intézetének tudományos tanácsadója.

jövőével). Megjegyezzük, hogy naiv várakozásunk tartalmazza a racionalitás némi elemét, mivel a közvetlen előrejelzés pontos. Azonban e feltevés nélkül nem tudnánk biztosítani, hogy az összmegtakarítás nulla legyen.

Egy pályát *működőképesnek* nevezünk, ha mind a fogyasztási, mind a kamattényezőpálya minden időszakban pozitív. Az *állandósult állapotok* létezésén túl aszimptotikus lokális stabilitásukat és működőképességüket vizsgáljuk.

Főként realista együttélő korosztály (angolul: *Overlapping Cohorts*, rövidítve: OLC) modelleket vizsgálunk, ahol a fogyasztó élettartama normális, például 72 év, az időszak hossza eléggé rövid (például 1 év), és a leszámítolási tényező ésszerű (például 0,98 és 1 között van). Állandó relatív kockázatkerülési együtthatójú, ún. CRRA hasznosságfüggvényekkel számolunk. A modell magyarázó erejét növelendő, gyakran feltesszük, hogy mind a gyerekek, mind a nyugdíjasok keresete nulla. Nem akarjuk követni *Aiyagari* ([1989] 167. o., 4. lábjegyzet) könnyed ujjgyakorlatát: „E példák esetleges hasonlatossága a valósághoz pusztán a véletlen műve." Látni fogjuk, hogy a kétnemzedékes (valójában két korosztályos – OLG: *Overlapping Generations*) feltevés közel sem olyan ártalmatlan, mint ahogy alkalmazóik gondolják.

Tipikusan két állandósult állapot van: az aranyszabály (ahol a kamatláb nulla) és a kiegyensúlyozott (ahol az aggregált megtakarítási állomány nulla). Ha van stabil állandósult állapot, akkor stabil dinamikáról beszélünk.

Az együttélő korosztályok reális kalibrálású modelljében két fő eredményünk a következő. 1. A racionális várakozások majdnem mindig instabil dinamikát származtatnak, amely előbb-utóbb működésképtelenné is válik. 2. A naiv várakozások a legtöbb esetben lokálisan stabil dinamikát származtatnak, amely tág környezetben működőképes.

Az első látásra meglepő tételek heurisztikus magyarázata eléggé egyszerű. Racionális várakozások esetében az új, egyensúlyozó kamatláb terhe kizárólag a legfiatalabb korosztály vállára nehezedik. Következésképpen minél nagyobb az együttélő korosztályok száma, annál nagyobb a túlterhelés. Ezzel ellentétben a naiv várakozások esetében a teher egyenletesen oszlik meg az összes korosztály között.

Sajnos a modell olyan bonyolult, hogy analitikus eredményeinket gyakran kell számítógépes kísérletekkel kiegészíteni. Azt gondoljuk azonban, hogy a relevancia fontosabb az eleganciánál. Azaz érdemes realisztikus modelleket vizsgálni, mégha a ceruzát a számítógépnek kell is helyettesítenie.

Tekintettel a dolgozat bonyolultságára, többféle olvasási stratégia ajánlható. Akit nem érdekelnek a részletek, elegendő, ha az ábrákat tekinti át, a tételeket (és az azokhoz tartozó definíciókat) olvassa el. A részletek iránt érdeklődőknek második olvasásra hasznos lesz a bizonyítások, a megjegyzések és a példák áttanulmányozása is. Egészen röviden utalunk az irodalomra, főleg a *Simonovits* [1995]-ben még nem vizsgált kérdésekre szorítkozva.

A *Simonovits* [1994]-gyel összevetve, látható, hogy *Gale* [1973] racionális várakozásokra vonatkozó stabilitási tétele érvényét veszti a több korosztályos esetben, viszont többnyire érvényesnek látszik a naiv várakozások esetén.

A racionális várakozások esetében egy ún. meghatározatlansági probléma lép föl: az igazi kezdeti feltételek (megtakarítási állományok) mellett mesterséges kezdeti feltételekre is szükség van, nevezetesen a 0, …, D időszak kamattényezőire (lásd *Samuelson* [1958] és *Kehoe–Levine* [1990]). A hagyományos megközelítés (például *Blanchard–Fischer* [1989] 5. fejezet) elhanyagolja az igazi kezdeti feltételeket, és elveti azokat a mesterséges kezdeti feltételeket, amelyek instabilitást okoznak. Minél több instabil irány van, annál gyengébb a meghatározatlanság. Véleményünk szerint ez a bonyodalom csak aláhúzza a racionális várakozások mesterkéltségét.

Eredményeink szöges ellentétben vannak a makroökonómia elfogadott elképzelésével, amely az együttélő korosztályok dinamikájának instabilitását és működésképtelenségét a korosztályok nemzedékekké tömörítésével magyarázza (*Sims* [1986]). Ugyanakkor a főárammal szemben úszó tanulmányokban a racionális várakozások mienkhez hasonló kritikája megtalálható. *Lovell* [1986] empirikus alapon bírálja a szóban forgó feltevést, *Grandmont–Laroque* [1990] pedig bizonyos tanulási szabályok melletti stabilitásból vezeti le a racionális várakozásos dinamika instabilitását. Ez utóbbi eredmény nemcsak az együttélő korosztályok modelljére vonatkozik, viszont csupán a naiv várakozásoknál bonyolultabb tanulási szabályokra érvényes. Továbbá a mi két főeredményünk különkülön is megáll a lábán, *Grandmont–Laroque* tétele viszont feltételes állítás, nem mond semmit a racionális várakozásokról, ha a tanulási szabály melletti dinamika instabil.

A dolgozat felépítése a következő. Először a gazdaság tetszőleges egyensúlyi kamattényező-sorozatát és a hozzátartozó optimális fogyasztási pályát elemezzük – méghozzá a két várakozás közös általánosítása mellett. Az általános eredmények ismertetése után külön-külön specializáljuk az elemzést a racionális és a naiv várakozásra.

Egy OLC-cseregazdaság várakozásokkal

Együttélő korosztályok

A t. időszakban a népesség három nemzedékből áll: gyerekekből, dolgozókból és nyugdíjasokból. Mindegyik nemzedék több korosztályból állhat: L gyerekkorosztály ($i=0,1,2, \ldots, L-1$), $M-L+1$ dolgozó korosztály ($i=L, \ldots, M$), és $D-M$ nyugdíjas korosztály ($i=M+1, \ldots, D$), összesen $D+1$ korosztály. Ha a hagyományos keretek között maradva, nem akarjuk a gyerekeket önálló fogyasztóként modellezni, akkor legyen $L=0$. Technikai egyszerűsítésként föltesszük, hogy a t. időszakban egységnyi „csecsemő” születik (hagyományosan: kezdő munkás áll munkába), és mindegyikük megéri a $t+D$. időszak végét: a teljes népesség létszáma $D+1$.

Miután definiáltuk a népességi viszonyokat, a gazdasági összefüggéseket tisztázzuk. Technikai egyszerűsítésként ugyancsak föltesszük, hogy az átlagkeresetek időben változatlanok. Ugyanakkor figyelembe vesszük azt a jól ismert összefüggést, hogy a korosztályi keresetek jelentősen változnak az életkorral. Legyen w_i az i. korosztály átlagkeresete a t. időszakban.

Kényelmi okokból a gyerekeknek és a nyugdíjasoknak néha *zéró* keresetet tulajdonítunk: $w_i=0$, $\mathrm{i}=0, \ldots, L-1$ és $M+1, \ldots, D$. A képletek egyszerűsítése érdekében a következő *normalizálás*sal élünk:

$$\sum_{0 \leq i \leq D} w_i = 1 .$$

Jelölje rendre $c_{i,t}$ és $s_{i,t}=w_i-c_{i,t}$ a t. időszak i. korosztálya egy tagjának átlagos fogyasztását és megtakarítását.

Azt az egyszerűsítő feltevést alkalmazzuk, hogy létezik tökéletes évjáradékpiac, amelyen minden ember eladhatja egy biztosítónak előre ismert keresetáramát, és ennek fejében egy várható fogyasztási pályát vásárolhat. Élete során mindenkinek van vagyona, amely időnként lehet pozitív, negatív vagy nulla. Ezt a vagyont a már említett biztosító kezeli, amely minden időszakban kamatot fizet vagy számít fel, egy r_t kamattényező-sorozatnak a $(t,t+i]$ időszakra *halmozott értéke* szerint:

$$R_{t,t+i}=r_{t+1}\ldots r_{t+i}, \; (R_{t,t}=1). \tag{1}$$

Mivel egy csecsemő a valóságban nem vehet föl kölcsönt, föltesszük, hogy egészen addig a szülei kezelik az adósságát, amíg nagykorú nem lesz.

Szükségünk lesz az i korú fogyasztó t. időszak végi *megtakarítási állományára*:

$$a_{i,t}=r_t a_{i-1,t-1}+w_i-c_{i,t},\ \ a_{-1,t}=0, \tag{2}$$

avagy zárt alakban:

$$a_{i,t} = \sum_{0\le j\le 1} R_{t-i+j,t} s_{j,t-i+j}\ . \tag{3}$$

Tekintsünk egy t. időszakban született korosztályt! Az $\{s_{i,t+i}\}_{0\pounds i\pounds D}$ megtakarítási pálya *nulla örökséget* hagy, ha $a_{D,t+D}=0$, azaz

$$\sum_{0\le i\le D} R^{-1}_{t,t-1} s_{i,t+i} = 0\,. \tag{4}$$

Legyen a társadalom t. időszaki megtakarítása S_t:

$$S_t = \sum_{0\le i\le D} s_{i,t}\ .$$

Az $\{s_{i,t}\}_{0\pounds i\pounds D}$ megtakarítási keresztmetszet (a t. időszakban) *egyensúlyban* van, ha

$$S_t=0. \tag{5}$$

Mindig feltesszük, hogy (4) és (5) teljesül. Vegyük észre, hogy stacionárius nulla kamatlábak ($r_t\equiv 1$) és stacionárius megtakarítási pályák ($s_{i,t}=s_{i,0}$) esetén a (4) hosszmetszeti feltétel ekvivalens az (5) keresztmetszeti feltétellel.

Legyen a népesség teljes megtakarítási állománya A_t: $A_t = \sum_{0\le i\le D} a_{i,t}$. (5) és $a_{D,t}=0$ folytán $A_t=r_t A_{t-1}$.

Várakozások

A várakozások most is kulcsszerepet játszanak az elemzésben. A szokásos jelölést használva, legyen ${}_t r_v$ a t. időszaki előrejelzés a $v(\ge t)$ időszak kamatényezőjére vonatkozóan. A következő várakozási típusokkal foglalkozunk.

Racionális várakozások. Minden várt kamattényező megegyezik a *megfelelő* időszak tényleges modellbeli értékével:

$${}_t r_{t+i}=r_{t+i},\ i=0,\ \ldots,\ D. \tag{6}$$

Naiv várakozások. Minden várt kamattényező megegyezik a *jelenlegi* tényleges értékkel:

$${}_t r_{t+i}=r_t,\ i=0,\ \ldots,\ D. \tag{7}$$

***d*-várakozások.** A közös tárgyalás kedvéért bevezetünk egy általánosabb várakozási sémát, a *d-várakozásokét*. Legyen d egy egész szám: $0\le d\le D$. d-várakozások mellett

1. A közeljövő $r_t,\ \ldots,\ r_{t+d-1}$ kamattényezői pontosan ismertek előre:

$${}_t r_{t+i}=r_{t+i},\ i=0,\ \ldots,\ d-1.$$

2. A kritikus időszak r_{t+d} kamattényezője egy paraméter, melyet a walrasi kikiáltó határoz meg a t. időszakban (lásd később).

3. A távoli $r_{t+d+1}, \ldots, r_{t+D}$ kamattényezők várt értékei a jelen és a közeljövő kamattényezőitől függnek:

$$_{t}r_{t+i}=f_i(r_t, \ldots, r_{t+d}), \text{ ahol } f_i\colon \mathbf{R}^{d+1}\to\mathbf{R},\ i=d+1, \ldots, D. \tag{8}$$

4. A (8) várakozási séma *konzisztens* a következő értelemben:

$$r=f_i(r, \ldots, r) \text{ minden } r>0 \text{ valós számra.} \tag{9}$$

Megjegyzések.

1. A legegyszerűbb választás f_i-re $_{t}r_{t+i}=r_{t+d}$, $i=d+1, \ldots, D$.

2. A d-várakozások fogalma valóban általánosítja a racionális és a naiv várakozásokat, hiszen a $d=D$ és a $d=0$ esetben az 1. megjegyzés mellett rendre (6) és (7) adódik. Ilyenkor D-várakozásokról és 0-várakozásokról beszélhetnénk.

3. Igazi tanulási függvények esetében (vö. *Grandmont* [1985] 3. pont és *Grandmont–Laroque* [1990]) (8) nem függhet az $r_{t+1}, \ldots, r_{t+D}$ jövőbeli értékektől: $d=0$, viszont annál inkább függ a múltbeli értéktől, azaz

$$_{t}r_{t+i}=f_i(r_{t-b}, \ldots, r_t).$$

Mi azonban nem foglalkozunk ezzel az esettel.

A t. időszakban az i-korú fogyasztó a következő *várható költségvetési feltétellel* találkozik:

$$_{t}r_t a_{i-1,t-1} + \sum_{0\le j\le D-i} ({}_{t}R_{t,t+j})^{-1}\, {}_{t}s_{i+j,t+j} = 0\,. \tag{10}$$

Figyelembe véve feltevéseinket, $_{t}r_t=r_t$ és $_{t}R_{t,t+j}=R_{t,t+j}$ ha $j\le d$, $_{t}R_{t,t+j}=R_{t,t+d}\,{}_{t}R_{t+d,t+j}$ egyébként.

A korspecifikus fogyasztás a legfrissebb megtakarítási állománytól és a várható kamattényezőktől függ:

$$_{t}c_{i,t}=c_i(a_{i-1,t-1}, {}_{t}r_t, \ldots, {}_{t}r_{t+D-i}), \tag{11}$$

ahol (10) teljesül.

Dinamika

Bevezetjük az $a_t=(a_{0,t}, \ldots, a_{D-1,t})^T$, $_{t}r=({}_{t}r_t, \ldots, {}_{t}r_{t+d-1})^T$ és $x_t=(a_t, {}_{t}r)^T$ jelöléseket. (Ha $d=0$, akkor az üres $_{t}r$ változót nem szerepeltetjük.) Megfelelő feltevések mellett az r_{t+d} paraméter függvényében (8) meghatározza az új $_{t}r_{d+1}, \ldots, {}_{t}r_D$ előrejelzéseket, (11) eldönti az új fogyasztási becsléseket, és végül (5) megadja az új kamattényezőt: r_{t+d}. Egyenleteink egy $x_t=h(x_{t-1})$ differenciaegyenlet-rendszert definiálnak.

Az algoritmust a következőképpen képzelhetjük el. Minden időszakban a fogyasztók meghatározzák időszerű optimális fogyasztásukat, amelyet közölnek a walrasi kikiáltóval, aki összegzi e mennyiségeket, és iterációval kiszámítja a d időszakkal későbbi egyensúlyi kamattényezőt.

A rendszer a $t=0$ időszakban kezdi meg működését és az $(a_{-1};{}_{-1}r)$ vektor a rendszer *kezdeti feltétele*.

Nyilvánvaló, hogy az időben állandó megoldások (állandósult állapotok) komoly szerepet játszanak a dinamikus rendszerek elemzésében. Egy $(D+d)$-dimenziós x_F vektort *állandósult állapot*nak nevezünk, ha a definiáló leképezésnél egy helyben marad: $x_F=h(x_F)$.

A rövidség kedvéért gyakran a_F vagy r_F állandósult állapotról fogunk beszélni. Értelemszerűen használjuk az A_F jelölést is.

Gale ([1973] II. rész) nyomán néhány észrevételt teszünk. Állandósult állapotban $A_F = r_F A_F$, s ez a következő osztályozást sugallja. Ha r_F különbözik 1-től, akkor *kiegyensúlyozott* (vagy másképp: *nem monetáris*) állapotról beszélünk, amelynek jele: r_B és $A_B = 0$. Ha $r_F = 1$, akkor *aranyszabály* (vagy másképp: *monetáris*) állapotról beszélünk, amelynek jele: r_G és A_G. (Rövidség kedvéért az *állandósult* jelzőt ilyenkor néha elhagyjuk.) Ekkor három alosztályt vezetünk be, *adós* (klasszikus): $A_G < 0$, *hitelező* (Samuelson): $A_G > 0$ és *szimmetrikus* (egybeeső): $A_G = 0$. (Augusztinovics Mária szóhasználatát követve, a korábbi cikkekben a *fiatalos* és az *érett* jelzőt használtuk, azonban az adós és a hitelező jelzők kifejezőbbek.)

Ha legalább két állandósult állapot létezik egyszerre, akkor a globális stabilitás ki van zárva. Ha csak egy állandósult állapot létezik, természetesen az aranyszabály, akkor a kiegyensúlyozott állapot hiánya valószínűleg instabillá teszi a szóban forgó állandósult állapotot is. Ezért a továbbiakban mindig *lokális* stabilitást vizsgálunk, s a jelzőt elhagyhatjuk.

Mindenekelőtt ismertetünk egy elemi megfigyelést, amely Samuelson [1958] és *Gale* ([1973] 28–29. o.) dolgozatából ered:

1. tétel (*d-várakozások*).

a) *Ha egy aranyszabály-állapot stabil, akkor az* $A_{-1} \le 0$ *és az* $A_{-1} \ge 0$ *egyenlőtlenségeket kielégítő kezdeti feltételek instabil pályát származtatnak* $A_G > 0$*, illetve* $A_G < 0$ *esetén.*

b) *Ha egy kiegyensúlyozott állapot aszimptotikusan stabil, akkor* $r_B \le 1$.

Bizonyítás. Mérlegeljük az $A_t = r_t A_{t-1} = \ldots = R_{-1,t} A_{-1}$ összefüggést!

a) $A_{-1} \le 0$ miatt $A_t \le 0$, tehát a pálya nem tarthat $A_G > 0$-hoz.

b) Ha r_B stabil és a tétellel ellentétben $r_B > 1$, akkor van olyan pozitív állandó, R, amelyre, 0-tól különböző A_{-1} esetén $R_{-1,t} > R r_B{}^{t+1}$, azaz $|A_t| > r_B{}^{t+1} R |A_{-1}|$, azaz A_t divergens, ellentmondás. | |

Megjegyzés. Vélhetően az $r_B = 1$ esetben legfeljebb féloldali stabilitásról van szó.

Optimalizálás

A *reprezentatív fogyasztó* fogyasztási pályáját úgy vezetjük le, hogy egy hasznosságfüggvényt maximalizálunk megfelelő költségvetési korlát mellett. Kiindulásként bevezetjük az 1-nél kisebb *β leszámítolási tényezőt* és az időben-korban változatlan $u(c)$ *időszaki hasznosságfüggvényt*.

A teljes hasznosságfüggvény

$$U(c_0,\ldots,c_D) = \sum_{0 \le i \le D} \beta^i u(c_i), \quad 0 < \beta \le 1. \tag{12}$$

Szokás szerint a CRRA hasznosságfüggvények diszkrét megfelelőire szorítkozunk. Legyen σ egy valós szám, $-\infty < \sigma < 1$, $1-\sigma$ a *relatív kockázatkerülési együttható*. Az időszaki hasznosságfüggvények

$$u(c) = \sigma^{-1} c^{\sigma}, \text{ ha } \sigma \text{ nem } 0; \tag{13a}$$

$$u(c) = \log(c), \text{ ha } \sigma = 0. \tag{13b}$$

Emlékeztetünk arra, hogy (13*a*)-ban azért kell σ^{-1}-gyel beszorozni c^{σ}-t, hogy az u pillanatnyi hasznosság a c_i fogyasztás növekvő függvénye legyen $\sigma < 0$ esetén is.

(13)-at behelyettesítve (12)-be, rendre adódik a

CRRA hasznosságfüggvény

$$U(c_0,\ldots,c_D) = \sigma^{-1} \sum_{0\le i\le D} \beta^i c_i^{\sigma}\text{, ha } \sigma \text{ nem 0 vagy } \infty; \tag{14a}$$

Cobb–Douglas hasznosságfüggvény

$$U(c_0,\ldots,c_D) = \sum_{0\le i\le D} \beta^i \log(c_i)\text{, ha } \sigma = 0; \tag{14b}$$

Leontief hasznosságfüggvény

$$U(c_0,\ldots,c_D) = \min_{0\le i\le D} c_i\text{, ha } \sigma = -\infty. \tag{14c}$$

Megjegyzés. Könnyen belátható, hogy a (14*b*) és a (14*c*) függvény a (14*a*)-beli U függvény $\left(\sigma U \,/\, \sum_{0\le i\le D} \beta^i\right)^{1/\sigma}$ megfelelő határértéke vagy annak növekvő függvénye $\sigma = 0$ vagy $-\infty$ esetén.

Szükségünk lesz σ következő transzformáltjára: $\mu = \sigma/(\sigma-1)$, ahol $1-\mu$ az *időszakközi (intertemporális) helyettesítési rugalmasság*. Mint ahogyan korábban érveltünk (*Simonovits* [1995]), föltesszük, hogy $\sigma \le 0$, azaz $0 \le \mu$ £ 1.

Versenyzői fogyasztási pálya

Optimális pályának azt a fogyasztási pályát nevezzük, amely maximalizálja a (12) hasznosságfüggvény értékét adott kamattényezők és a (10) költségvetési korlát mellett.

Rátérünk a dinamika vizsgálatára. Szükségünk lesz a következő fogalmakra.

Megcsonkított hasznosságfüggvény

$$U_i({}_t c_{i,t},\ldots,{}_t c_{D,t-i+D}) = \sigma^{-1} \sum_{0\le j\le D-i} \beta_t^j c_{i+j,t+j}^{\sigma}\,. \tag{15}$$

A hátralévő életkereset várható jelenértéke

$$W_{i,t} = \sum_{0\le j\le D-i} w_{i+j}\ {}_t R_{t,t+j}^{-1}\,. \tag{16}$$

A korrigált leszámítolás várható jelenértéke

$$V_{i,t} = \sum_{0\le j\le D-i} \Phi^j\, {}_t R_{t,t+j}^{-\mu}\text{, ahol } \Phi = \beta^{1-\mu}. \tag{17}$$

1. segédtétel (d-várakozások). CRRA hasznossági függvény esetén a t-ben született i korú egyén (általában nem megengedett) fogyasztása

$$c_{i,t} = \frac{r_t a_{i-1,t-1} + W_{i,t}}{V_{i,t}}\,. \tag{18}$$

Bizonyítás. Vegyük az i korú fogyasztó Lagrange-függvényét (az U_i hasznosságfüggvény és a költségvetési korlát lineáris kombinációját) az ε_i szorzóval:

$$L_i\left({}_tc_{i,t},\ldots,{}_tc_{D,t+D-i}\right)=\sigma^{-1}\sum_{0\le j\le D-i}\beta^j\,{}_tc^{\sigma}_{i+j,t+j}+\varepsilon_i\left[r_ta_{i-1,t-1}+\sum_{0\le j\le D-i}\left(w_{i+j}-{}_t\,c_{i+j,t+j}\right){}_tR^{-1}_{t,t+j}\right].$$

Tegyük a ${}_tc_{i+j,t+j}$ szerinti parciális deriváltat nullává:

$${}_tc^{\sigma-1}_{i+j,t+j}=\varepsilon_i\,\beta^{-j}\,{}_tR^{-1}_{t,t+j}\,.$$

Figyelembe véve, hogy $\sigma=-\mu/(1-\mu)$, $1-\sigma=1/(1-\mu)$, $1/(1-\sigma)=1-\mu$, adódik

$${}_tc_{i+j,t+j}=\Phi^j\varepsilon_i^{\mu-1}\,{}_tR^{1-\mu}_{t,t+j}\,.$$

azaz

$${}_tc_{i+j,t+j}=\Phi^j\,{}_tR^{1-\mu}_{t,t+j}\,\frac{r_ta_{i-1,t-1}+W_{i,t}}{V_{i,t}}\,. \tag{19}$$

$j=0$-nál (19) (18)-ra egyszerűsődik. | |

Megjegyzés. Fontos hangsúlyozni, hogy általában mennyire megszorító lehet a reprezentatív fogyasztó feltevése (*Kirman* [1992]). Röviden vázoljuk, hogy minden fogyasztó esetében azonos hasznosságfüggvényt feltételezve, tetszőleges számú fogyasztót tudunk egyszerűen aggregálni. Valóban, legyen $w_i(k)$ a k. típusú fogyasztó keresete az i korban, és g_k e típus súlya a népességen belül, $k=1,\ldots,K$: $\sum_{0\le i\le D}w_i(k)=1$ és $\sum_{1\le k\le K}g_k=1$.

Legyen $w_i=\sum_{1\le k\le K}g_kw_i(k)=1$ a reprezentatív fogyasztó keresete az i korban. $V_{i,t}(k)$ független k-tól, ekkor (16) és (18) értelmében a reprezentatív fogyasztó optimális fogyasztása megegyezik a heterogén fogyasztók átlagos optimális fogyasztásával. Ha nem minden fogyasztónak azonos a hasznosságfüggvénye, akkor a fenti aggregálás lehetetlen, de egyesek szerint ez az eset nem olyan fontos, mint az előző.

A feltételes optimum meghatározása után a megengedettségi feltételt vizsgáljuk. Behelyettesítve (18)-at S_t definíciójába, adódik

$$S_t=1-\sum_{0\le i\le D}\frac{r_ta_{i-1,t-1}+W_{i,t}}{V_{i,t}}\,. \tag{20}$$

$$\sum_{0\le i\le D}\frac{r_ta_{i-1,t-1}+W_{i,t}}{V_{i,t}}=1\,. \tag{21}$$

Kimondhatjuk a

2. tételt (d-várakozások). CRRA hasznosságfüggvény esetén a $t+d$. időszak optimális kamattényezőjét (feltéve, hogy létezik) a t. időszakra vonatkozó (21) implicit differencia-egyenlet határozza meg.

Megjegyzések.

1. Nyilvánvaló, hogy nem minden megtakarítási állomány vektor határoz meg pozitív kamattényezőt. Azonban bármely állandósult állapot környezetében 0-tól különböző S' mellett az implicit függvény tétele szavatolja a megoldás létezését és unicitását. Látni fogjuk azonban, hogy még az állandósult állapotban is egynél több kamattényező létezhet. Mi azonban az állandósult állapothoz legközelebbi kamattényezővel fogunk dolgozni.

2. Nyilvánvaló, hogy különböző kezdeti feltételek különböző állandósult állapotokhoz vezethetnek. Figyeljük meg, hogy az állandósult állapotok függetlenek a várakozásoktól, azaz a két várakozásnál az állandósult állapotok azonosak. A ciklusok azonban már függnek a várakozási sémától.

Dinamika racionális várakozásokkal

Egyelőre föltesszük, hogy a fogyasztók születésükkor már tökéletesen ismerik a számukra releváns kamattényező-sorozatot. Ez a feltevés a jelenleg uralkodó *racionális várakozás hipotézis* determinisztikus megfelelője. Sok korosztályos modellünkben még furcsább e feltevés, mint a két korosztályos ősmodellben, de annak érdekében, hogy beilleszkedjünk a közgazdaságtan főáramába, most mégis ezzel élünk.

Egyszerűsített racionális várakozások

A d-várakozásoknál elkerülhetetlen volt a változó horizont szerinti optimalizálás vizsgálata, most azonban rövidre zárjuk a feladatot. Tegyük föl, hogy a rendszer nem a 0-ban, hanem a $-\infty$-ben kezdett optimálisan működni. Ekkor igaz a

2. segédtétel (egyszerűsített racionális várakozások). CRRA hasznossági függvény esetén a t-ben született j korú egyén (általában nem megengedett) fogyasztása

$$c_{j,t} = \Phi^j R_{t-j,t}^{1-\mu} H_{t-j} \ , \tag{22}$$

ahol

$$c_{0,t} = H_t = \frac{W_{0,t}}{V_{0,t}} \ . \tag{23}$$

Bizonyítás. Racionális várakozások esetén nem kell az optimális pályát minden alkalommal újraszámolni. $i=0$-nál (18) és $i > 0$-ra (19) egyszerűsödik a (22)–(23) párra.

Megjegyzés. Figyelemre méltóan egyszerű az optimális pálya szerkezete. Egyrészt minden új időszak a korrigált leszámítolási tényező szerint csökkenti, másrészt a korrigált kamattényező szerint növeli a fogyasztást. A kezdőfogyasztás értékét a H_t hányados adja.

Behelyettesítve a (22) feltételes optimumot a (21) megengedettségi feltételbe, egy implicit differenciaegyenlet-rendszert kapunk. A teljes megoldás a $2D$-dimenziós vegyes $x_t=h(x_{t-1})$ rendszert adná, de az egyszerűsítés miatt megússzuk egy D-vel előretolt $(2D-1)$-dimenziós tiszta rendszerrel: $r_{t+D}=g(r_{t-D+1}, \ldots, r_{t+D-1})$. Ez utóbbit könnyebb tanulmányozni és ábrázolni. Mostantól fogva a teljes és az egyszerűsített megoldás különbségét nem hangsúlyozzuk.

Behelyettesítve a feltételes optimumot a (20) összmegtakarításba, adódik a *t. időszak makromegtakarítási függvény*e:

$$S_t = 1 - \sum_{0 \le j \le D} \Phi^j R_{t-j,t}^{1-\mu} H_{t-j} \ . \tag{24}$$

Ennek segítségével konkretizálhatjuk a *2. tételt*.

Először az állandósult állapotokat fogjuk vizsgálni. Egyszerűsített racionális várakozások esetén nincs szükségünk a $\{W_{i,t}\}$ és $\{V_{i,t}\}$ sorozatra, csak a kezdőtagjukra. Ezért célszerű lesz $W_t = W_{0,t}$ és $V_t = V_{0,t}$ rövidített írásmóddal élni. Most a (22) képlet az időtlen r kamattényező segítségével egyszerűsíthető:

$$W(r) = \sum_{0 \le i \le D} w_i r^{-i} . \tag{16°}$$

$$V(r) = \sum_{0 \le i \le D} \Phi^i r^{-\mu i} . \tag{17°}$$

$$H(r) = \frac{W(r)}{V(r)} . \tag{23°}$$

$$c_j(r) = \Phi^j r^{(1-\mu)j} H(r). \tag{22°}$$

(24)-be behelyettesítve (16°)–(17°)-t és (23°)-t, adódik a megtakarítás makroegyensúlya:

$$S(r) = 1 - \sum_{0 \le i \le D} \Phi^j r^{(1-\mu)j} H(r) = 0 . \tag{25}$$

Szükség lesz a következő jelölésekre:

$$\mu_1 = \min\left\{\frac{M}{D}, 1 - \frac{L}{D}\right\} \text{ és } \mu_2 = \max\left\{\frac{M}{D}, 1 - \frac{L}{D}\right\}. \tag{26}$$

Kimondjuk a *Kim* [1983]-tól származó *regularitási feltétel*t: $L < D$ és $M > 0$.

3. tétel. (*Kim* [*1983*] *és Simonovits* [*1995*], *9. tétel*). *Legyen a kereseti pálya reguláris, a fogyasztó CRRA hasznosságfüggvényű.*

a) Ha $0 \le \mu < \mu_1$, *akkor mindig létezik legalább egy kiegyensúlyozott kamattényező:* $r_B > 1$ *az adós esetre,* $r_B < 1$ *a hitelező esetre és* $r_B = 1$ *a szimmetrikus esetre.*

b) Ha $\mu_2 < \mu < 1$, *akkor mindig létezik legalább egy kiegyensúlyozott kamattényező:* $r_B < 1$ *az adós esetre,* $r_B > 1$ *a hitelező esetre és* $r_B = 1$ *a szimmetrikus esetre.*

c) Ha $\mu_1 < \mu < \mu_2$ *(ablak), akkor vagy nem létezik kiegyensúlyozott kamattényező, vagy több is létezik.*

Megjegyzés. A $\mu = 1$ esetben *Augusztinovics* [1992] tétele mérvadó.

Szemléltetésül bevezetjük a következő paraméter-vektorsorozatot: $D = 71$, $L = 18$, $M = 51$, 53, 55 és 57; $\mu = 0{,}5$, 0,75 és 1, $\beta = 0{,}98$, 0,99 és 1.

1. táblázat

Kiegyensúlyozott állandósult állapotok jellemzői

($L=18$ és $D=71$)

M	μ	$ß$	r_B	$r_D–r_B$
51	0,50	0,98	1,066654	–0,000083
51	*0,50*	*0,99*	*1,024094*	*–0,000218*
51	0,50	1,00	0,979354	0,000180
51	0,75	0,98	0,980520	–0,000158
51	0,75	0,99	0,998997	–0,001649
51	0,75	1,00	1,017036	0,000269
51	1,00		1,005986	0,000236
53	0,50	0,98	1,079089	–0,000057
53	0,50	0,99	1,040291	–0,000113
53	0,50	1,00		*
53	0,75	0,98	0,959637	–0,000053
53	0,75	0,99	0,980015	–0,000141
53	0,75	1,00	1	0
53	1,00		1	0
55	0,50	0,98	1,089795	–0,000043
55	0,50	0,99	1,053719	–0,000072
55	0,50	1,00	1,016825	–0,000190
55	*0,75*	*0,98*	*0,928033*	*–0,000016*
55	0,75	0,99	0,954918	–0,000043
55	0,75	1,00	0,978895	–0,000128
55	1,00		0,993590	–0,000150
57	0,50	0,98	1,099172	–0,000033
57	0,50	0,99	1,065132	–0,000052
57	0,50	1,00	1,030850	–0,000094
57	0,75	0,98	*	*
57	0,75	0,99	0,903770	–0,000007
57	0,75	1,00	0,945988	–0,000029
57	*1,00*		*0,986561*	*–0,000058*

Megjegyzés: kizárólag a (0,85;0,999) és az (1,001;1,15) intervallumba eső pontokat tüntettük föl. A dőlt sorok példákat mutatnak be. r_D a nevező gyöke.

Dinamika

Hosszúra nyúlt előkészítés után rátérünk az igazi dinamika elemzésére.

Az r_{t+D} kamattényezőt a korábbi r_{t-D+1}, …, r_{t+D-1} kamattényezők függvényében fogjuk kifejezni. Ahhoz, hogy a (16), (17) ($i=0$) és a (24) kifejezések tömörek maradjanak, az

r_{t+D}-t tartalmazó W_t, V_t és S_t-beli tagok összegére újabb (vastag betűvel szedett) jelöléseket vezetünk be (és a nulla korindexet ismét elhagyjuk).

$$\mathbf{W}_t = \sum_{0 \le i < D} w_i R_{t,t+i}^{-1} , \tag{27}$$

$$\mathbf{V}_t = \sum_{0 \le i < D} \Phi^i R_{t,t+i}^{-\mu} , \tag{28}$$

$$\mathbf{S}_t = 1 - \sum_{1 \le i \le D} \Phi^i R_{t-i,t}^{1-\mu} H_{t-i} . \tag{29}$$

A (21) megengedettségi feltételből egyszerű számolással kapjuk az

$$\mathbf{S}_t = H_t = \frac{\mathbf{W}_t + w_D R_{t,t+D-1}^{-1} r_{t+D}^{-1}}{\mathbf{V}_t + \Phi^D R_{t,t+D-1}^{-\mu} r_{t+D}^{-\mu}}$$

egyenlőséget, amelyből adódik a

4. tétel (racionális várakozások). 1. A t+D. versenyző kamattényezőt (ha egyáltalán létezik) a következő implicit differenciaegyenlet határozza meg:

$$w_D R_{t,t+D-1}^{-1} r_{t+D}^{-1} - \mathbf{S}_t \Phi^D R_{t,t+D-1}^{-\mu} r_{t+D}^{-\mu} - \mathbf{S}_t \mathbf{V}_t + \mathbf{W}_t = 0 . \tag{30}$$

2. Ha 0 < μ £ 1, w_D=0 és az alábbi (31) kifejezés értelmezve van, akkor (30) egy (2D–1)-rendű explicit differenciaegyenletre egyszerűsödik:

$$r_{t+D} = \left[\frac{\mathbf{S}_t \Phi^D}{\mathbf{W}_t - \mathbf{S}_t \mathbf{V}_t} \right]^{1/\mu} R_{t,t+D-1}^{-1} . \tag{31}$$

Megjegyzések. 1. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a *t.* időszak megengedettségi feltétele a $t+D$. időszak optimális kamattényezőjét határozza meg. Ez éves kalkulációnál és normális életkornál azt jelenti, hogy a mindenkori kamattényezőt több évtizeddel előre meghatározták! Ebből látszik, milyen szigorú és irreális feltevés a racionális várakozás feltevése. (*Kehoe–Levin* [1990] *meghatározatlanságról* beszél.)

2. Az implicit függvény tétele garantálja r_{t+D} létezését, ha $\partial S/\partial r_{t+D}$ különböző nullától:

$$\frac{\partial S}{\partial r_{t+D}} = -\frac{\partial H}{\partial r_{t+D}} = \frac{w_D R_{t,t+D-1}^{-1} r_{t+D}^{-2} V_t - \mu W_t \Phi^D R_{t,t+D-1}^{-\mu} r_{t+D}^{-\mu-1}}{V_t^2} .$$

Ha $r_t \equiv 1$ és $\beta = 1$, akkor $\partial S/\partial r_{t+D} = [w_D(D+1) - \mu]/(D+1)^2$. Realista modellekben a $w_D(D+1)$ szorzat 0 és 1 között fekszik, ezért létezik egy $\mu_o = w_D(D+1)$ *szinguláris érték*, amelyre $\partial S/\partial r_{t+D} = 0$. Vegyük észre, hogy $\partial S/\partial r_{t+D}$ μ csökkenő lineáris függvénye, de μ együtthatója $-1/(D+1)^2$, a parciális derivált nagyságrendje szintén $1/(D+1)^2$. Ilyen mennyiségek értékeléséhez a skálainvariancia elvét kell alkalmazni. Éves mennyiségekre áttérve és az $r = \mathbf{r}^{72/(D+1)}$ jelöléssel élve, ahol a vastag betű az éves mennyiség:

$$\partial S/\partial \mathbf{r}_{t+D} = (\partial S/\partial r_{t+D})\ (\partial r_{t+D}/\partial \mathbf{r}_{t+D}) \approx 72/(D+1)^3.$$

Elegendően finom felbontás esetén (D=36 vagy 72) $72/(D+1)^3$ alig különbözik 0-tól. Ezért – legalábbis a leszámítolás nélküli aranyszabály-állapot esetén – (30) túlzottan érzékeny a számítási hibákra. Ezzel ellentétben, a Simonovits [1994]-ben vizsgált népszerű esetben $D=1$, $w_1=0$, csupán a Cobb–Douglas-eset szinguláris, a $\partial S/\partial r_{t+1}=-\mu/4$ együttható meglehetősen nagy, még inkább az éves szinten számított $\partial S/\partial \mathbf{r}_{t+1}=-9\mu$.

Emlékeztetünk Gale [1973] következő megjegyzésére: a megoldás nem mindig folytatható, ha a (30) implicit egyenletnek nincs megoldása, vagy ami ugyanaz, a (31) explicit egyenlet jobb oldala nincs értelmezve. Ekkor a rendszer *működésképtelenné* válik. Természetesen az állandósult állapotokkal nincs ilyen gond, legalábbis elméletben.

Az áttekinthetőség kedvéért külön példában ismertetjük a Simonovits [1994]-ben közölt 2 korosztályos eset teljes és egyszerűsített leírását.

1. példa (racionális várakozások, 2 korosztály). $D=1$.

Teljes leírás: a feltételes optimum

$$c_{0,t}=\frac{w_0+w_1 r_{t+1}^{-1}}{1+\Phi r_{t+1}^{-\mu}} \quad \text{és} \quad c_{1,t}=r_t a_{0,t-1}+w_1$$

az (a_t, r_{t+1}) párra egy kétdimenziós implicit differenciaegyenlet-rendszerhez vezet:

$$a_{0,t}=r_t a_{0,t-1} \quad \text{és} \quad \frac{w_0+w_1 r_{t+1}^{-1}}{1+\Phi r_{t+1}^{-\mu}}+r_t a_{0,t-1}+w_1=1\,.$$

Egyszerűsített leírás (*Gale* [1973], 4. tétel): a feltételes optimum

$$c_{0,t}=\frac{w_0+w_1 r_{t+1}^{-1}}{1+\Phi r_{t+1}^{-\mu}} \quad \text{és} \quad c_{1,t}=\frac{\Phi r_t(w_0+w_1 r_t^{-1})}{1+\Phi r_t^{-\mu}}$$

r_{t+1}-re egy egydimenziós implicit differenciaegyenlethez vezet:

$$\frac{w_0+w_1 r_{t+1}^{-1}}{1+\Phi r_{t+1}^{-\mu}}+\frac{\Phi r_t(w_0+w_1 r_t^{-1})}{1+\Phi r_t^{-\mu}}=1\,.$$

Az egyszerűsített leírásra az *1. tétel* megfordítása is igaz (vö. Simonovits [1994], 4. tétel). Ez vezetett Gale ([1973] 12. és 16. o. előadott) *sejtéséhez*, amelyet a Gale és mások által elhanyagolt $\mu>\mu_2$ esetre tekintettel célszerű a következőképpen átfogalmazni: *racionális várakozásoknál a kisebb kamatlábú állandósult állapot aszimptotikusan stabil*. Gale sejtésével ellentétben nincs okunk azt várni, hogy ez az egyszerű eredmény általánosan igaz legyen, akár racionális várakozások esetében. Valóban, hamarosan látni fogjuk, hogy *racionális várakozásokra* – gyenge feltevések mellett – *mindkét állandósult állapot instabil*. Viszont furcsa módon, a naiv várakozásokra Gale mondanivalója *tipikusan* (de nem mindig) igaznak tűnik.

A racionális várakozások tárgyalása során a továbbiakban föltesszük, hogy vannak kereset nélküli gyermek és öreg korosztályok: $L>0$ és $M<D$, valamint $\mu>0$. Pontosabban, csak azt fogjuk kikötni, hogy legalább egy-egy gyermek és nyugdíjas korosztály létezik.

Lokális instabilitás

A dinamikus rendszer viselkedéséről az állandósult állapotok (in)stabilitása adja a legegyszerűbb tájékoztatást.

Lokális elemzés esetében elvben egyszerű a helyzet. Bevezetjük az r_F állandósult állapottól való eltérést: $y_t=r_t-r_F$, s az $r_{t+D}=g(r_{t-D+1}, \ldots, r_{t+D-1})$ függvény parciális deriválásával eljutunk a linearizált $y_{t+D} = \sum_{-D<i<D} \tau_i y_{t+i}$ rendszerhez. Bevezetve a $p(z) = \sum_{-D<i<D} \tau_i z^{D-1+i}$ polinomot, adódik a $(2D-1)$-ed fokú $q(z)=z^{2D-1}-p(z)$ karakterisztikus polinom. Ismert tétel szerint csupán azt kellene eldönteni, hogy hol helyezkednek el e polinom gyökei: az egységkörön belül (aszimptotikus stabilitás), vagy vannak rajta kívül is gyökök (instabilitás). Ha már a függvényérték numerikus meghatározása is nehézségekbe ütközött, milyen nehéz lehet a $2D-1$ darab parciális derivált meghatározása! Szerencsénkre nem így van, legalábbis az esetek egy jó részében nem. A következő segédtétel egy nagyon hasznos összefüggést ígér:

3. segédtétel (racionális várakozások). *Ha $w_0=0=w_D$ és r_F egy megengedett állandósult állapot, akkor*

$$\tau_{-D+1} = r_F^D . \tag{32}$$

A meglehetősen bonyolult bizonyítást a *Függelék* tartalmazza.

A *3. segédtételből* már könnyen levezethető az

5. tétel (racionális várakozások). *Tegyük föl, hogy $w_0=0=w_D$ és a $q(z)$ karakterisztikus polinom legalább egyik gyökének az abszolút értéke különbözik 1-től. Ekkor az aranyszabály állandósult állapot instabil.*

Bizonyítás. A polinomok gyökei és együtthatói közti összefüggés szerint a $2D-1$ darab sajátérték szorzata τ_{-D+1}-gyel, azaz 1-gyel egyenlő. Ha legalább egyikük abszolút értéke különbözik 1-től, akkor kell lennie egy olyan gyöknek is, amelyiknek az abszolút értéke nagyobb, mint 1. | |

Megjegyzések. 1. Mint a nemsokára bemutatandó *2. példa* szemlélteti, $D=2$ és $\mu=1$ esetén bekövetkezik az *5. tételben* kizárt teljesen valószínűtlen eset: mindegyik gyök abszolút értéke 1. Szép volna, ha bizonyítani tudnánk az abszolút értékre vonatkozó feltevést $\mu < 1$ esetén. (Ezt a kellemetlen esetet más tanulmányok, például *Grandmont–Laroque* [1990] szintén kizárják.) Egyébként a kizárt esetben elképzelhető a stabilitás, de a kialakuló dinamika mindenképpen nagyon bonyolult lenne. Többszörös gyökök esetén az instabilitás is következne.

2. Az *1. táblázatban* már bemutattuk a kiegyensúlyozott állapotok elhelyezkedését. Láttuk, hogy a bemutatott esetek mintegy felében $r_B > 1$. Az esetek másik felében pedig $r_B < 1$, de egyhez közeli érték, éppen a realitás miatt. Ha $\tau_{-D+1} < 1$, de D nagy és r_B közel van 1-hez, akkor a sajátértékek mértani közepe $|\tau_{-D+1}|^{1/(2D-2)} = r_B^{D/(2D-2)} \approx r_B^{1/2}$. Ezért valószínűsíthető, hogy legalább egy gyök abszolút értékben nagyobb mint 1.

2. példa (racionális várakozások, három korosztály, CRRA). $L=1=M$, $D=2$, $w_1=1$, $0 < \mu$ £ 1. Könnyű megmutatni, hogy $r_B=\beta^{(2-2\mu)/(2\mu-1)}$. Ezért $r_B < 1$, ha $\mu > 1/2$ (adós); $r_B > 1$, ha $\mu < 1/2$ (hitelező). $\mu=1/2$ esetén nem létezik kiegyensúlyozott gyök, eltekintve a leszámítolás nélküli esettől. Túlságosan hosszadalmasak a számítások, de a számítógéppel ellenőrizhető, hogy $\mu < 1/2$ esetén az aranyszabály-állapot is instabil. Viszont $1/2 < \mu < 1$ esetén a kiegyensúlyozott állapot még stabil! Egyébként $\mu=1$ esetén előáll a valószínűtlen eset: $q(z)=z^3-1$, azaz mindhárom gyök abszolút értéke 1, az *5. tétel* nem alkalmazható. Számítógépes futással meggyőződhetünk arról, hogy a rendszer instabil, bár a divergencia nagyon lassú.

3. példa (racionális várakozások, négy korosztály, Leontief-hasznosság). $D=3$, $L=1$, $M=2$, $0 < w_0 < 1/2$, $w_1=1-w_0$, $\mu=1$. Könnyű belátni, hogy $r_B < 1$. Ennek ellenére r_B is instabil, bár működőképes.

Ezen a ponton bevezetünk egy hasznos módszert. Ahelyett, hogy a $(2D-1)$-változós g

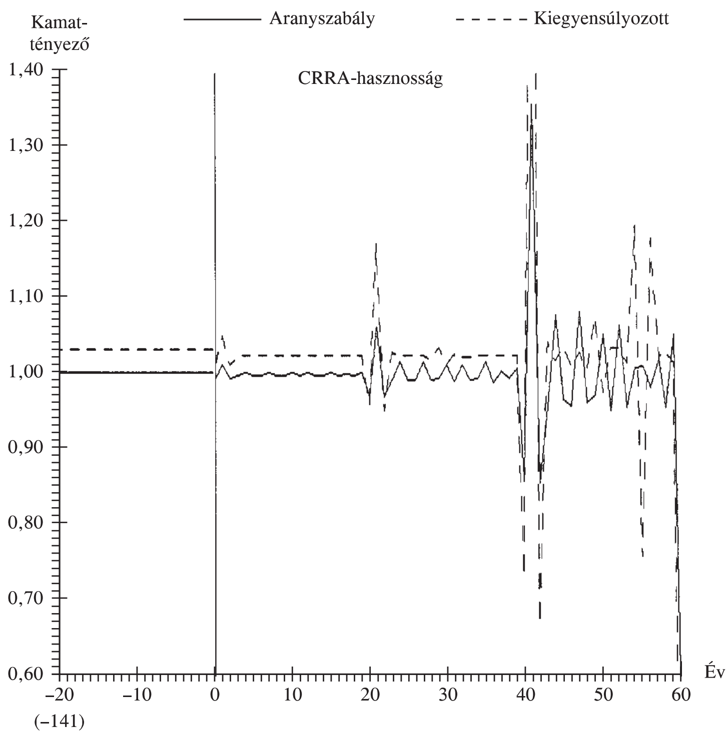
leképezést vizsgálnánk, beérjük a leképezésnek az átlóra való *leszűkítésével*. Definiáljuk az *aggregátorfüggvényt*: Γ: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, ahol $r_{-2D+1}= \ldots =r_{-1}$: azaz $r_0=\Gamma(r_{-1})=g(r_{-1}, \ldots, r_{-1})$.

Számítógépes futtatásaink azt mutatják, hogy annyira instabil mindkét állandósult állapot, hogy már maguknak az állandósult állapotoknak a numerikus rekonstruálása is gondot okoz: $r_{-2D+1}= \ldots =r_{-1}=r_F$ esetén $r_0=r_F$ csak rossz közelítéssel teljesül, már $D > 3$-ra. Természetesen különböző számítógépes programok, valamint különböző algoritmusok némileg különböző számszerű eredményeket adnak.

4. példa (racionális várakozások, CRRA) $\mu=0{,}5$, $\beta=0{,}99$, $M=51$: $r_B=0{,}98657$. A számítógéppel rajzolt *1. ábráról* látható, hogy az $r_{-141}= \ldots =r_{-1}=r_F$ aranyszabályból vagy kiegyensúlyozott állapotból induló pálya berezeg.

1. ábra

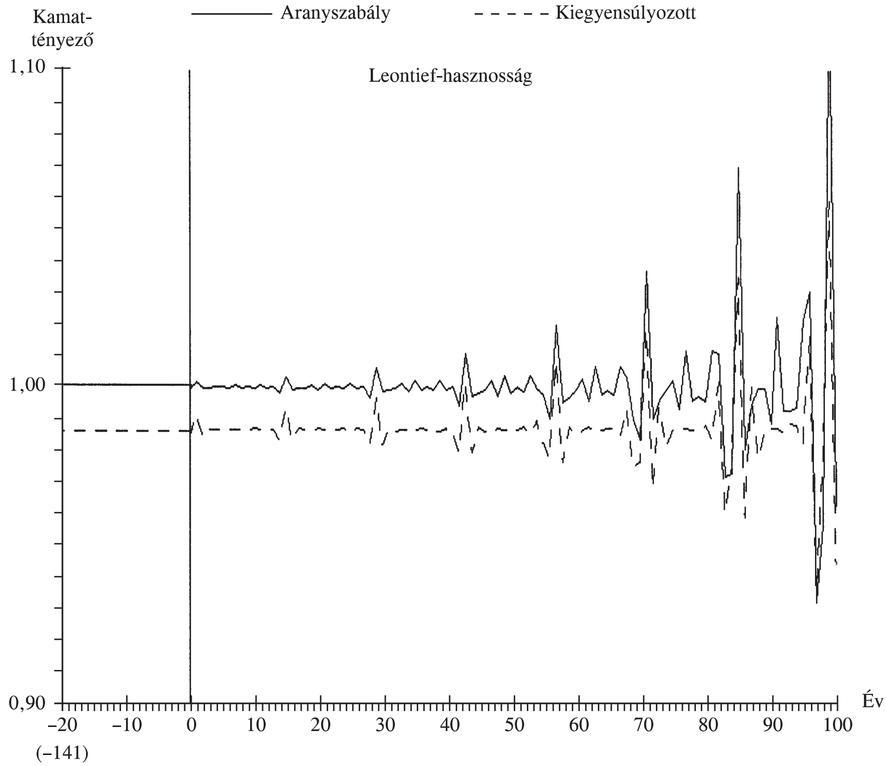
Instabilitás racionális várakozásoknál



5. példa (racionális várakozások, Leontief-hasznosság) $\mu=1$, $M=57$: $r_B=0{,}98657$. Számítógéppel szemléltethető, hogy az $r_{-141}= \ldots =r_{-1}=r_F$ aranyszabályból vagy kiegyensúlyozott állapotból indítva a rendszert, a kerekítési hibák és az instabilitás miatt a rendszer bár simán, de azonnal letér az egyensúlyról (*2. ábra*).

A változatosság kedvéért bemutatjuk az *5. példa* Γ görbéjét az állandósult állapotoknál. Figyeljük meg a *3. ábrán*, hogy a legtöbb pontban nincs is értelmezve a függvény! (A *4. példára* nem is tudtuk megrajzolni a görbét!)

2. ábra
Instabilitás racionális várakozásoknál



Működőképesség

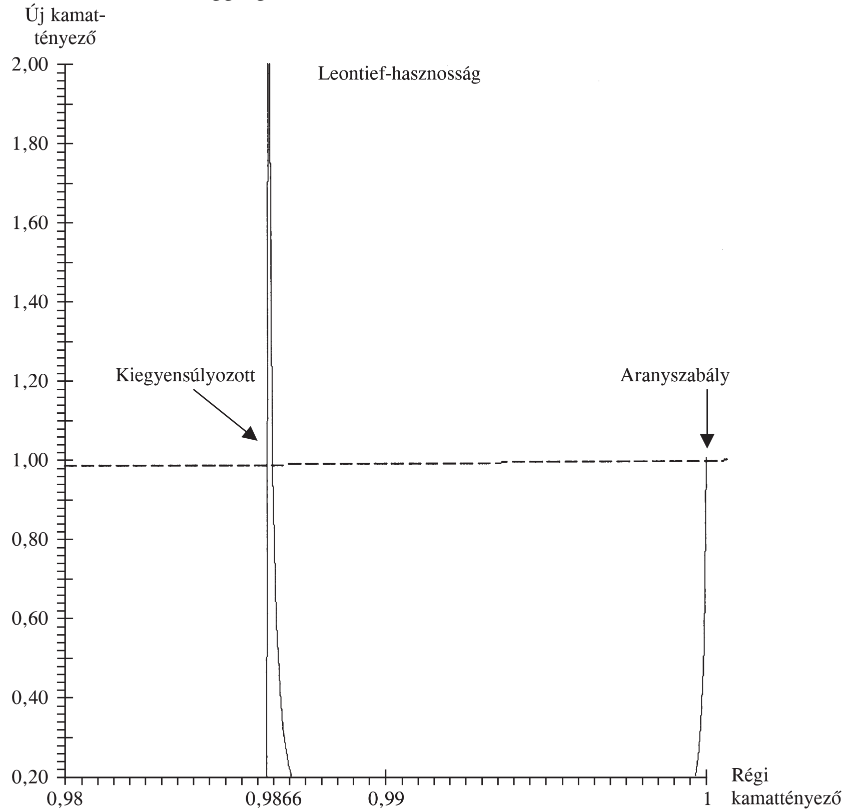
Eddig csupán az állandósult állapotok instabilitását igazoltuk, illetve valószínűsítettük. Ettől még működhetne a rendszer. A továbbiakban úgy érvelünk, hogy nemcsak a stabilitás, de a működőképessség is valószínűtlen.

Ugyanis azt sejtjük, hogy a számláló, de különösen a nevező nagyon kis abszolút hibája nagyon eltorzítja a hányadost. Például a leszámítolás nélküli esetben ($\beta=1$, $\Phi=1$) az aranyszabálynál a (31) [ ]-beni törtjének számlálója és nevezője, $u_1=v_1=1/(D+1)$. De amíg $W(r)$ lassan változik r-rel, $\mathbf{S}_t\mathbf{V}_t$ gyorsan változik, lévén $1/(D+1)$ és D nagyságrendű kifejezések szorzata. Például $D=71$ esetén szerencsétlen számításnál még $u_1/v_1=0{,}9995$-be is ütközhetünk.

Néhány valóságszagú paraméterértékre kiszámítottuk a nevező 1-hez közeli gyökeit. Az eredményeket az *1.* és a *2. táblázat* utolsó oszlopa mutatja, a kiegyensúlyozott, illetve az aranyszabály-állapotok esetén. (Az utolsó előtti oszlopra a naiv várakozások vizsgálatánál lesz szükségünk.) Azoknak, akik jobban hisznek az analitikus módszereknek, mint a gépi számolásnak, bemutatunk két speciális példát.

6. példa (racionális várakozások, kis nevező, 3 korosztályos esetben, Leontief, a *2. példa* folytatása). $L=1=M$, $D=2$, $w_1=1$ és $\mu=1$. Az $x=1/r$ jelölést bevezetve $W=x$, $\mathbf{V}=1+x$, $V=1+x+x^2$, $H=x/(1+x+x^2)$, $\mathbf{S}=(1-x+x^2)/(1+x+x^2)$. Mind a számlálót, mind a nevezőt bővítve az $1+x+x^2$ kifejezéssel, $Q=(1-x+x^2)/(-1+x+x^2)$. Kíváncsiak vagyunk, hol válik a nevező nullává, azaz a racionális várakozás definiálhatatlanná. A

3. ábra
Aggregátor racionális változásoknál



kapott másodfokú egyenletet megoldva: $x_D=(-1+5^{1/2})/2$, azaz $r_D=(1+5^{1/2})/2\approx1{,}618$. Ez a szám első pillantásra messze esik 1-től, ha azonban éves szintre térünk át, akkor a 24. gyökvonás után a meglehetősen reális 1,02 körüli érték adódik. Tehát már a háromnemzedékes modellben évi 2 százalékos kamatláb mellett a racionális várakozás meghatározhatatlan!

Ezen a ponton egy pillanatra visszatérünk a pozitív keresetvektorhoz.

7. példa (racionális várakozások, diszkontálatlan Cobb–Douglas-függvény, három korosztály). $\beta=1$, $\mu=0$, és $D=2$, $w_i=1/3$. Igazolható, hogy (31) nevezőjére teljesül $v(r)=-(2/3)r^{-1}+2-2r/3-r^2/3$, s kalkulátorral ellenőrizhető, hogy a nevezőnek van gyöke $r_D=1{,}355$ (azaz éves szinten $\mathbf{r}_D=1{,}0135$) közelében, a racionális várakozás meghatározhatatlan.

Ilyen rossz nevezők mellett kimondhatjuk az

1. sejtést (racionális várakozások). Minden realista OLC modellben az állandósult állapotok körüli pályák nemcsak instabilak, de működésképtelenek is.

Sajnos, nagyon keveset tudunk a 2-nél nagyobb periódusú ciklusokról, legalábbis a $0<\mu<1$ esetben. Ha tudnánk határciklusokról, akkor azok környezetében lennének működőképes pályák. A $\mu=1$ eset 2-ciklusai a kísérletek szerint nem határciklusok.

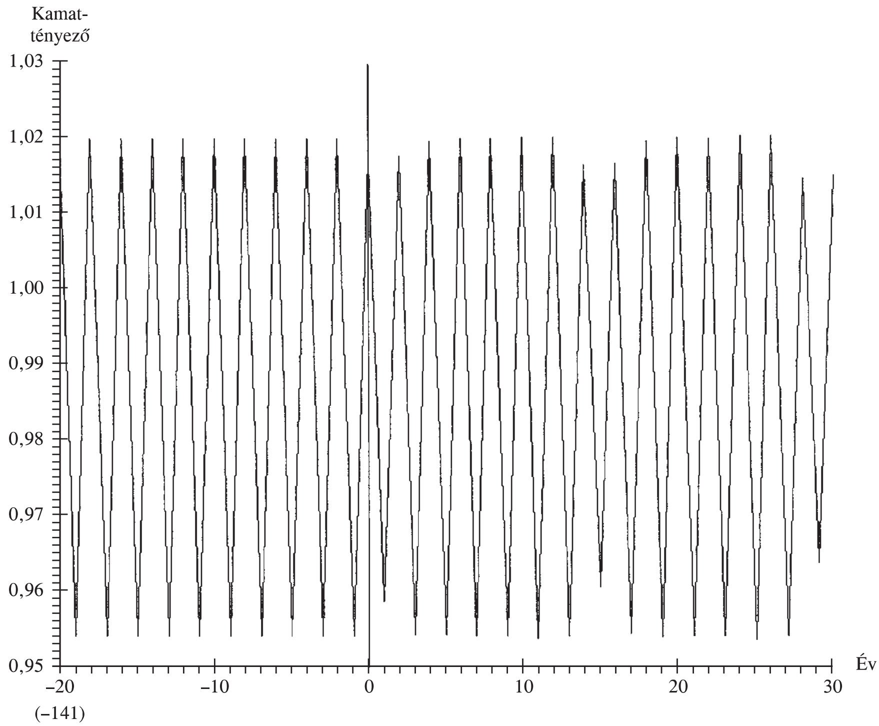
8. példa (racionális várakozások, Leontief, 2-ciklus). A (31) számítógépprogramját ezúttal 2-ciklusból indítjuk. Látható, hogy a Simonovits [1995]-ben szereplő Leontief-féle 2-ciklus $D=1$ esetén fennmarad, $D=71$ esetén elromlik, azaz instabil ciklus: *4. ábra*.

2. táblázat
Az aranyszabály állandósult állapotok jellemzői
($L=18$ és $D=71$)

M	μ	β	$\mathbf{r}(K_F)$	$r_D–r_G$
51	0,50	0,98	0,9720	0,0001
51	*0,50*	*0,99*	*0,9838*	*0,0002*
51	0,50	1,00	1,0322	–0,0004
51	0,75	0,98	1,0333	0,0002
51	0,75	0,99	1,0015 *	0,0012
51	0,75	1,00	0,9871	0,0002
51	1,00		0,9946	0,0002
53	0,50	0,98	0,9707	0,0001
53	0,50	0,99	0,9782	0,0001
53	0,50	1,00	1	0
53	0,75	0,98	1,0429 *	0,0001
53	0,75	0,99	1,0339	0,0002
53	0,75	1,00	1	0,0004
53	1,00		1	0,0011
55	0,50	0,98	0,9699	0
55	0,50	0,99	0,9752	0,0001
55	0,50	1,00	0,9876	0
55	*0,75*	*0,98*	*0,9931* **	*0,0001*
55	0,75	0,99	1,0334 *	0,0001
55	0,75	1,00	1,0361	0
55	1,00		1,0073	0,0002
57	0,50	0,98	0,9695	0
57	0,50	0,99	0,9734	0,0001
57	0,50	1,00	0,9815	0
57	0,75	0,98	0,9756 **	0,0001
57	0,75	0,99	0,9894 **	0,0001
57	0,75	1,00	1,0224 *	0
57	*1,00*		*1,0182*	*0,0001*

Megjegyzések: 1. A számok négyjegyre kerekítettek. *2.* A * komplex domináns gyököt jelez instabil kiegyensúlyozott állapot mellett. 3. A ** komplex domináns gyököt jelez stabil kiegyensúlyozott állapot mellett. *4.* A dőlt sorok példákat mutatnak be. *5.* r_D a nevező gyöke.

4. ábra
2-ciklus racionális várakozásoknál



Dinamika naiv várakozásokkal

Az előző fejezetben föltettük, hogy a fogyasztóknak tökéletes előrelátásuk van. Reális körülmények között instabil és működésképtelen pályákkal találtuk magunkat szemben, ezért a sokat bírált naiv várakozások feltevéséhez folyamodunk: lásd a (7) képletet.

Ezt a feltevést már *Gale* [1974] elfelejtett cikkében alkalmazta a három időszakot élő és diszkontálatlan Cobb–Douglas-hasznosságfüggvényű fogyasztóra: $D=2$, $\beta=1$ és $\mu=0$. Sajnos, kezdeményezése eddig nem talált követőkre.

Dinamika

Nyilvánvaló, hogy tökéletlen előrelátás esetén minden fogyasztónak minden időszakban fölül kell vizsgálnia fogyasztási terveit. Tekintsük a $t-i$. időszakban született fogyasztót, amikor $i-1$ korú, azaz $(t-1)$-ben.

A (16)–(17) jelöléseket a (7) naiv várakozásokra specifikáljuk. Elhagyva az időindexet:

$$W_i(r) = \sum_{0\le j\le D-i} w_{i+j} r^{-j} . \tag{33}$$

$$V_i(r) = \sum_{0\le j\le D-i} \left[\Phi r^{-\mu}\right]^{-j} . \tag{34}$$

Behelyettesítve a (33)–(34) párt (18)-ba, adódik

$$c_i(a_{i-1},r) = \frac{ra_{i-1} + W_i(r)}{V_i(r)}. \tag{35}$$

Megjegyzés. A következő iterációk jelentősen meggyorsítják a számolást:

$$W_i(r)=w_i+W_{i+1}(r)/r,\ V_i(r)=(\Phi r^{-\mu})^{D-i}+V_{i+1}(r),\ i=D,\ \ldots,\ 0,$$

$$W_{D+1}(r)=0 \text{ és } V_{D+1}(r)=0.$$

Vegyük figyelembe, hogy az első és a második iteráció időben visszafelé megy, akárcsak a dinamikus programozásnál.

Most bemutatjuk a legegyszerűbb 3-korosztályos példát.

9. példa (*Gale* [1974] példája, naiv várakozások, 3 korosztály, leszámítolás nélküli Cobb–Douglas hasznosság)**.** $D=2$, $w_1=1$, $\mu=0$, $\beta=1$. (35) szerint $c_{0,t}=1/(3r_t)$, $c_{1,t}=(r_ta_{0,t-1}+1)/2$, $c_{2,t}=r_ta_{1,t-1}$. A (20) értelmében $3(a_{0,t-1}+2a_{1,t-1})r_t^2-3r_t+2=0$. Megoldjuk a másodfokú egyenletet r_t–re és az aranyszabály gyököt választjuk: $r_t=1$, azaz $c_{i,t}=1/3$, $a_{0,t-1}=-1/3$, $a_{1,t-1}=1/3$.

Először föltesszük, hogy $A_{-1}=a_{0,-1}+a_{1,-1}=0$, azaz $a_{0,t}+a_{1,t}=A_t=R_{-1,\,t}A_{-1}=0$. Ekkor a kétdimenziós differenciaegyenlet–rendszer egydimenziósra egyszerűsödik: $a_{1,t}=[3+(9-24a_{1,t-1})^{1/2}]/12$, $t=0,1,\ \ldots$. Egyszerű számolással igazolható, hogy a rendszer növekvő amplitúdóval oszcillál.

Figyelemre méltó, hogy más kezdeti értékek stabil és instabil pályákat származtatnak (valószínűleg $A_{-1} < 0$ és $A_{-1} > 0$ esetén). Tehát állandósult állapotunk fél oldalról stabil.

Megjegyzés. Választhattuk volna az $r_t=2$ megoldást is, de nem tudtuk volna folytatni.

Stabilitás

Miután belekóstoltunk a globális dinamikába, rátérünk a lokális dinamika elemzésére. A stabilitáselmélet alaptétele szerint meghatározzuk az $a_t=h(a_{t-1})$ leképezés $K_F=(k_{ij,F})$ Jacobi-mátrixát egy a_F állandósult állapotban, és megvizsgáljuk, hogy spektrálsugara, $\mathbf{r}(K_F)$, kisebb-e vagy sem, mint 1. A konvergenciatényező $1/\mathbf{r}(K_F)$.

Szükségünk lesz egy egész sor jelölésre. Az áttekinthetőség kedvéért a képletszám a forrásra utal.

$$W_{i,F} = \sum_{0\le j\le D-i} w_{i+j} r_F^{-j}. \tag{33a}$$

$$W'_{i,F} = -\sum_{0\le j\le D-i} j w_{i+j} r_F^{-j-1}. \tag{33b}$$

$$V_{i,F} = \sum_{0\le j\le D-i} \Phi^j r_F^{-\mu j}. \tag{34a}$$

$$V'_{i,F} = -\mu \sum_{0\le j\le D-i} j\Phi^j r_F^{-\mu j-1}. \tag{34b}$$

$$c_{i,F} = \Phi^i r_F^{(1-\mu)i} W_{0,F} / V_{0,F}. \tag{19a}$$

$$a_{i,F} = r_F a_{i-1,F} + w_i - c_{i,F}, \ \ a_{-1,F} = 0\,. \tag{2a}$$

$$c'_{i,F} = \frac{(a_{i-1,F} + W'_{i,F})V_{i,F} - (r_F a_{i-1,F} + W_{i,F})V'_{i,F}}{{V_{i,F}}^2} \tag{35b}$$

$$S'_F = -\sum_{0 \le j \le D} c'_{j,F}\,. \tag{20b}$$

$$k_{ij,F} = r_F \mathbf{1}_{i-1,j}\left(1 - \frac{1}{V_{j+1,F}}\right) + r_F \frac{a_{i-1,F} - c'_{i,F}}{V_{j+1,F} S'_F}, \quad 0 \le i, \ \ j \le D-1\,, \tag{36}$$

ahol $\mathbf{1}_{ij}$ a Kronecker-szimbólum: 1, ha $i=j$ és 0 egyébként. Figyelem: (35*b*) a (35)-beli kifejezés parciális deriváltja, nem pedig (22) teljes deriváltja.

4. segédtétel (naiv várakozások). A h leképezés Jacobi mátrixa az a_F állandósult állapotban $K_F=(k_{ij,F})$.

Bizonyítás. Linearizáljuk a (2) egyenletet a_F körül, ahol $r(a)$ a (35) és (20) által meghatározott függvény.

$$k_{ij} = \frac{\partial r}{\partial a_j} a_{i-1} + r\mathbf{1}_{i-1,j} - \frac{\partial c_i}{\partial a_j}\,.$$

Az első parciális deriváltat a szóban forgó $\mathbf{R}^{D+1} \to \mathbf{R}$ implicit függvényből határozhatjuk meg. (35) és $S(a,r) = 1 - \sum_{0 \le i \le D} c_i(a_{i-1}, r)$ folytán

$$\frac{\partial r}{\partial a_j} = -\frac{\partial S / \partial a_j}{\partial S / \partial r} = -\frac{r}{V_{j+1} S'}\,.$$

A második parciális derivált

$$\frac{\partial c_i}{\partial a_j} = \mathbf{1}_{i-1,j} \frac{r}{V_{j+1}} + c'_i \frac{\partial r}{\partial a_j}\,.$$

Behelyettesítéssel adódik (36). | |

Ezen a ponton egy hasznos megfigyelés kínálkozik a naiv várakozásokhoz tartozó $S'_F=0$ *szingularitási feltételre*. Legyen $\beta=1$ és $r_G=1$, ekkor $V_{i,G}$, $V'_{i,G}/\mu$, $c_{i,G}$, $a_{i,G}$ egyaránt függetlenek μ-től. Ezért (20*b*) az $S'_G=\pi-\pi_\mu\mu$ alakot ölti, ahol π és π_μ egy-egy paraméter. $S'_G=0$ ekvivalens a $\mu_o=\pi/\pi_\mu$ feltétellel. Ha $\mu_o < 0$ vagy $\mu_o > 1$, akkor nincs szingularitás, legalábbis $\beta=1$, $r_G=1$ mellett. Ha azonban $0 \le \mu_o$ £ 1, akkor az implicit egyenletnek tipikusan nincs megoldása. Például számítássorozatunkban $M=51$, $\mu_o=0{,}636$ és $M=57$, $\mu_o=0{,}800$.

Mit mondhatunk a szingularitás környékéről? Mivel a teljes fogyasztás egységnyire van normálva, az érzékenység π_μ-től függ. Számítással igazolható, hogy $\pi_\mu=D/4$, azaz visszatérve a skálainvarianciához: $\boldsymbol{\pi}_\mu=\pi_\mu(dr_t/d\mathbf{r}_t)=(D/4)\times 72/(D+1)=18D/(D+1)$. Naiv várakozásoknál a korosztályszám növelése nem rontja, hanem némileg javítja a helyzetet.

Mit mondhatunk $\mathbf{r}(K_F)$-ről? Általában nem sokat, azonban ügyesen választott speciális esetekben lehetséges a stabilitás igazolása. De mindenekelőtt egy segédtételre lesz szükségünk.

5. segédtétel (naiv várakozások). a) Ha $0 < -A_G < S'_G$, *akkor a* K_G *mátrix maximális oszlopösszege* $K_{D-1,G} = 1 + A_G/S'_G$. *b) A* K_B *mátrix minden oszlopösszege* r_B.

Bizonyítás. Először egy megengedett állandósult állapotot tekintsünk. (2*a*) és (35*b*) szerint $c'_{D,F} = a_{D-1,F}$, (20*b*) felhasználásával $S'_F = -\sum_{0\le j<D} c'_{j,F} - a_{D-1,F}$ és definíció szerint

$A_F = \sum_{0\le j<D} a_{j-1,F} + a_{D-1,F}$. Tehát $K_{j,F} = r_F[1 + A_F/(V_{j+1,F}S'_F)]$. *a)* $V_{j+1,G}$ csökkenő sorozat, ezért

feltételünk esetén az aranyszabálynál $0 < K_{j,G}$ £ $K_{D-1,G} = 1 + A_G/S'_G$. *b)* Kiegyensúlyozott állapotra $A_B = 0$, tehát $K_{j,B} = r_B$. | |

Az *5. segédtétel* egy klasszikus feladatnál és két fontos példánál is hasznunkra lesz.

10. példa (naiv várakozások, két korosztály, CRRA hasznosság). Az *5. segédtétellel* bizonyítható, hogy $D = 1$, tetszőleges keresetek és adós aranyszabály esetén az aranyszabály aszimptotikusan stabil.

11. példa (a *2. példa* folytatása, naiv várakozások, három korosztály, CRRA hasznosság). $D = 2$, $w_1 = 1$, $0 < \mu < 1$.

Kezdjük az elemzést az egyszerűbb esettel, amikor nincs leszámítolás: $\beta = 1$. Ekkor $r_B = 1$, $\pi = 1/6$, $\pi_\mu = 1/2$, azaz $\mu_o = 1/3$. Itt a rendszer nincs is definiálva.

Meglehetősen aprólékos számítások azt mutatják, hogy megfelelően nagy, de még értelmes diszkontálásra például $\beta = 0{,}95^{24}$-re r_G gyakorlatilag a teljes $0 < \mu < 1/2$ intervallumon stabil. Megfelelő türelemmel $1/2 < \mu < 1$ esetén $r_B (< 1)$ stabilitása analitikusan is igazolható, bár $\mu \approx 1/2$-re $\mathbf{r}(K_B) > r_B$.

12. példa (naiv várakozások, $D+1$ korosztály, autarchia). $L = 0$, $M = D$, $\beta = 1$, $w_i = 1/(D+1) = c_{i,G}$. Ekkor szimmetrikus az aranyszabály: $r_B = 1$ és $a_{i,G} = 0$, $c'_{i,G} = (1-\mu)(i-D)/[2(D+1)]$. Tehát a szingularitási érték $\mu_o = 1$, $0 \le \mu < 1$ esetén $k_{ij,G} > 0$.

Sajnos, $K_{j,G} = 1$ minden j-re, azaz a Perron–Frobenius-tétel szerint $\mathbf{r}(K_B) = 1$, ahol a stabilitáselméleti tétel nem használható.

Ennek ellenére a *12. példa* jó kiindulási pont.

6. tétel (naiv várakozások). Legyen $\mu < 1$, *legyen* $\beta < 1$ *és* w_i *rendre olyan közel 1-hez és* $1/(D+1)$*-hez, hogy* $K_F > 0$. *a) Ha* $r_B > 1$, *akkor az adós aranyszabály stabil. b) Ha* $r_B < 1$, *akkor a kiegyensúlyozott állandósult állapot stabil.*

Megjegyzések. 1. Érdekes lenne tudni, hogy mekkora a *6. tétel* érvényességi köre. A *11. példa* szerint $D = 1$ esetén maximális. Számítógépes kísérletek arra utalnak, hogy $D > 1$ esetén is nagy, hiszen $0{,}98 \le \beta$ £ 1 és $w_i = w_0\varepsilon^i$, $0{,}99 \le \varepsilon \le 1{,}01$ esetén mind $K_G > 0$, mind $0 < -A_G < S'_G$ fennáll. Azonban a *9. példában* K_G-nak pozitív és negatív elemei is vannak, azaz az érvényességi kör már $D = 2$-nél sem teljes.

2. Ghiglino–Tvede [1995] soktermékes és kétkorosztályos modelljükben hasonló kérdést vizsgáltak – tetszőleges hasznosságfüggvény esetén.

Bizonyítás. a) A keresetek pozitivitása miatt a *3. tételben* $\mu_1 = 1$, tehát az *a)* pont szerint $A_G < 0$. Folytonosság miatt $0 < -A_G < S'_G$ is teljesül, tehát az *5. segédtétel* szerint $0 < K_{j,G} < 1$. *b)* $K_{j,B} = r_B$. Mindkét esetben a Perron–Frobenius-tétel szerint $\mathbf{r}(K_F) < 1$, tehát a megfelelő állandósult állapot stabil. | |

Egyelőre az általános és realista elemzés számítógépet kíván. Folytatva a *1.* és a *2. táblázat* oszlopaiban bemutatott számításokat, a következő eredményeket kaptuk: $\mathbf{r}(K_B) = r_B$ ($\mathbf{1}_D$ bal oldali sajátvektorral), annak ellenére, hogy K_B-nek pozitív és negatív elemei is vannak. Azonban $\mathbf{r}(K_G)$ nem becsülhető a maximális oszlopösszegekkel. A spektrálsugarakat a *2. táblázat* utolsó előtti oszlopában szerepeltettük. Az *1.* és a *2. táblázat* megfelelő sorainak összehasonlításából meggyőződhetünk arról, hogy a vizsgált esetekben legalább az egyik állandósult állapot stabil. Néhány esetben mindkét állandósult állapot stabil (lásd a *14. példát* később).

A *11. példán* gondolkozva a következő kérdés vetődik föl: lehetséges-e, hogy reális modellben valamilyen szinguláris értéknek egy instabil kiegyensúlyozott állapot felel meg? Ismét csak a diszkontálatlan hasznosságfüggvényre szorítkozva, azt tapasztaljuk, hogy lehetséges, mert $M=53$ esetén szimmetrikus állandósult állapotot kapunk. Azonban $\pi_\mu=17{,}75$ miatt a szingularitástól nagyon hamar eltávolodunk. Megkockáztatjuk a

2. sejtést (naiv várakozások). Majdnem minden realista OLC modellben legalább az egyik állandósult állapot körüli pályák aszimptotikusan stabilak.

Működőképesség

A stabilitási eredmények nagyon hasznosak, azonban keveset árulnak el az állandósult állapotok vonzáskörzetéről. Hasonlóan homályban maradnak az átmeneti viselkedés jellemzői, azaz a rendszer működőképessége.

A racionális várakozásokkal ellentétben, a naiv várakozásoknál az állandósult állapotok minden gond nélkül „újratermelik önmagukat”. Mi történik azonban, ha a rendszert megzavarjuk, például a kezdő kamattényezők közös értéke eltér az állandósult állapotokétól?

$$r_t=r,\ t=-D,\ \ldots,\ -1.$$

A kísérletek tanúsága szerint egy-két százalékos eltérítésnél a rendszer simán konvergál a kisebbik egyensúlyi értékhez.

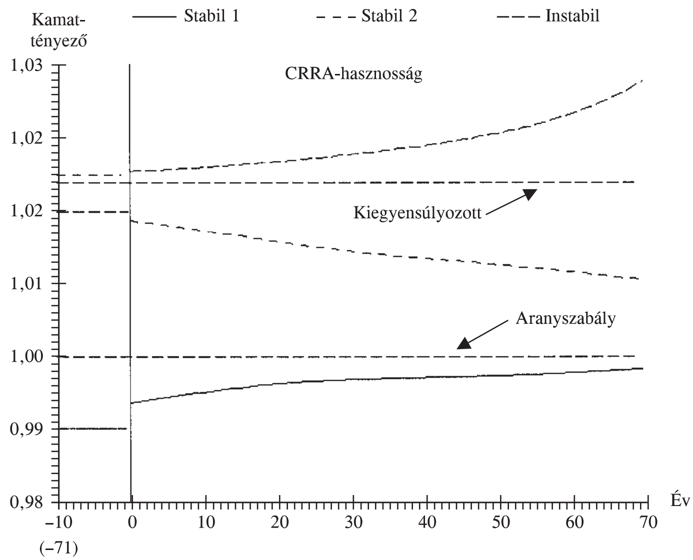
13. példa (A *4. példa* folytatása, CRRA, naiv várakozások). $r=0{,}99$; 1,02 és 1,025 kezdőértékekre két stabil és egy instabil pálya alakul ki. Az *1. ábrával* való összehasonlításnál vigyázzunk arra, hogy most az *5. ábrán* sokkal kisebb részletet ábrázoltunk, és 71 kezdőérték helyett csak 10-et rajzoltunk be! A jobb áttekintés kedvéért megrajzoltuk a naiv várakozások aggregátorleképezését is: *6. ábra*. Figyeljük meg, hogy az aggregátorleképezés növekvő, alulról metszi az átlót $r=1$-nél és fölülről $r=1{,}0241$-nél, stabil aranyszabályt és instabil kiegyensúlyozott állapotot sugallva.

14. példa (az *5. példa* folytatása, naiv várakozások, Leontief-hasznosságfüggvényre). $r=0{,}98$, $r=0{,}99$ és 1,002 kezdőértékekre két stabil és egy instabil pálya alakul ki (*7. ábra*). A jobb áttekintés kedvéért ismét megrajzoltuk a naiv várakozások aggregátorleképezését is *(8. ábra)*. Figyeljük meg, hogy az aggregátorleképezés növekvő, alulról metszi az átlót $r=0{,}986561$-nél és fölülről $r=1$-nél, stabil kiegyensúlyozott állapotot és instabil aranyszabályt sugallva.

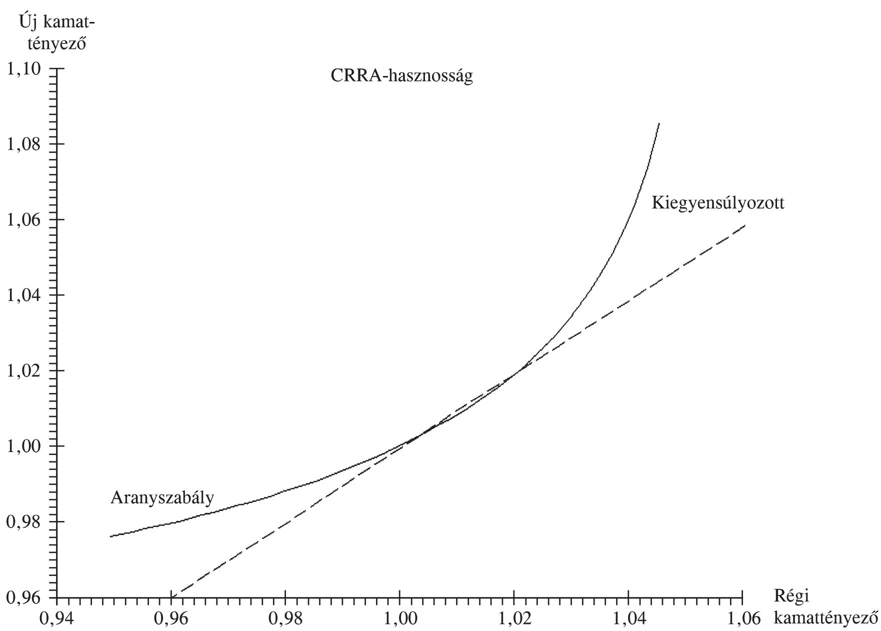
Végül választ keresünk arra, hogy mi történik a *3.c) tétel* ablakában.

15. példa (Kettős stabilitás). $M=55$, $\mu=0{,}75$, $\beta=0{,}98$: $r_B=0{,}928033$. Vegyük észre, hogy ekkor van egy második kiegyensúlyozott állapot is, $r=0{,}3$ körül. A *9. ábra* három pályát mutat: a 0,92 és 0,94-ből induló pályák konvergálnak r_B-hez, míg a 0,995-ből induló pálya 1-hez tart. Figyeljük, meg, hogy most az aggregátorleképezésnek két reális ágát mutatja a *10. ábra*, az első két pálya az alsón, a harmadik a felső ágon halad. Nyitott kérdés: mi történik, ha felváltva ugrándozik a kamattényező a két ágon?

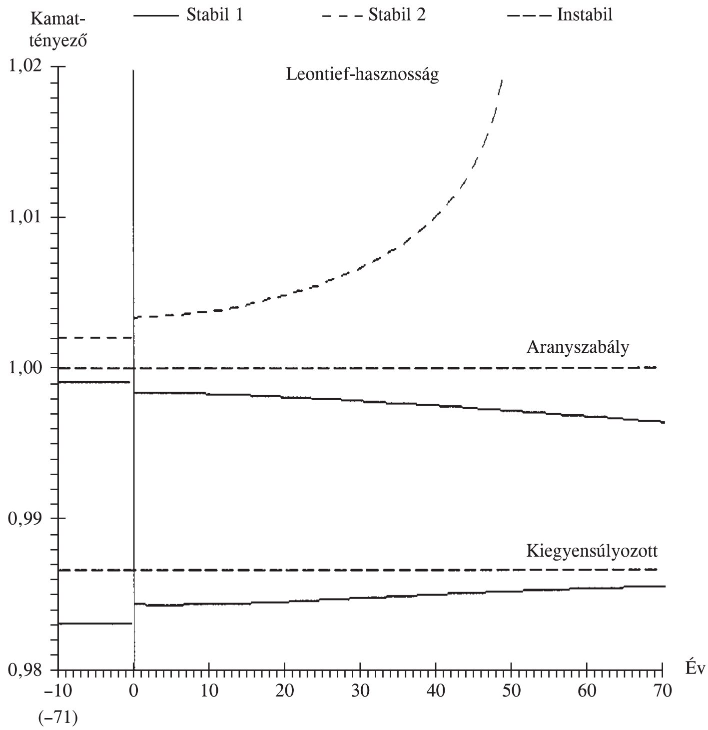
5. ábra
(In)stabilitás naiv várakozásoknál



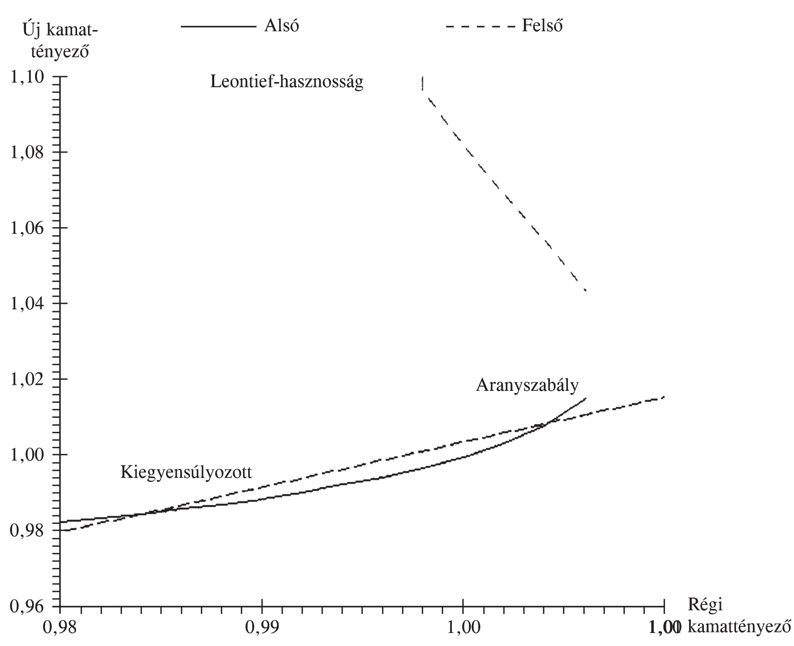
6. ábra
Aggregátor naiv várakozásoknál



7. ábra
(In)stabilitás naiv várakozásoknál

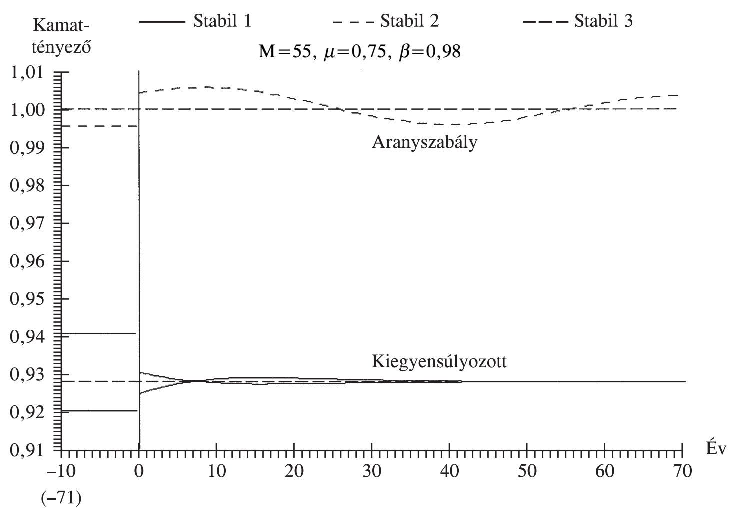


8. ábra
Aggregátor naiv várakozásoknál



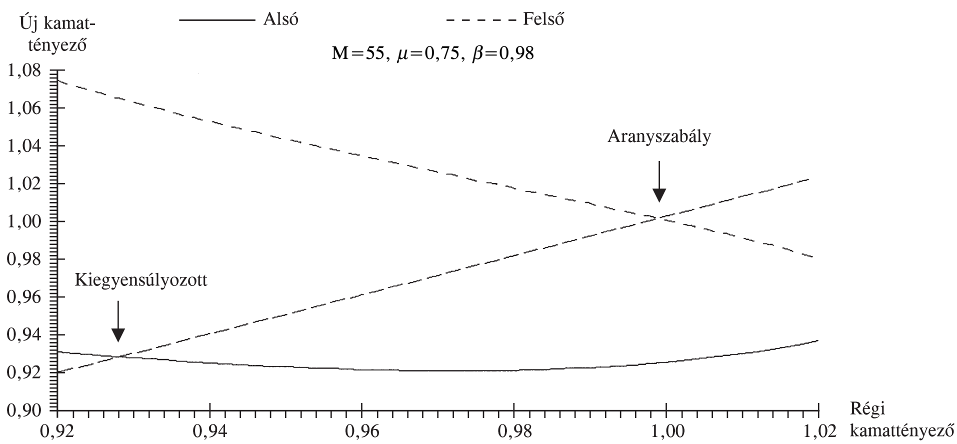
9. ábra

Kettős stabilitás naiv várakozásoknál



10. ábra

Aggregátor naiv várakozásoknál



Függelék

A 3. segédtétel bizonyítása. Az alapötlet egyszerű. Tekintsük $t=0$-t és határozzuk meg r_D változó r_{-D+1} szerinti parciális deriváltját. Mivel $w_D=0$, $W_t=\mathbf{W}_t$. Vegyük észre, hogy r_{-D+1} nem szerepel sem $\mathbf{W}_0$-ban, sem $\mathbf{V}_0$–ban, sem $R^{-1}_{0,D-1}$-ben. Mostantól kezdve a bizonyításban az időindexet általában elhagyjuk.

Az $r_{-D+2}=\ldots=r_{D-1}=r_F$ feltevés miatt a szereplő függvények mindegyike egyváltozóssá válik. A rövidség kedvéért az $r=r_{-D+1}$ jelölést és a normális deriváltat használjuk.

$$G(r)=Q(r)^{1/\mu}r_F^{1-D}, \qquad (F1)$$

ahol

$$Q(r)=\frac{\mathbf{S}(r)\Phi^D}{W-\mathbf{S}(r)\mathbf{V}}. \qquad (F2)$$

Legyen $v(r)=W–\mathbf{S}(r)\mathbf{V}$ és F-fel indexszeljük a megengedett egyensúlyi kamattényező, r_F helyén felvett értékeket: például $Q_F=Q(r_F)$. (F1)–(F2) szerint

$$G_F'=\mu^{-1}Q_F^{1/\mu-1}Q_F'r_F^{1-D}, \qquad (F3)$$

ahol

$$Q_F'=\Phi^D\frac{\mathbf{S}_F'W_F}{v_F^2}. \qquad (F4)$$

Az állandósult állapot definíciója szerint $r_F=Q_F^{1/\mu}r_F^{1-D}$, azaz $Q_F^{1/\mu}=r_F^D$, $Q_F^{1/\mu-1}=r_F^{(1-\mu)\mathrm{D}}$. $Q_F=\Phi^D\mathbf{S}_F/v_F$ miatt $v_F=\Phi^D\mathbf{S}_F/r_F^{\mu D}$. De a (25) és a (24) miatt $\mathbf{S}_F=H_F$. Az (F4) és az F3) szerint

$$Q_F'=\frac{W_Fr_F^{2\mu D}}{\Phi^D\mathbf{H}_F^2}\mathbf{S}_F',$$

és kihasználva, hogy r_F kitevőinek összege $(D–D\mu)+2\mu D=(1–D)+\mu D+1$,

$$G_F'=\mu^{-1}r_F^{\mu D+1}\Phi^{-D}W_FH_F^{-2}\mathbf{S}_F'. \qquad (F5)$$

$\mathbf{S}_F'$ kiszámítása következik. Vegyük észre, hogy $r=r_{-D+1}$-től csak $\mathbf{S}$ [vö. (29)] függ: $\Phi^Dr^{1-\mu}r_\mathrm{F}^{(1-\mu)(D-1)}H_{-D}(r)$. Elhagyva a $-D$ időindexet is, adódik

$$\mathbf{S}_F'=-\Phi^D(1-\mu)r_F^{-\mu}r_F^{(1-\mu)(D-1)}H_F-\Phi^Dr_F^{(1-\mu)D}H_F', \qquad (F6)$$

ahol

$$H_F'=\frac{W_F'V_F-W_FV_F'}{V_F^2}. \qquad (F7)$$

Természetesen (27)–(28) szerint ($w_0=0$ miatt)

$$W_F'=-\sum_{1\le i<D}w_ir_F^{-2}r_F^{-i+1}=-r_F^{-1}W_F,$$

$$V_F' = -\mu \sum_{1\le i\le D} \Phi^i r_F^{-\mu-1} r_F^{(1-i)\mu} = -\mu r_F^{-1}(V_F - 1)\,.$$

A behelyettesítéseket elvégezve, H_F' számlálója egyszerűsödik: $r_F^{-1}(\mu-1)W_F V_F - r_F^{-1}\mu W_F$. Mivel $H=W/V$, az (F7)-ből következően

$$H_F' = r_F^{-1}(\mu-1)H_F - r_F^{-1}\mu H_F/V_F. \qquad (F8)$$

Mielőtt az (F6)-ba behelyettesítenénk a kapott számlálót, vegyük figyelembe, hogy r_F (F6)-beli mindkét kitevője $D-1-\mu D$. Azaz

$$\mathbf{S}_F' = -\Phi^D r_F^{(1-\mu)D-2}[(1-\mu)H_F + H_F'] = \Phi^D r_F^{(1-\mu)D-2} W_F/V_F^2. \qquad (F9)$$

Az (F9)–et beírva az (F5)–be, adódik a (32).

b) $r_F=1$–re (32)–ből $\tau_{-D+1}=1$ következik.

Hivatkozások

CHAMPSOUR, P. [1990]: (szerk.) Essays in Honor of Edmund Malinvaud. MIT Press, Cambridge, MA.

GALE, D. [1973]: Pure Exchange Equilibrium of Dynamic Economic Models. Journal of Economic Theory, 6, 12–36. o.

GALE, D. [1974]: The Trade Imbalance Story. Journal of International Economics, 4, 119–137. o.

GHIGLINO, C.–TVEDE, M. [1995]: Endowments, Stability and Fluctuations in OG Models. Journal of Economic Dynamics and Control, 19, 621–654. o.

GRANDMONT, J.-M. [1985]: On Endogenous Business Cycles. Econometrica 45, 995–1045. o.

GRANDMONT, J.-M. –LAROQUE, G. [1990]: Stability, Expectations and Predetermined Variables. *Champsour* [szerk.], Vol. 1. 71–92. o.

KEHOE, T. J.–LEVINE, D. K. [1990]: The Economics of Indeterminacy in Overlapping Generations Models. Journal of Public Economics, 42, 219–243. o.

KIM, O. [1983]: Balanced Equilibrium in a Consumption Loans Model. Journal of Economic Theory, 29, 339–346. o.

KIRMAN, A. [1992]: Whom or What Does the Representative Individual Represent? Journal of Economic Perspectives, 6, 117–136. o.

LOVELL, M. C. [1986]: Tests of Rational Expectations Hypotheses. American Economic, 76, 110–124. o.

SAMUELSON, P. A. [1958]: An Exact Consumption–Loan Model of Interest with or without the Social Contrivance of Money. Journal of Political Economy, 66, 467–482. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [1992]: Indexált kölcsönök és várakozások matematikai elemzése. Közgazdasági Szemle, 3. sz. 262–278. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [1994]: Együttélő nemzedékek modellcsaládja. Közgazdasági Szemle, 5. sz. 411–427. o.

SIMONOVITS ANDRÁS [1995]: Együttélő korosztályok modellcsaládja. Közgazdasági Szemle, 4. sz. 358—386. o.

SIMS, C. A. [1986]: Comments. *Sonnenschein* (szerk.) [1986] 37–39. o.

SONNENSCHEIN, H. F. (szerk.) [1986]: Models of Economic Dynamics. Springer, New York.