Közgazdasági Szemle, XLIX. évf., 2002. március (212–234. o.)

WALTER GYÖRGY

VaR-limitrendszer melletti hozammaximalizálás: a kaszinóhatás

A kockáztatott érték (VaR) elterjedésével felmerült az igény, hogy az új eszközt a portfóliókezelők ne csak kockázatelemzésre, hanem a gyakorlatban a vagyonkezelői limitrendszerekben is alkalmazzák, amelyet egy portfóliókezelőnek időről időre be kell tartania. A szakirodalom és az általánosan elfogadott elméletek egy része szerint, ha a portfóliólimiteket kockáztatott értéken (VaR) adják meg, akkor ez az eddig alkalmazott limitrendszerekhez képest – az esetleges számítási nehézségek, pontatlanságok figyelembevételével is – több jelentős előnnyel jár. A VaR gyakorlati alkalmazása során azonban számos probléma adódik. A szerző nem foglalkozik a VaR számítási, becslési hibáival. Azt mutatja be, hogy ha a VaR-számítás módja megfelelő, a valóságos folyamatokat jól tükrözi is, a VaR-alapú limitrendszerek körültekintés nélküli alkalmazásával rendkívül szélsőséges befektetési stratégia alakulhat ki, amely az eredeti befektetői szándékoknak már nem felel meg.

Bevezetés és probléma leírása

VaR-limitrendszer alkalmazása a gyakorlatban

A kockáztatott érték *(Value at Risk, VaR)* az úgynevezett alsóági kockázatmérő eszközök[1] csoportjának legnépszerűbb tagja. A VaR mint kockázati mérőszám elterjedésével felmerült az igény, hogy az új eszközt a portfóliókezelők számára mint kockázatot korlátozó mérőszámot alkalmazzák, amelyet egy portfóliókezelőnek időről időre be kell tartania. Korábban – és sok esetben még a mai gyakorlatban is – a portfóliókezelőknek csak valamilyen nominálértékben meghatározott limitet kellett betartaniuk, például nem vállalhattak adott értékű nyitott pozíciónál többet. A VaR népszerűvé válása előtt a limit meghatározásához természetesen más kockázati mérőeszközt is figyelembe vettek, mint például kötvényportfólió esetében a futamidőt vagy kifinomultabb megoldás esetén a maximumduration értékét.

A szakirodalom és az általánosan elfogadott elméletek egy része szerint, ha a portfóliólimiteket VaR-értékben adják meg, akkor ez több jelentős előnnyel jár. A limitmeghatározás egy könnyen érthető, általános kockázati mérőszám függvényévé válik, amely egyfajta közös nevezőként használható. Összehasonlítható lesz a különböző

[1] *Downside-risk measures:* a nagy veszteség lehetőségét és mértékét tükröző mérőszámok csoportja.

Walter György a BKÁE vállalati pénzügy tanszékének egyetemi tanársegéde.

piacokon kereskedő portfóliók kockázata, például egy részvény- és egy kötvényportfólió-kezelő által vállalt kockázat nagysága.[2]

A VaR segítségével a piacok és ezen belül a részpiacok VaR-limiteit is meg lehet határozni, amely során a diverzifikációt is figyelembe veszik. A menedzserek meghatározzák az összes befektetés kockázatát, majd a VaR-limiteket szétosztják az alapok között a különböző piacok, termékek közötti korrelációk alapján. Adott esetben a kívánatos piacra tudják allokálni a befektetés egy hányadát, miközben pontosabb fogalmat kapnak az összesítet kockázat alakulásáról.

A VaR egy könnyen érthető és értelmezhető kockázati mérőszám, amely azonban számtalan veszélyt hordoz magában. Az indulófeltételek, a paraméterek bizonytalansága, a számítás menete arra vezethet, hogy a számítások eredménye nem a valós világ kockázatát tükrözi vissza, és emiatt tévesen mérik fel a helyzetet, hibás döntéseket hoznak. A cikkben nem foglalkozunk a VaR-számítás módszertani hibáival,[3] a feltételek valós világtól való eltérésével és ennek hatásaival. Mindezek többsége többször tárgyalt és általában inkább módszertani kérdésekre vezető problémák, és ritkábban kapcsolódnak közvetlenül portfóliókiválasztási stratégiákhoz.[4] E problémakör elemzése helyett *egy portfóliókezelő viselkedését, döntési lehetőségeit vizsgáljuk meg VaR-limitrendszer és adott teljesítmény-célfüggvény mellett*. Mint látni fogjuk, a portfóliókezelő által választható *portfóliókiválasztási stratégia még* – induló feltételeiben és módszertanában – *teljesen valósághű és helyes VaR-számítás esetén is súlyos problémákhoz vezethet*.

A probléma leírása

A következőkben olyan stratégiákat vizsgálunk meg, amelynek során alsóági kockázatként a VaR lesz korlátozó feltételként megadva, az alapkezelőnek ezt kell a portfólió-kiválasztás során betartania. *A végső cél, hogy a portfóliókezelő adott VaR-érték figyelembevételével a lehető legnagyobb várható hozamot érje el.* Fontos jellemzője a stratégiáknak, hogy egyik esetben sem kell feltételeznünk a hozam normális eloszlását, sőt, a legfontosabb tulajdonságok és következtetések az aszimmetrikus eloszlás létrejöttéből adódnak.

A következő portfóliókezelési, optimalizálási döntések során *a portfóliókezelő*, mindvégig adott nagyságú induló összeget felhasználva, *a portfólió hozamának eloszlását próbálja úgy megváltoztatni, hogy a befektetés várható hozama növekedjen, de közben a kockázat mértéke, amelyet a VaR mér, ne emelkedjen*. Mivel nyilvánvalóan ezekben az esetekben nem normális eloszlású portfóliókról van szó, így a gyakorlati portfóliókiválasztás során *derivatívok használatát is figyelembe kell vennünk*, amely a csak alaptermékből (részvényből, indexből) előállítható portfólió hozamát aszimmetrikussá képes tenni a befektető szándéka szerint. Elméleti és bemutató célból készített példák esetén ennél általánosabban is fogalmazhatunk majd. Ekkor nem derivatívokról beszélünk, hanem Arrow–Debreu-papírok jelenlétéről, amelyekkel bármely értékpapír, derivatíva is előállítható.

Szeretnénk hangsúlyozni: ezen portfóliókiválasztási döntések során azt feltételezzük, hogy a befektető hasznosságfüggvényét pontosan nem ismerjük, a megadott kritériumok alapján csak azt tudjuk, hogy a minél magasabb várható hozamot kedveli, de tart a nagy veszteségtől, ezért alsóági kockázati korlátokat állít a portfóliókiválasztás elé.

[2] Lásd például RiskMetrics™ vagy *Jorion* [1996].

[3] A VaR-elemzés veszélyeivel, hibáival, kritikájával részletesen foglalkozik például *Beder* [1995], vagy *Jorion* [1996].

[4] Néhány e csoporthoz tartozó egyszerűbb, kifejezetten portfóliókiválasztási döntésekben, portfóliókezelésben felmerülő esetet tárgyal *Ju–Pearson* [1999] és *Lucas–Klaassen* [1998].

Hozamgarancia-kritérium melletti hozammaximalizálás: kaszinóhatás

A befektető ebben az esetben úgy határoz, hogy *portfóliójának egy adott hozamszintet mindenkor el kell érnie, tehát egy abszolút vagy relatív értelemben vett hozamgarancia mellett keresi a legmagasabb várható hozamszintet* produkáló befektetést. A hozamgarancia azonban nem más, mint egy szélsőséges VaR-korlát, 0 százalékos valószínűséggel hozhat a portfólió kisebb hozamot, mint a hozamgarancia nagysága. A befektető tehát *egy speciálisan megfogalmazott VaR-korlát mellett szeretné maximalizálni befektetésének várható hozamát*.

A garantált hozamok és a várható hozam közötti dilemmát és az ebből levezethető úgynevezett kaszinóhatás jelenségét *Dert–Oldenkamp* [2000] elemzi részletesen.[5] A következőkben bemutatott elemzést és ebből levonható következtetéseiket prompt és opciós piacon végzett empirikus vizsgálatokkal is alátámasztották.

Dert–Oldenkamp [2000] azt az optimalizálási kérdést veti fel, hogy amennyiben egy portfóliókezelő egy minimális portfólióérték követelményével (alsó hozamkorláttal) szembesül, amely alá portfóliójának értéke (hozama) adott periódus alatt nem csökkenthet, akkor hogyan tudja a rendelkezésre álló vagyonát úgy befektetni, hogy a portfólió várható hozama a lehető legnagyobb legyen. A rendelkezésre álló befektetési eszközök: kockázatmentes eszköz, részvényindex (-portfólió), a részvényindexre vonatkozó különböző kötési árfolyamú európai vételi és eladási opciók.[6] Általánosan megfogalmazva: a portfóliókiválasztási problémát a következő sztochasztikus optimalizálás feladatként lehet felírni (*Dert–Oldenkamp* [2000] 7. o.):

$$
\begin{aligned}
& ye^{\mu T} + ze^{r_f t} + x_c\alpha_c + x_p\alpha_p \to \max(y, z, x_c, x_p) \\
& x_p p + x_c c + yS + z \le 1 \\
& V(S, x_p, x_c, y, z) \ge \theta \qquad \forall S \ge 0 \\
& x_p, x_c \in R^n, \qquad y, z \in R,
\end{aligned}
$$

ahol:

y: az alaptermékbe (indexbe) fektetett összeg nagysága;
z: a kockázatmentes eszközbe fektetett összeg nagysága;
x_c, x_p: az alaptermékre vonatkozó call és put opciók mennyisége;
p_i, c_i: i kötési árfolyamhoz (K_i) tartozó put és call opció árai;
μ: az alaptermékindex várható hozama;
r_f: kockázatmentes hozam;
α_{pi}, α_{ci}: az i kötési árfolyamú put és call opció várható kifizetése;
$S(t)$: az alaptermékindex aktuális értéke;
θ: a kifizetésgarancia értéke;
$V(S$, portfólió$)$: portfóliókifizetése az index (S) alakulásának függvényeként.

Mint látható, a feladat sztochasztikus jellege a várható kifizetés felírásából adódik, a kifizetés értéke az opciók miatt az alaptermék (index) változása szerint alakul. Mivel ez nehézzé tenné az optimalizálási probléma megoldását, így ezt a feltételt újra kellett fogalmazni. Ennek során az opciók azon tulajdonságát lehet kihasználni, miszerint az opciók lejáratkori értéke az index értékének lineáris függvénye. Ennek alapján csak azt kell biztosítani, hogy a portfólió kifizetésfüggvénye az egyes kötési árfolyamoknál, valamint a legnagyobb kötési árfolyam felett és a legkisebb kötési árfolyam alatt a garantált kifize-

[5] A kaszinóhatás definícióját lásd később.

[6] Ezzel gyakorlatilag egy, a valóságban is létező befektetési eszközcsoportot, úgynevezett garantált hozamú eszközöket *(garanteed return products)* állítunk elő szintetikusan, alaptermékrészvényekből, kockázatmentes befektetésből és derivatívokból.

tési szintnél magasabban legyen. Ezen újabb feltételekkel lehet helyettesíteni az eredeti $V(S,x_p,x_c,y,z) \geq \theta$ feltételt. Így az optimalizálási probléma átírható lineáris programozási problémává, amelyet standard lineáris programozási szoftverekkel már meg lehetett oldani.[7]

Konkrét piaci adatokat felhasználva, az optimalizálás meglepő eredménnyel járt. Az *optimális portfólió a minimális kifizetést biztosító kockázatmentes eszközből és a legmagasabb kötési árfolyamú vételi opcióból áll*. Annyit kell kockázatmentes eszközbe fektetni, hogy biztosítva legyen az adott hozam-, illetve kifizetésgarancia. Minden megmaradt pénzösszegből a leginkább OTM vételi opciót kell vásárolni.[8] Ez annyit jelent, hogy amennyiben az alaptermékindex a legnagyobb kötési árfolyamnál magasabb, akkor az opciókat lehívják, és így hatalmas hozamot lehet realizálni. Ennek a valószínűsége azonban kicsi, nagy valószínűséggel a vételi opciók értéktelenek lesznek, a portfólió kifizetése egyszerűen a kockázatmentes befektetés kifizetésével és hozamával, vagyis a hozamgarancia értékével lesz egyenlő. A stratégia akkor sem változik, ha a minimális hozamszintet változtatják, az optimális stratégia mindig a kockázatmentes befektetés és legmagasabb kötési árfolyamú vételi opció kombinációja lesz.

Érzékelhető, hogy ez *a befektetési stratégia, bár a legnagyobb várható hozamot biztosítja, egy szerencsejátékhoz hasonlító szélsőséges befektetési viselkedést tükröz*. *Biztosítjuk a lehető legkisebb költséggel, hogy portfóliónk a hozamminimum követelménynek eleget tegyen, majd minden maradék pénzünket a legnagyobb várható hozamú, ám csekély valószínűséggel bekövetkező értékpapírba, jelen esetben opcióba fektetjük*. Ezt a jelenséget nevezték el *kaszinóhatásnak (Casino effect)*.

Mindeddig csupán arra szorítkoztunk, hogy *Dert-Oldenkamp* [2000] munkája alapján egy empirikus vizsgálat és erre épülő optimalizálási feladat eredményének bemutatásával jellemeztük a kaszinóhatás feltételeit és tulajdonságait. A következőkben, saját levezetésünket és modellünket követve, ugyanezt a problémát véges számú világállapotok és Arrow–Debreu-papírok feltételezésével mutatjuk be és elemezzük tovább. Ez az elemzési módszer a későbbiekben többször visszatér, és nem csak a hozamgarancia-kritérium vizsgálatakor lesz nélkülözhetetlen.

Az alábbi, *piacra vonatkozó feltételekkel* élünk:

– egy pozitív piaci kockázattal rendelkező értékpapírnak n darab lehetséges periódus végi realizációja lehetséges (n darab világállapot),

– a véges számú világállapotok ugyanolyan valószínűséggel (q) következnek be,[9]

– a piac teljes, az n darab világállapothoz létezik n darab Arrow–Debreu-papír és egy olyan világállapot árvektor (p, valamint az i-edik Arrow–Debreu-papír ára p_i $i=1, \ldots, n$), amely segítségével minden derivatív értékpapírt árazni lehet.

A *befektetőről* csak azt tudjuk, hogy

– W_0 költségkorláttal szembesül,

[7] A pontos és empirikus számítások elvégzésére is alkalmas optimalizálási probléma megtalálható: *Dert–Oldenkamp* [2000] 8. o. A szerzők az A.1. Appendixben bemutatják az általuk vizsgált stratégia során jelentkező kaszinóhatás szükséges feltételeit is.

[8] Érdekes, hogy az optimális portfólióban nem szerepel az alaptermék-részvényindex. A kockázatmentes eszköz plusz vételi opció nagyobb várható hozamot ígér, mint a legkedvezőbb put opciós stratégia, amely során megveszünk adott mennyiségű indexet és a legmagasabb kötési árfolyamú eladási opciót. A konkrét adatokhoz lásd *Dert–Oldenkamp* [2000].

[9] Hasonló elemzésekben és bizonyításokban azt, a vizsgálatot megkönnyítő, speciális, ám a végeredmény általánosságát nem gyengítő esetet szokták bemutatni, amikor az egyes világállapotok bekövetkeztének valószínűsége egyforma. (Vö. *Dybvig* [1988], amely e témával részletesebben foglalkozik az Appendixben, és amely elemzésének módszertanából nagyon sok elemet átvettünk, de mindezek alapján hasonlóan elemez *Dert–Oldenkamp* [2000] és Vorst [1999].). Ezt a feltételt vesszük át mi is.

– úgy kívánja allokálni vagyonát az n darab Arrow–Debreu-papír között, hogy befektetése várható hozamát maximalizálja,

– amellett a korlátozó feltétel mellett, hogy befektetésének periódus végi kifizetése soha nem kisebb, mint θ érték.

A piacra vonatkozó feltételekből levezethető, hogy amennyiben egy értékpapír piaci kockázata pozitív, akkor a világállapotárak és a világállapot-sűrűség $\left(\frac{p_i}{q}\right)$ – az értékpapír árfolyam-alakulását tekintve – a felsőbb világállapotok felé haladva (1-től n-ig) monoton csökkenő. Ebben az esetben belátható, hogy a világállapot-sűrűséggel $\left(\frac{p_i}{q}\right)$ a papírok várható hozama $\left(\frac{1-p_i}{p_i}\times q = \frac{q}{p_i} - q\right)$ fordítottan arányos, vagyis a legfelső világállapothoz tartozó Arrow–Debreu-papír (n-edik) várható hozama a legnagyobb, míg a legalsó világállapothoz tartozó Arrow–Debreu-papír várható hozama a legkisebb.

Most már *meg tudjuk határozni, hogy milyen Arrow–Debreu-papírokból álló befektetés hozza a befektető számára a legmagasabb várható hozamot adott kifizetés garancia mellett*. Minden világállapot bekövetkeztekor mindenképpen kapnia kell θ nagyságú kifizetést, ezért *minden Arrow–Debreu-papírból vásárolnia kell θ mennyiséget*. Ahhoz, hogy a befektetés várható hozama a legnagyobb legyen, *a maradék összeget* $\left(W_0 - \sum_{i=1}^{n} \vartheta \times p_i\right)$ *a legnagyobb várható hozamú Arrow–Debreu-papírba kell fektetni*, *amely* – pozitív piaci kockázat esetén – *a legfelsőbb világállapothoz tartozik*.

Végül a stratégiát tekintve, ugyanarra a következtetésre jutottunk, mint *Dert–Oldenkamp* [2000] empirikus elemzésükben. Biztosítani kell a hozam-, kifizetésgaranciát, majd a maradék pénzösszeget egyetlen, a legnagyobb várható hozamú befektetésbe (legnagyobb kötési árfolyamú vételi opcióba, illetve a legfelsőbb Arrow–Debreu-értékpapírba) helyezzük.[10]

A fejezetben említett optimalizálási probléma megoldásával kapott portfóliók tehát *szélsőséges stratégiához vezettek*, amely a befektető számára a gyakorlati életben nem feltétlenül kívánatos. Nem minden befektető kedveli az ilyen szélsőséges hozameloszlást, még akkor sem, ha ennek a legnagyobb a várható hozama, ezért lehet, hogy a kaszinóhatást korlátozni próbálja. Ez azonban minden esetben a várható hozam csökkenésével jár. A probléma abban rejlik, hogy *nem elégséges módon definiáltuk a befektetők preferenciáit a kaszinóhatás korlátozásához*, és újabb feltételek megadására van szükség. E kérdésről és a további módosítási lehetőségekről a későbbiekben még szó lesz.

[10] Egy pillanatra visszatérve *Dert–Oldenkamp* [2000] kutatásához, végül bemutatható, hogy a kaszinóhatás nemcsak a garantált hozamú befektetési stratégiák esetén jelentkezik, hanem általánosítható egy optimalizálási feladatcsoportra is. Akkor is hasonló viselkedést tapasztalunk, amikor adott költségkorlát mellett olyan optimális portfóliót keresünk, ahol portfóliónknak egy adott várható hozamszintet meg kell haladnia, miközben hozamkorláttal definiált alsóági kockázatot minimalizálni szeretnénk. Mindezt *Dert–Oldenkamp* [2000] az általunk is feltételezett piac, véges számú világállapotok, Arrow–Debreu-papírok és csökkenő világállapot árak feltételezésével mutatja be.

Általános VaR-korlát melletti hozammaximalizálás

A kaszinóhatás ismételt megjelenése

A hozamgarancia melletti befektetések során tapasztalt *jelenséget* megvizsgálhatjuk *kevésbé szigorú VaR-korlát melletti hozammaximalizáló döntések esetében is*.[11] Mivel ez általánosabb eset, és aktuális, nagy jelentőségű menedzsment problémához vezet, így érdemes lesz egy kicsit továbblépve a tulajdonos–alapkezelő közötti érdekkonfliktust is elemezni. Ekkor látni fogjuk, hogy nemcsak a limitrendszer megfogalmazásakor kell körültekintőnek lenni, hanem óvatosan kell bánni a prémiumrendszerrel is, hiszen ez az alapkezelő oldaláról erősítheti a kaszinóhatás előidézését.

Először tekintsük a következő *optimalizálási problémát! Milyen stratégiát folytat a portfóliókezelő, ha azt a feladatot kapja, hogy maximalizálja portfóliója várható hozamát, ugyanakkor tartson be egy adott konfidenciaintervallum melletti VaR-limitet*?[12]

Az optimalizálási probléma megoldásához és elemzéséhez ismételten az előzőkben, a hozamgarancia melletti optimális stratégia igazolásához használt elméleti keretet (pozitív piaci kockázatú értékpapír, teljes piac, Arrow–Debreu-papírok, azonos valószínűségekkel bekövetkező világállapotok, csökkenő világállapotárak stb.) használjuk fel. Ezeket a piacra vonatkozó feltételeket újra nem soroljuk fel, csak az új portfóliókiválasztási problémát elemezzük a megadott keretek között.

A korábbi feltételekkel szemben a *befektetőről* most azt tudjuk, hogy

– W_0 költségkorláttal szembesül,

– úgy szeretné allolkálni vagyonát az n darab Arrow–Debreu-papír között, hogy befektetése várható hozamát maximalizálja,

– amellett a korlátozó feltétel mellett, hogy befektetésének kifizetése adott β valószínűséggel (β konfidenciaintervallum mellett) soha nem kisebb, mint θ érték.

Az általános VaR melletti optimalizálás feltétele tehát a hozamgaranciánál enyhébb követelményeket fogalmaz meg, amely a várható hozamot tovább növelheti. Nekünk az is elég, ha a befektetés nem 100 százalék, hanem csak β valószínűséggel eredményez a garantált kifizetésnek megfelelő, vagy e feletti jövedelmet. Ez annyit jelent, hogy nem szükséges néhány világállapothoz tartozó Arrow–Debreu-papírokba fektetnünk mindaddig, amíg ezek kumulált valószínűsége el nem éri az $(1-\beta)$ szint értékét.

Azt már korábban bemutattuk, hogy a legfelső (n-edik) világállapothoz tartozó Arrow–Debreu-papír várható hozama a legnagyobb, míg az alsó világállapothoz közelítve (n-től 1-ig) az Arrow–Debreu-papír várható hozama monotonon csökken. Akkor tudjuk a befektetés várható hozamát a lehető legnagyobb mértékben – a hozamgarancia melletti optimális befektetéshez képest – tovább növelni, ha a befektetésből azokat az Arrow–Debreu-papírokat hagyjuk ki, amelyek a legkisebb várható hozamot ígérik. Ezek az alsó világállapotokhoz tartozó Arrow–Debreu-papírok, a legalsóval kezdve mindaddig nem fektetünk be e papírokba (1-től k-ig), amíg az így kihagyott világállapotok kumulált valószínűsége az $1-\beta$ szintet el nem éri. Ahhoz, hogy a befektetés várható hozama a legnagyobb legyen, az így megtakarított összeget $\left(\sum_{i=1}^{k} \vartheta \times p_i\right)$ a legnagyobb várható ho-

[11] A Dert–Oldenkamp szerzőpáros a hozamgarancia-kritérium körülményeit kutatta és elemezte, ugyanakkor a portfóliókiválasztás, hozammaximalizálás kérdését nem vizsgálta például VaR-korlát mellett.

[12] A VaR-alapú hozammaximalizálás és a kaszinóhatás kapcsolatának problémájáról szóló publikációról jelenleg nem tudunk. A kérdésről egy párizsi kockázatkezelési konferencián *Ton Vorst* tartott előadást, a téma publikációja a professzor értesítése szerint még nem történt meg. Saját elemzésünkben Vorst professzor alapvető kérdését és az ezt illusztráló Arrow–Debreu-értékpapírok eszközrendszerét átvettük, és így vizsgáltuk tovább a fent említett optimalizálási feladatot.

zamú Arrow–Debreu-papírba kell fektetni (összesen $W_0 - \sum_{i=k+1}^{n} \vartheta \times p_i$), amely – pozitív piaci kockázat esetén – a legfelsőbb világállapothoz tartozik.

Így már meg tudtuk határozni, hogy milyen Arrow–Debreu-papírokból álló befektetés hozza a befektető számára a legmagasabb várható hozamot adott VaR-korlát mellett. Néhány világállapottól eltekintve, amelyek bekövetkeztének együttes valószínűsége $1-\beta$, a befektető minden egyéb világállapot bekövetkeztekor mindenképpen kapni fog θ nagyságú kifizetést, a legfelsőbb világállapot bekövetkeztekor pedig egy nagyobb összeget. Mint a következőkben felhasznált számpéldán is látni fogjuk, mindezzel az a probléma, hogy $1-\beta$ valószínűséggel a befektető teljes induló befektetése elveszik, nagy valószínűséggel továbbra is θ kifizetésben részesül, míg a nagy kifizetés valószínűsége elenyésző.

A kaszinóhatás illusztrálása számpéldán

Azért, hogy a probléma súlya, értelmezése világosabb legyen, a kaszinóhatásról és optimális stratégiákról már levont következtetéseket a továbbiakban egy konkrét, bár önkényesen megadott paraméterekkel rendelkező binomiális modellben mutatjuk be. E példát a későbbi kérdések tárgyalásakor is felhasználjuk a problémák illusztrálására.

Feltételezzük, hogy véges számú világállapot van, és minden világállapotra vonatkozó Arrow–Debreu-papírra meghatározhatunk egy világállapotárat. A pozitív piaci kockázattal rendelkező alaptermék binomiális mozgást végez, jelen esetben 10 periódusú mozgást tételezünk fel, ahol a paramétereket úgy állítottuk be, hogy egy periódus egy hétnek feleljen meg. Amennyiben a periódus végére szóló világállapotárakkal dolgozunk, a 10 periódus ellenére a befektetési probléma ebben az esetben is egyperiódusú (10 hetes) befektetési feladattá egyszerűsödik le.

A számpéldában az egyenlő valószínűségek feltétele már nem érvényes. Mint ahogy azonban az elméleti rész 9. lábjegyzetében erre már utaltunk, bár a probléma így egy kicsit bonyolultabbá válik, ez a lényeges következtetéseket és állításokat (várható hozamok és világállapot-sűrűség alakulása, optimális stratégia lényege) nem befolyásolja.

Az indulóparaméterek a következők:

Induló befektetés:	100
– éves szinten az árfolyam-növekedés üteme (u):	+25 százalék
– éves szinten az árfolyam-csökkenés üteme ($d=1/u$):	–20 százalék
– kockázatmentes kamatláb éves szinten (r_f):	0 százalék
– az alaptermék várható hozama éves szinten (μ):	5 százalék
Mindezek alapján számítva:	
– az alaptermék emelkedésének valószínűsége (q) (1 hét alatt):	60,8 százalék
– kockázatsemleges világban az emelkedés valószínűsége (p_u) (1 hét alatt):	49,9 százalék

Mielőtt egy konkrét konfidenciaintervallumot és VaR-értéket adnánk a példánkhoz, nézzük meg, hogy mindezen paraméterek szerint melyek a tízperiódusú binomiális mozgás során kapott eloszlás legfontosabb eredményei, valamint milyen kifizetések jelentkeznének, ha a binomiális mozgást szimuláló alaptermék egy jelenleg 100 egységet érő portfólió lenne. Az *1. táblázat* bemutatja a 11 világállapotot, az ehhez tartozó árakat és valószínűségeket. Az egyszerűség kedvéért nem az összes lehetséges utat tekintjük egy világállapotnak és egy Arrow–Debreu-papírnak, hanem csak a végleges kifizetéseknek feleltetünk meg egy világállapotot, függetlenül, hogy miként jutottunk el az adott kifizetéshez.

1. táblázat
A binomiális eloszlás adatai

Világállapot	Arrow–Debreu-árak	Valós világ eloszlásfüggvénye (százalék)	Világállapot-sűrűség	Kockázatsemleges sűrűségfüggvény (százalék)	Valós világ sűrűségfüggvénye (százalék)	Arrow–Debreu-papírok várható hozama (százalék)	Kifizetés
0.	0,00	0,01	11,74	0,10	0,01	8,5	95,80
1.	0,01	0,14	7,52	0,99	0,13	13,2	96,63
2.	0,04	1,06	4,82	4,45	0,92	19,8	97,46
3.	0,12	4,88	3,09	11,82	3,62	28,5	98,30
4.	0,21	15,27	1,98	20,60	10,38	40,0	99,15
5.	0,25	*34,62*	1,27	24,61	19,35	59,3	100,00
6.	0,20	59,67	0,82	20,42	25,05	97,6	100,86
7.	0,12	81,90	0,52	11,62	22,23	169,1	101,73
8.	0,04	94,84	0,34	4,34	12,94	285,4	102,61
9.	0,01	99,31	0,21	0,96	4,47	460,9	103,49
10.	0,00	100,00	0,14	0,10	0,69	725,1	104,38

A jelenlegi példában a 0. világállapot azt az esetet mutatja, amikor az árfolyam 10 esetben egymás után csökken, a 10. világállapot pedig természetesen a 10 heti növekedésnek felel meg. A második oszlopban látjuk annak a származékos értékpapírnak (Arrow–Debreu-papír) az árfolyamát, amely az adott világállapot bekövetkeztekor 1-et fizet, egyébként 0-át. Ezt a kockázatsemleges valószínűségek, illetve a replikáló stratégia segítségével tudtuk kiszámítani. A következő oszlopokban látható még a valós világban az adott világállapot bekövetkeztének valószínűsége, a világállapot-sűrűségek, illetve az utolsó oszlopban a 100 induló értékű alaptermék-portfólió lehetséges kifizetései. Az *1. táblázatban* az is látható, hogy az árfolyam emelkedésével az egyes Arrow–Debreu-értékpapírok várható hozama is emelkedik, tehát a legnagyobb várható hozammal a 10. Arrow–Debreu-papír rendelkezik.

Amennyiben ezt a 100 értékű portfóliót vásárolnánk meg, akkor a portfóliókifizetés eloszlása a lognormális eloszláshoz közelít, és az eloszlás paraméterei alapján megállapítható, hogy például 1,06 százalék a valószínűsége annak, hogy portfóliónk értéke a 10 hét alatt 98,3-nél kisebb lesz, vagyis, hogy 1,7-nél többet veszítünk, –1,7 százaléknál rosszabb hozamot érünk el. A portfólió előállítási költsége Arrow–Debreu-papírokból természetesen 100, a stratégia során a 10 hétre vonatkozó várható hozam körülbelül 1 százalék *(2. táblázat)*.

A kérdés az, hogy *amennyiben a konfidenciaintervallumot és a VaR-éréket vagy hozamot változatlanul hagyjuk, elő tudunk-e állítani Arrow–Debreu-papírokból egy olyan befektetést*, amely szintén 100-ba kerül, megfelel a fenti alapportfólió tartásából származó VaR-tulajdonságoknak, de *várható hozama magasabb*. Az új befektetés hozameloszlása már biztosan nem hasonlít a normális eloszláshoz, Arrow–Debreu-papírokkal azonban gyakorlatilag bármilyen eloszlású befektetést előállíthatunk.

Kanyarodjunk egy kicsit vissza a korábbi *hozamgarancia melletti optimalizálási példához!* A hozamgarancia-befektetéseknél láttuk: az optimális portfólió az volt, amikor kockázatmentes eszközökkel biztosítottuk, hogy a garantált hozam teljesüljön, és minden maradék pénzt a legkockázatosabb értékpapírba (opcióba) fektettünk. Mint már említettük, ez a feladat megfeleltethető egy speciális VaR-limit alapú optimalizálási kérdésnek,

2. táblázat
Normális eloszlású portfólió eloszlása és hozama

Világállapot	Arrow–Debreu-árak	Valós világ eloszlásfüggvénye (százalék)	Világállapot-sűrűség	Kifizetések	Induló költség Arrow–Debreu-papírokból	Hozamok (százalék)
0.	0,00	0,01	11,74	95,80	0,10	–4,2
1.	0,01	0,14	7,52	96,63	0,96	–3,4
2.	0,04	*1,06*	4,82	97,46	4,34	–2,5
3.	0,12	4,88	3,09	*98,30*	11,62	*–1,7*
4.	0,21	15,27	1,98	99,15	20,42	–0,9
5.	0,25	*34,62*	1,27	100,00	24,61	0,0
6.	0,20	59,67	0,82	100,86	20,60	0,9
7.	0,12	81,90	0,52	101,73	11,82	1,7
8.	0,04	94,84	0,34	102,61	4,45	2,6
9.	0,01	99,31	0,21	103,49	0,99	3,,5
10.	0,00	100,00	0,14	104,38	0,10	4,4

a garantált hozamú befektetés lényegében egy olyan követelmény, amely szerint a portfólió hozama 100 százalékos konfidenciaintervallum mellett nem lehet alacsonyabb, mint az előírt garantált hozam értéke.

Legyen például az a feladat, hogy 100 százalék biztonsággal portfóliónk értéke ne essen 98,3 alá, hanem biztosan ennyit vagy még többet hozzon, de eközben maximalizáljuk a befektetés várható hozamát is. Ez Arrow–Debreu-papírokba történő befektetésekre lefordítva annyit jelent, hogy minden világállapotú Arrow–Debreu-papírból 98,3 darabot kell vásárolni, és a maradék pénzünket a legmagasabb, 10. világállapothoz tartozó, és a legnagyobb várható hozamot ígérő Arrow–Debreu-papírba kell fektetni.

Az *általános VaR melletti optimalizálás feltétele* viszont a hozamgaranciánál enyhébb követelményeket fogalmaz meg, amely a várható hozamot tovább növelheti. Nekünk az is elég, ha a befektetés csak 99 százalék valószínűséggel hoz garantált kifizetés feletti jövedelmet. Ez annyit jelent, hogy nem szükséges néhány árfolyamhoz tartozó Arrow–Debreu-papírokba fektetnünk mindaddig, amíg ezek kumulált valószínűsége el nem éri az (1 – konfineciaintervallum) szint értékét. Amennyiben a *3. táblázatra* tekintünk, látjuk, hogy mindez *a 0., 1., 2. Arrow–Debreu-papírokat érinti* (tudjuk, hogy ezeknek a legkisebb a várható hozamuk)*, e papírokból nem kell 98,3 darabot sem megvásárolni*. Ugyanakkor ahhoz, hogy a várható hozamot a lehető legnagyobb mértékben növeljük*, a felszabaduló összeget a legkockázatosabb és legnagyobb várható hozamú 10. Arrow–Debreu-papírba kell fektetnünk*. A VaR-valószínűséget és az ehhez tartozó hozamkorlátot nem befolyásolja, hogy a 98,3 darabhoz képest mennyivel kevesebbet veszünk a 0., 1., 2. Arrow–Debreu-papírokból. Így akkor tudjuk a várható hozamot a legnagyobb mértékben növelni, ha ezekből egyáltalán nem vásárolunk, és minden ily módon megtakarított összeget továbbra is a legnagyobb várható hozamú papírba fektetjük. *Az így kapott portfólió*, amelyet *3. táblázatban* láthatunk, meglepően nagy, 49,16 százalék hozamot hoz 10 hétre számítva, amely *éves szinten mintegy 800 százalékos tényleges hozamnak felel meg*.

Bár korábban beláttuk, hogy adott VaR-korlát mellett az előző stratégia produkálja a legnagyobb várható hozamot, intuitív módon nehéz belátni, hogy ez valóban így van. Igaz, hogy sok nagyon nagy hozamot ígérő értékpapírt vásároltunk, de annak bekövetkezési valószínűsége nagyon kicsi. *Nem lehet, hogy egy „közepesen” ferde eloszlás* esetén,

3. táblázat
Kaszinóhatás

Világ-állapot	Arrow–Debreu-árak	Valós világ eloszlásfüggvénye (százalék)	Világállapot-sűrűség	Kifizetések Arrow–Debreu-papírok (darab)	Induló költség Arrow–Debreu-papírokból	Hozamok (százalék)
0.	0,00100	0,01	11,74	0,00	0,00	–100,00
1.	0,00993	0,14	7,52	0,00	0,00	–100,00
2.	0,04451	*1,06*	4,82	0,00	0,00	–100,00
3.	0,11819	4,88	3,09	*98,30*	11,62	*–1,70*
4.	0,20596	15,27	1,98	98,30	20,25	–1,70
5.	0,24609	*34,62*	1,27	98,30	24,19	–1,70
6.	0,20420	59,67	0,82	98,30	20,07	–1,70
7.	0,11618	81,90	0,52	98,30	11,42	–1,70
8.	0,04336	94,84	0,34	98,30	4,25	–1,70
9.	0,00960	99,31	0,21	98,30	0,94	–1,70
10.	0,00096	100,00	0,14	7581,02	7,25	7481,02

4. táblázat
Közepesen aszimmetrikus portfólió

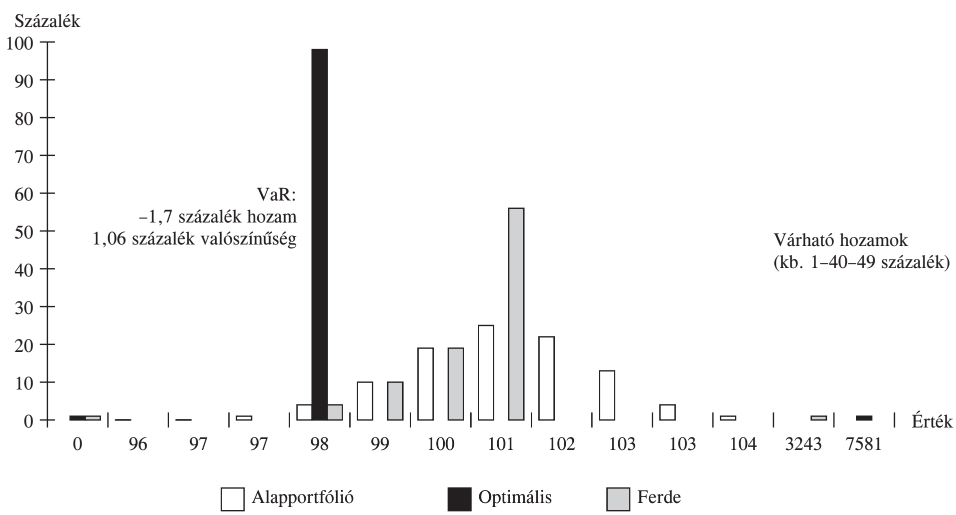
Világ-állapot	Arrow–Debreu-árak	Valós világ eloszlásfüggvénye (százalék)	Világállapot-sűrűség	Kifizetések Arrow–Debreu-papírok (darab)	Induló költség Arrow–Debreu-papírokból	Hozamok (százalék)
0.	0,001	0,01	11,74	0,00	0,00	–100,00
1.	0,010	0,14	7,52	0,00	0,00	–100,00
2.	0,045	*1,06*	4,82	0,00	0,00	–100,00
3.	0,118	4,88	3,09	*98,30*	11,62	*–1,70*
4.	0,206	15,27	1,98	99,15	20,42	–0,85
5.	0,246	*34,62*	1,27	100,00	24,61	0,00
6.	0,204	59,67	0,82	100,86	20,60	0,86
7.	0,116	81,90	0,52	100,86	11,72	0,86
8.	0,043	94,84	0,34	100,86	4,38	0,86
9.	0,010	99,31	0,21	100,86	0,97	0,86
10.	0,001	100,00	0,14	5958,83	5,70	5858,83

amelyben a legmagasabb világállapothoz tartozó Arrow–Debreu-papírba is sokat fektetünk, de más világállapotokhoz tartozó, kisebb hozamot, de nagyobb valószínűséggel ígérő Arrow–Debreu-papírokból is vásárolunk, *magasabb várható hozamot eredményez?* Érdemes egy próbát tenni, egy ilyen portfóliót látunk a *4. táblázatban*. A legalsó világállapotokhoz tartozó Arrow–Debreu-papírokból itt sem vásárolunk semmit, a VaR-követelményeknek ez a portfólió is megfelel, 1,06 százalék a valószínűsége, hogy portfóliónk hozama –1,7 százaléknál rosszabb lesz. Az előző stratégia esetén kicsit több magasabb világállapotú Arrow–Debreu-papírt vásárolunk, végül a maradék pénzünket újra a legmagasabb világállapotú Arrow–Debreu-papírba fektetjük. Ha *kiszámítjuk e befektetés várható hozamát*, 40 százalékot kapunk a 10 hetes periódusra (éves szinten tényleges hozamként számolva mintegy 575 százalék), ami jóval magasabb az alapstratégia hozamánál, de *elmarad a kaszinóhatás során tapasztalt 49 százaléktól*. Ennek az az oka, hogy

5. táblázat
Összefoglaló táblázat a három stratégiáról

Megnevezés	Alapstratégia	Ferde eloszlás (nem optimális)	Optimális portfólió
Várható érték	100,9	140,0	149,2
Várható hozam (százalék)	0,94	39,99	49,16
Szórás (érték)	1,34	486	621
Szórás (hozam) (százalék)	1,3	486	621
Ferdeség	0	36 969	2 847 512 044
VaR (érték)–célérték	98,3	98,3	98,3
VaR (hozam)–célhozam (százalék)	–1,702	–1,702	–1,702
1 – konfidenciaintervallum (százalék)	1,06	1,06	1,06

1. ábra
Az alapportfólió, a ferde eloszlású és az optimális portfólió kifizetésének eloszlásai
(azonos szignifikanciaszint és VaR-hozamok mellett)



a kockázati limit teljesítése után megtakarított pénzünket nem a legnagyobb várható hozamú értékpapírba fektettük.

Nézzük meg a három stratégia legfontosabb jellemzőit egy táblázatban és az eloszlásokat egy diagrammon (*5. táblázat* és *1. ábra*)!

Azt tehát bemutattuk, hogy úgy tudjuk portfóliónk várható hozamát a legjobban megnövelni, ha a VaR-szignifikanciaszinthez tartozó Arrow–Debreu-értékpapírokba nem fektetünk semmit, ezenkívül minden értékpapírból a VaR-értéknek megfelelő mennyiséget vásárolunk, a fennmaradó pénzösszeget pedig a legmagasabb világállapotú és egyben a legnagyobb várható hozammal kecsegtető Arrow–Debreu-értékpapírba fektetjük. Ezzel megint csak a kaszinóhatást írtuk le egy adott portfóliókiválasztási kritérium kapcsán.

Miért jelent ez problémát? Azonnal megértjük, amint a *4. táblázatra* és az *1. ábrára* pillantunk. Bár az eloszlás rendkívül ferde, a VaR-követelmény maradéktalanul teljesül.

Még mindig 1,06 százalék a valószínűsége annak, hogy portfóliónk hozama –1,7 százaléknál kevesebb lesz. Ráadásul az új, optimális portfólió várható hozama az első stratégia 0,94 százalékos hozamánál lényegesen nagyobb, 49,16 százalék lett 10 hétre számítva. A *probléma* csak az, hogy amennyiben a legrosszabb, vagyis az *1,06 százalék valószínűség* jön be, és az alaptermék portfólióértéke lezuhan 98,3 alá, az új stratégiát követve *minden vagyonunkat elveszítjük*, hozamunk –100 százalék lesz. *Nagy valószínűséggel portfóliónk éppen teljesíteni fogja a VaR-követelményeket, és portfóliónk értéke 98,3 lesz, míg csupán 0,69 százalék* a valószínűsége az utolsó, 10. világállapot bekövetkeztének, igaz ez hatalmas hozamot, *7481 százalékot eredményez*. Bár ennek kicsi a valószínűsége, a várható hozam mégis jóval az alapstratégia hozama felett lesz.[13] Egy ilyen *portfóliókezelő*, holott elvileg korlátozták kockázatát, óriási szerencsejátékba kezd, és *akár az egész portfólióját elveszítheti*. Mindez pedig ellentétben lehet az eredetileg kigondolt, a VaR segítségével definiálni próbált befektető preferenciával. Lehet, hogy van olyan befektető, aki vagyonát kockáztatva éppen a kaszinóhatás stratégiáját kedveli, de találunk olyanokat is, akik számára viszont a kialakult hozameloszlás ellentétes az eredeti szándékukkal.

Elméleti szempontból a megoldást azt jelentené, ha találnánk egy olyan univerzális hasznosságfüggvényt, amely a befektetők valóságban tapasztalt aszimmetrikus eloszlásának a paramétereit is magukba foglalja. Ekkor megállapíthatnánk, hogy adott befektetőknek milyen – aszimmetrikus – eloszlás optimális, és vannak-e olyanok, akik számára a kaszinóhatáshoz tartozó stratégia a legnagyobb hasznosságot ígérő. A gyakorlati limitrendszerek kialakításához a pontos, egyéni hasznosságfüggvények integrálására sajnos kevés lehetőség van, csak néhány egyszerűbb célfüggvény és általánoskockázat-korlátozó kritérium megadására van lehetőség. Az alsóági kockázatok és a VaR népszerűségét, valamint limitrendszerben való alkalmazását pontosan a befektetők viselkedésének egyszerű, gyakorlatias módon történő leírása indokolja. Viszont, miképpen ezt a kaszinóhatás vizsgálata során beláttuk, ez közel sem elégséges, *a ferdeség mértékére vonatkozó preferenciákat egyedül a VaR-kritérium megadása alapján csak elégtelen módon lehet megadni*. A preferenciák árnyaltabb meghatározására még visszatérünk a zárófejezetben, amikor pótlólagos korlátokat állítunk be a portfóliókiválasztási folyamatba, most azonban arra keresünk választ, hogy – eltekintve a „VaR – várható hozam" elméleti optimalizálási feladattól – vajon a portfóliókezelőnek mint ügynöknek érdekében áll-e a kaszinóhatáshoz tartozó stratégia előállítása.

A premizálási rendszer hatása

A tapasztalatok alapján a befektető saját vagyonának kockáztatásakor az egész eloszlást és nem csak a VaR-t és a maximális várható hozamot venné figyelembe, és nem valószínű, hogy a végletesen aszimmetrikus befektetést tartaná optimálisnak. A gyakorlatban azonban az alapkezelés legtöbbször ügynökön keresztül zajlik, és a VaR-limitrendszer felállítása is egyfajta ügynök–megbízó szerződés része. A megbízó a limitrendszer, egyéb célfüggvények és prémiumrendszer megfogalmazásával próbálja az ügynököt a számára optimális stratégiára kényszeríteni, így az ügynök, vagyis az alapkezelő viselkedésének elemzését sem kerülhetjük meg.[14] A fentiek alapján felmerül a kérdés, hogy amennyiben

[13] Még a nem optimális, de erősen aszimmetrikus stratégiánk is ugyanilyen veszélyes, ráadásul még kisebb hozamot is ígér. Ha a szélsőséges állapot bekövetkezik, ugyanúgy elveszítjük portfóliónk teljes értékét, mint azt az optimális portfólió tartása során elvesztenénk.

[14] Mindezen körülmények meghatározásakor nem szabad elfelejteni, hogy tapasztalatok alapján a portfóliókezelők, ügynökök inkább saját prémiumrendszerük optimális kifizetést figyelik, semmint az egyéb, a megbízó vagyonát növelő tényezőket.

a megbízó, a központ vagy a kockázatkezelési osztály az alapkezelővel azt közli, hogy a cél a hozam maximalizálása a kiadott VaR-korlát mellett, akkor adott premizálás mellett vajon *érdeke-e az alapkezelőnek a fent bemutatott kockázatos stratégiát vállalnia*. Hangsúlyozzuk, hogy nem az általános ügynök–megbízó problémakört szeretnénk részletezni, ez a tanulmány témájától messze vezetne.[15] Inkább az szeretnénk megvizsgálni, hogy nem erősítik-e a kaszinóhatás létrejöttét az ügynök–megbízó konfliktusra alkalmazott, a portfóliókezelési gyakorlatban szokásosnak mondható megoldások.

Ha a portfóliókezelők csak fix fizetést kapnak, akkor nem valószínű, hogy a kezelő kockáztatná az állását azért, hogy a kiugró várható hozam áraként esetleg elveszítse az alap teljes értékét. Márpedig ez a fenti példában mintegy 1 százalékos valószínűséggel megtörténhet. Ekkor azonban a portfóliókezelőnek különösebb motivációja sincsen a minél magasabb hozam elérésére. Az ilyen típusú ügynökprobléma a közgazdaságtanban és vállalati pénzügyekben gyakran megjelenik különböző formában. Bemutatható, hogy költségek vállalása nélkül a megbízó általában képtelen megoldani, hogy az ügynök, jelen esetben a portfóliókezelő, a lehető leginkább a megbízó érdekében cselekedjen.[16]

Ezek az ügynöki költségek egyrészt magukban foglalják a felügyeleti szabályozás költségeit *(monitoring cost),* amely esetünkben a befektető preferenciáit legjobban tükröző és jól működő limit- és kockázatmérő rendszer kiépítését jelenti. Másrészt *az ügynök számára megfelelő ösztönző rendszereket kell kidolgozni*, hogy saját érdekében is a lehető legnagyobb mértékben a megbízó érdekeit kövesse. A portfóliókezelésben az erre a célra kitalált legegyszerűbb módszer a *teljesítményarányos fizetés*, ennek során a portfóliókezelő az általa kezelt *portfólió hozama után jutalékot kap, egyfajta opciót*. Minél nagyobb hozamot produkál a portfólió, annál nagyobb prémiumot kap az alap kezelője. A viszonyítási alapot lehet abszolút összegben vagy fix hozamként is megadni, de elegánsabb, ha a teljesítményt egy másik eszközhöz, másik portfólióhoz viszonyítjuk, amelyet benchmarkportfóliónak tekintünk.

A következőkben tekintsünk egy egyszerű példát a korábbi optimalizálási feladat paramétereit, alapadatait meghagyva! A modellt annyival egészítjük ki, hogy egy nagyon egyszerű, valamilyen módon megadott viszonyítási hozamszintet tartalmazó prémiumszámítási modellt feltételezünk, amellyel a portfólió kezelőjét motiválják. Legyen a prémiumszámítás képlete a következő:

$$\text{Prémium} = \text{portfólióérték} \times \max\left[(\text{hozam}_{\text{portf.}} - \text{viszonyítási hozam}) \times \text{szorzó};\ 0)\right].$$

Mindez – az egyszerűség kedvéért – egy sikerdíjazáshoz hasonló, egyszerű, végtelen kifizetést is eredményezhető függvény. Amennyiben a portfólió hozama a periódus végén a benchmark hozama felett lesz, akkor a portfólió értékére számított többlethozam egy adott részét (amit a szorzószám határoz meg) a portfóliókezelő jutalékként megkapja. A rendszerben nincs pénzbüntetés, ha tehát a kezelt alap a benchmarkportfóliónál rosszabbul teljesít, a kezelő fizetéséből nem vonnak le, bár hosszú távon elért sikertelenség esetén állása valószínűleg veszélybe kerül. Az ilyen módon megalkotott premizálás a portfóliókezelőt láthatóan ingyen juttatja egyfajta opcióhoz, ahol az alaptermék az általa kezelt portfólió értéke, a kötési árfolyam pedig az előírt hozamszint (vagy a benchmarkportfólió hozama). Ha ennek az opciónak az értéke arányban áll a fix fizetéssel és a teljes fizetésnek szánt összeggel, valamint összhangban van a monitoringrendszer működésével, akkor nincs is különösebb probléma.

[15] Mint látható lesz majd, bár az elemzés során számos újabb és újabb kérdés merül fel, e cikk keretében mindegyiket megválaszolni nem lesz lehetőség. Ez majd egy későbbi tanulmány feladata lesz.

[16] Sőt, a következőkben felsoroltakon kívül, esetenként magánál az ügynöknél is felmerülnek ügynöki költségek *(bonding costs)*. Lásd *Jensen–Meckling* [1976].

Tekintsük meg, hogy önkényesen megadott paraméterek esetén a 10 hetes modellünkben milyen eredményt kapunk! Legyen

– a portfólió értéke: 1 milliárd forint,
– a viszonyítási hozamszint (éves szinten): 5 százalék,
– a szorzó: 5 százalék.

Minden további paraméter, amelyet korábban a 10 hetes modellben alkalmaztunk, változatlan marad, továbbra is egy 10 hetes periódust vizsgálunk. Amennyiben a portfóliókezelőnek sikerül egész évre számítva 5 százaléknál magasabb hozamot elérnie, természetesen betartva az adott VaR-limiteket, akkor ez százalékpontonként a várakozáson felül 10 millió forint többletet jelent az alapnak, ebből ő jutalékként 500 000 forintot kap.[17]

Amennyiben a portfóliókezelő az alapstratégiát folytatja, és nem megy bele a kaszinóhatást előidéző kockázatos stratégiákba, akkor a prémium eloszlása a *6. táblázatban* látható módon alakul.

A stratégia során kapható várható prémium értéke kerekítve 264 000 forint, szórása szintén kerekítve 384 000 forint.[18] Amennyiben várhatóan a piaci hozamot sikerül teljesíteni, a mintegy 264 000 forint várható értékű prémium nem tűnik túlzott értékű juttatásnak.

A következőkben azonban tekintsük meg, hogy milyen várható prémium jelentkezik akkor, ha a portfóliókezelő a kaszinóhatásnak megfelelő stratégiát választja *(7. táblázat)*.

A prémium várható értéke mintegy 26 millió forint, ami hatalmas összeg az előző stratégia prémiumához viszonyítva, azonban szórása is óriási, mintegy 310 millió forint, ez a szélsőségesen nagy hozam és prémium (majd 4 milliárd forint) lehetősége miatt alakult így. Azonnal hozzá kell tennünk, hogy mindez nem jelenti még szükségszerűen, hogy a második stratégia a portfóliókezelő számára kívánatosabb lenne. Mivel a két prémium eloszlása teljesen eltér egymástól, így csak a várható értékük és szórásuk alapján még nem tudjuk eldönteni, hogy a portfólió kezelője melyiket részesítené előnyben.

Mindehhez *értékelni kellene a prémiumrendszer egészét*, vagyis azt a származékos terméket, amelyet a cég motivációs célokból adott alapkezelőjének. Ehhez a modellünkben minden eszköz a rendelkezésünkre áll, a piac teljes, a származékos eszköz alapterméke az alapportfólió, és ismerjük valamennyi világállapothoz tartozó Arrow–Debreu-papír árát is. Ahhoz, hogy a két premizálási rendszer értékét mint egy származékos termék árát meghatározzuk, a kifizetések vektorát meg kell szorozni az Arrow–Debreu-papírok árvektorával. A számítást elvégezve, azt kapjuk, hogy az *alapstratégiához tartozó prémiumopció értéke kerekítve 96 ezer forint, míg a kaszinóhatáshoz tartozó prémiumopció mintegy 3,5 millió forintot ér*!

Mindez azonban már tényleg azt mutatja, hogy a prémiumrendszer értéke az alapstratégia megváltoztatásával óriási mértékben megnövelhető, és arra motiválhatja az alapkezelőt, hogy mindezt meg is tegye. Ráadásul, amennyiben a piac teljes, és a rövidre eladást is engedélyezzük, *a portfólió kezelője ezt a 3,5 millió forintot biztosan meg is szerezheti*. Mindehhez el kell adnia Arrow–Debreu-papírokból szintetikusan előállítva a prémiumrendszer által megteremtett származékos terméket, egyszerűen fogalmazva: a piacon értékesíti ingyen kapott opcióját. A konkrét számpéldára visszatérve, amennyiben rövidre elad 3 740 041 ezer darab legfelső világállapothoz tartozó 10. Arrow–Debreu-értékpapírt, azonnal megkapja ennek ellenértékét, a mintegy 3,5 millió forintot. Amennyiben ez a világállapot teljesül, akkor vissza kell visszavásárolnia az Arrow–Debreu-papí-

[17] Ne felejtsük el, a kockázatmentes hozamot 0 százaléknak vettük.

[18] A pontos, nem kerekített várható értékek és szórások egy későbbi összefoglaló táblázatban *(8. táblázat)* megtekinthetők.

6. táblázat
Az alapstratégia prémiuma
(1 milliárd forint értékű portfólió esetén)

Világ-állapot	Arrow–Debreu-árak	Kifizetések (ezer forint)	Hozam (százalék)	Prémium (ezer forint)
0.	0,00	957 995,48	–4,20	0,00
1.	0,01	966 252,80	–3,37	0,00
2.	0,04	974 581,30	–2,54	0,00
3.	0,12	982 981,59	–1,70	0,00
4.	0,21	991 454,28	–0,85	0,00
5.	0,25	1 000 000,00	0,00	0,00
6.	0,20	1 008 619,38	0,86	0,00
7.	0,12	1 017 313,05	1,73	394,31
8.	0,04	1 026 081,66	2,61	832,74
9.	0,01	1 034 925,85	3,49	1274,95
10.	0,00	1 043 846,26	4,38	1720,97

7. táblázat
Az optimális stratégia prémiuma
(1 milliárd forint értékű portfólió esetén)

Világ-állapot	Arrow–Debreu-árak	Kifizetések (ezer forint)	Hozam (százalék)	Prémium (ezer forint)
0.	0,00	0	–100,0	0
1.	0,01	0	–100,0	0
2.	0,04	0	–100,0	0
3.	0,12	982 982	–1,7	0
4.	0,21	982 982	–1,7	0
5.	0,25	982 982	–1,7	0
6.	0,20	982 982	–1,7	0
7.	0,12	982 982	–1,7	0
8.	0,04	982 982	–1,7	0
9.	0,01	982 982	–1,7	0
10.	0,00	75 810 246	7481,0	3 740 041

rokat, viszont erre fedezetet nyújt a megkapott prémium összege. Ha nem a 10. világállapot teljesül, és ennek van nagyobb valószínűsége, akkor nem kap prémiumot, viszont értéktelen lesz a 10. Arrow–Debreu-papír, így a visszavásárláshoz nem kell pénz. Összehasonlítva a 96 ezer forinttal, ekkor már néhány alapkezelő joggal úgy vélheti, hogy 10 hét alatt megkapott biztos 3,5 millió forintért már érdemes azt kockáztatnia, hogy 1 százalékos valószínűséggel biztosan elbocsássák állásából.

A két stratégia prémiumszámításának legfontosabb adatait a *8. táblázat* mutatja összesítően. Bár erről most nem beszéltünk, harmadik stratégiaként a táblázatban szintén bemutatjuk a korábban tárgyalt köztes, aszimmetrikus, de nem optimális portfólió során kapott prémiumok számításainak eredményét is.

Az eredményt az is csak kismértékben befolyásolja, ha a portfóliókezelőnek nem egy fix hozamszint felett, hanem egy adott benchmarkportfólió hozamánál kell jobban teljesítenie. Amennyiben példánkban a benchmarkportfólió maga az alapportfólió, akkor természetesen semmilyen motiváció sem marad a passzív stratégia folytatásához, hiszen

8. táblázat

Prémiumok a különféle stratégiák mellett (forint), fix benchmarkhozam mellett (5 százalék)

Megnevezés	Alap-stratégia	Ferde eloszlás (nem optimális)	Optimális portfólió
A prémium várható értéke	264 324	20 319 296	25 946 235
A prémium szórása	384 202	243 107 280	310 429 980
A prémiumpozíció értéke	95 833	2 799 513	3 574 770

9. táblázat

Prémiumok különféle stratégiák mellett (forint), a benchmarkportfólió hozamához viszonyítva

Megnevezés	Alap-stratégia	Ferde eloszlás (nem optimális)	Optimális portfólió
A prémium várható értéke	0	20 307 357	25 934 296
A prémium szórása	0	242 964 437	310 287 137
A prémiumpozíció értéke	0	2 797 868	3 573 125

ekkor a prémium értéke 0 lesz. A szélsőséges stratégiák esetén az előző premizálási rendszerhez képest az új eredményekben az eltérés elenyésző, szinte ugyanolyan magas marad. Az összefoglaló *9. táblázat* a benchmarkportfólió alkalmazását mutatja.

Hangsúlyozzuk, hogy *a probléma nem a prémium, az ingyen adott opció odaítélésével van*. Motivációs célokból ahhoz, hogy az alapkezelőt, a menedzsmentet a befektető a maximális teljesítményre – ez esetben maximális hozamra – ösztönözze, szükség van a teljesítményen alapuló prémium, kifizetés odaítélésére. Látjuk azonban, hogy *ennek formájával, mértékével óvatosan kell bánni, és differenciálni kell adott terméktől, piactól, kockázati definíciótól függően*. Amennyiben a befektetés eloszlását az alapkezelő nem tudja jelentősen aszimmetrikussá tenni – tegyük fel a derivatívák használata korlátozott, vagy egyéb kötöttségek akadályozzák a szabad befektetés választásban –, akkor például a fenti premizálási rendszer nem vezet aránytalansághoz. Amennyiben szélsőséges pozíciók vállalása is engedélyezett, akkor ugyanez a premizálás ugyanolyan értékű portfólió esetén már csődöt mond, de legalábbis kísértést jelent a kihasználására. Ekkor az ingyen kapott opció már olyan értékes, hogy előfordulhat, a portfóliókezelőt a motiváló opció lehető legértékesebbé tételére és eladására, vagyis értékének realizálására ösztönzi, amely az eredeti tulajdonosi célkitűzésnek nem felel meg.

Azt feltételezhetjük, hogy a portfóliókezelők saját prémiumrendszerük értékét figyelik, és lehetőség szerint maximalizálják, azt pedig láttuk, hogy a fenti példa alapján a prémiumrendszer értéke rendkívüli mértékben megnőtt. Azt azonban még nem vizsgáltuk meg, hogy a fenti sikerdíjas prémiumrendszer vajon minden esetben ugyanott éri el maximumát, mint amely befektetés esetén a kaszinóhatás előáll.

A következő levezetésekhez térjünk vissza az általános Arrow–Debreu-papírokhoz és n világállapotból álló modellünkhöz! Az egyszerűség kedvéért tegyük föl, hogy a portfóliókezelőnek egyszerűen a várható hozam maximalizálására kell törekednie, VaR-korlát nélkül. A korábbi eredmények alapján kijelenthetjük, hogy a maximális várható hozamú befektetés akkor várható, ha a portfóliókezelő vagyonának egészét a legnagyobb várható hozamú Arrow–Debreu-papírba fekteti, amely (pozitív piaci kockázat esetén) a legmagasabb világállapothoz tartozó Arrow–Debreu-papír. Mi történik akkor, ha mindezt egy, a kifizetéshez kapcsolódó sikerdíjas, lineáris prémiumrendszer egészíti ki? Milyen befektetés esetén érhető el e prémiumrendszer értékének – nem a kifizetésének – a maximuma?

A következő, *piacra és befektetésre vonatkozó feltételekkel és jelölésekkel* élünk.

– Egy pozitív piaci kockázattal rendelkező értékpapírnak [amely egy binomiális mozgást (u, d, μ, r_f) követő S alaptermék] n darab lehetséges periódus végi realizációja lehetséges (n darab világállapot).

– A piac teljes, az n darab világállapothoz létezik n darab Arrow–Debreu-papír és egy olyan világállapot-árvektor (p, valamint az i-edik Arrow–Debreu-papír ára p_i, i = 1, ..., n), amelynek segítségével minden derivatív értékpapírt árazni lehet.

– A befektető W_0 költségkorláttal szembesül.

– A befektető úgy szeretné allokálni a vagyonát az n darab Arrow–Debreu-papír között, hogy befektetése várható hozamát maximalizálja.

– Az x_1, ..., x_n világállapotokhoz tartozó befektetett Arrow–Debreu-papírok darabszáma; $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.

– A befektető prémiumfüggvénye: $G(x)$ = max [($a(x_i - b)$; 0], a, b = konstans.

– A prémiumrendszer értéke: $g(x)$.

Feladat: Milyen világállapot-befektetésnél lesz a prémiumrendszer értéke maximális adott költségkorlát mellett?

A prémium értéke általánosan:

$$\text{a prémiumrendszer értéke} = g(x) = \sum_{i=1}^{n} G_i(x) \times p_i = \sum_{i=1}^{n} \max[a(x_i - b); 0] \times p_i,$$

$$\text{költség} = W_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i \times p_i,$$

ha $x_1, \ldots, x_n \geq b$,

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} [a(x_i - b) \times p_i] = a\sum_{i=1}^{n}(x_i p_i) - a\sum_{i=1}^{n}(bp_i) = aW_0 - ab\sum_{i=1}^{n} p_i,$$

ami konstans érték.

Tegyük fel, hogy x_1-be egyre kevesebbet fektetünk be, a felszabaduló összeget pedig x_n-be tesszük. Az n-edik világállapotba történő befektetés költsége így

$$x_n = \frac{W_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_i}{p_n}.$$

A prémiumrendszer értékét felbontjuk összetevőire:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n-1}\{\max[a(x_i - b); 0] \times p_i\} + a\max\left(\frac{W_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_i}{p_n} - b; 0\right) \times p_n =$$

$$= \max[a(x_1 - b); 0] \times p_1 + \sum_{i=2}^{n-1}\{\max[a(x_i - b); 0] \times p_i\} + a\left(\frac{W_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_i}{p_n} - b\right) \times p_n =$$

$$= \max[a(x_1 - b); 0] \times p_1 + \sum_{i=2}^{n-1}\{\max[a(x_i - b); 0] \times p_i\} + a\left(W_0 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i p_i - bp_n\right).$$

Amíg $x_1 > b$, addig $g(x)$ értéke nem változik.

Ha $0 < x_1 < b$, akkor $g(x)$ értéke $a(x_1 - b) \times p_1$-gyel csökken és $a(\Delta x_1 \times p_1)$-gyel nő. A növekedés mindig nagyobb lesz, mint a csökkenés, a legnagyobb növekedés pedig akkor érhető el, ha $\Delta x_1 = x_1$, vagyis ha x_1-be semmit sem fektetünk.

Hasonló logikával beláthatjuk, hogy $g(x)$ értéke nő, ha $x_1 \dots x_{n-1}$-be fektetett összegeket felszabadítjuk, és x_n-be fektetjük. A kérdés az, hogy melyik legyen az az n-edik világállapot, amelybe ezek szerint kizárólagosan befektetni érdemes, mert maximális $g(x)$-et eredményez.

Ha $x_1 \dots x_{n-1} = 0$, akkor az általános képlet a következő egyenletté egyszerűsödik:

$$g(x) = a(W_0 - bp_n).$$

Mindezek alapján $g(x)$ tehát *akkor maximális*, ha p_n a világállapotárak közül a legkisebb, vagyis *minden pénzünket a legkisebb világállapot árú*, n-edik *világállapotba fektetjük*. Ez (binomiális folyamatot tekintve, u-tól, d-től és r_f-től függően) vagy a legmagasabb, vagy a legalacsonyabb világállapot. Ha $p_u < 0{,}5$, akkor a legmagasabb világállapotba történő, ha $p_u > 0{,}5$, akkor a legalacsonyabb világállapotba történő befektetés eredményez maximális prémiumrendszert. *Ha a VaR-korlátot is bevezetjük, az a végeredmény lényegén nem változtat*, a korábbiakhoz hasonlóan néhány világállapotot üresen kell hagyni, a többi világállapotra vonatkozóan pedig pontosan a VaR-értéknek megfelelő darabszámú Arrow–Debreu-papírt kell vásárolni. Ez természetesen csökkenti az előbb bemutatott szélsőséges befektetéshez tartozó prémiumrendszer értékét, azonban adott VaR-feltételek mellett még mindig az az optimális stratégia, ha a megmaradó összeget a legkisebb vagy a legalacsonyabb (attól függően, hogy p_u kisebb vagy nagyobb, mint 0,5) világállapot árú papírba fektetjük.

Ez az eredmény azonban jelentősen megváltoztatja eddigi következtetéseinket. Azt mutatja, hogy *az a stratégia, amely (akár adott VaR) mellett a várható hozam maximális, nem feltétlenül esik egybe azzal a befektetéssel, amely a prémiumrendszer értékét maximalizálja*.

Ha $p_u < 0{,}5$, akkor a legmagasabb világállapotba történő befektetés (legnagyobb alaptermék-kifizetéshez tartozó) a prémiumrendszer szempontjából is az optimális, ez egybeesik az eddigi következtetéseinkkel. Vagyis azt is megmutatja, hogy a *kaszinóhatás ebben az esetben a prémiumrendszert is maximalizálta*, ami korábbi következtetéseinket megerősítő újabb figyelmeztető jel.

Ha azonban $p_u > 0{,}5$, akkor a *legalsó* (legkisebb alaptermék-kifizetéshez tartozó) *világállapotár a legkisebb*, és az *optimális stratégia* az, ha a portfóliókezelő – a limitrendszert kielégítő befektetésen kívül – *minden megmaradó pénzét ebbe a világállapotba fekteti*. Ez *teljesen ellentétes a várható hozam maximalizálásával*, sőt, a legkisebb várható hozamhoz vezet. Ebben az esetben nem állíthatjuk, hogy az eredeti kaszinóhatás létrejön, még akkor sem, a többi feltétel (hozammaximalizálás, VaR-limitrendszer, teljesítményarányos premizálás) fenn is áll. Ha a portfóliókezelő valóban a prémiumrendszerére összpontosít, akkor *egy újabb kaszinóhatást tapasztalunk*, amikor – bár a VaR-korlátot még betarthatja a portfóliókezelő – a várhatóhozam-kritériummal éppen ellentétesen cselekszik. A portfólió tulajdonsága hasonló a korábbi kaszinóhatáshoz tartozó portfólióhoz. A befektető itt is VaR-valószínűséggel mindent elveszít, nagy valószínűséggel hozza a VaR-limitet, míg kis valószínűséggel nagy hozamot ér el, amely világállapot azonban a legkisebb hozamot hozza valamennyi világállapot közül. A portfóliókezelő tehát legalább akkorát kockáztat kisebb várható hozamért cserébe.[19]

[19] $p_u = 0{,}5$ esetén mindkét szélső megoldás optimális lehet a prémiumrendszer értéke szempontjából, amelyből az egyik a hozammaximalizálás megoldásával is egybeesik.

Mikor viselkedik úgy az alaptermék, hogy $p_u > 0{,}5$? Binomiális esetben könnyen levezethetjük ennek a feltételét:

$$p_u = \frac{1 + r_f - d}{u - d} < 0{,}5$$

$$2(1 + r_f) > u + \frac{1}{u}.$$

A feltételből látszik, hogy ha $r_f = 0$, és $\mu > 0$ akkor a p_u biztos, hogy kisebb, mint 0,5. Ennél összetettebb a dolog, ha $r_f > 0$. Ekkor a volatilitás és a kockázatmentes kamatláb viszonya határozza meg a végső eredményt. Minél nagyobb a volatilitás a kockázatmentes kamatlábhoz képest, annál inkább várható, hogy p_u 0,5 felett lesz.

A fejezet elején az első logikus következtetésünk tehát az volt, hogy a teljesítményarányos premizálás tovább erősíti a kaszinóhatás létrejöttének esélyét. Ez ellentétben lehet az eredeti befektetői preferenciával, ráadásul aránytalanul nagy prémiumértéket adhat a megbízott portfóliókezelőnek, amelyet ő a piacon értékesíthet. Most azonban már látjuk, hogy a helyzet ennél még rosszabb. Adott tulajdonságú alaptermék esetén és sikerdíjas kifizetésnél a prémiumrendszer értékének maximuma nemhogy nem a legnagyobb várhatóhozam-maximalizáló stratégiánál van, hanem pont ellenkezőleg, a portfóliókezelő számára a legkisebb várható hozamú befektetés létrehozása optimális. Eközben a VaR-korlátot is be lehet tartani, és a prémiumrendszer értéke szintén aránytalanul megnő.[20]

A kaszinóhatás korlátozása

Ha a befektetés célja a maximális várható hozam elérése egy alsóági kockázat mellett, akkor megfelelő pénzügyi piacok megléte esetén – mint ahogy ezt a fentiekben bőven kifejtettük – a portfóliókezelőnek lehetősége van a kaszinóhatást előidéző stratégia megvalósítására. Azt is láttuk, hogy ha a portfóliókezelő csak a prémiumrendszerét tekinti, és a hozammaximalizálással nem törődik, akkor is szélsőséges stratégiákhoz juthatunk. Amikor a befektető a kockázatát ily módon korlátozta, láttuk, hogy szokatlanul tág teret adott a szélsőséges teljesítményt nyújtó portfólió kialakítására, amely az eredeti befektetői preferenciáival ütközhet. Így felmerül az igény arra, hogy a *kockázati definíción javítsunk, és megpróbáljuk jobban kifejezni a befektető főként alsóági kockázatra vonatkozó preferenciáit*. Erre természetesen csak akkor van szükség, ha a befektető valóban ódzkodik az ilyen szélsőséges kockázatvállalástól. Ha ez a helyzet, akkor valamilyen pótlólagos feltétel, korlát bevezetésére van igény, amelynek paraméterei a befektető elképzelésétől, kockázatviselési képességétől egzaktabb képet adnak, és az alapkezelőt is ennek megfelelő stratégiára ösztönzik. Korlátozó eszközként számos intézkedés számításba vehető: eszközallokációs korlátozás, derivatív eszközök használatának ellenőrzése, tőkeáttétel szabályozása, átgondolt premizálási rendszer kiépítése stb. Mi egy másik lehetőséget vizsgálunk meg a következőkben: azt elemezzük, miként lehet újabb alsóági kockázati eszközök beépítésével a kaszinóhatáson enyhíteni, a befektetői preferenciákat jobban kifejezni.

Ha *adott hozamgarancia mellett* keressük a maximális várható hozamot, akkor néhány

[20] Újabb kérdésként felmerülhet például, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkezzen a prémiumfüggvény, hogy mindezen jelenségek ne álljanak elő. Milyen következtetések adódnak degresszív és progresszív függvények esetén? Mindez és számos további kérdés már túlmutat a cikken, így ezek megválaszolása csak egy későbbi tanulmány része lehet.

10. táblázat
Pótlólagos kockázati korlátok mellett kapott optimális portfóliók

Megnevezés	Alap-stratégia	Eredeti optimális portfólió	Cond VaR (50)	Cond VaR (80)	Cond VaR (90)	Hozam-garancia (50)	Hozam-garancia (80)	Hozam-garancia (90)
Várható érték	100,9	149,2	131,1	120,6	115,6	129,6	117,8	113,9
Várható hozam (százalék)	0,94	49,16	31,08	20,23	15,64	29,57	17,82	13,90
VaR (érték)	98,30	98,30	98,30	98,30	98,30	98,30	98,30	98,30
VaR (hozam) (százalék)	–1,70	–1,70	–1,70	–1,70	–1,70	–1,70	–1,70	–1,70
1 – konfidencia-intervallum (százalék)	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06	1,06
Hozamgarancia/ Cond VaR (érték)	–	–	50	80	90	50	80	90
LPM_1 (százalék)	0,0100	1, 0450	0,5135	0,195	0,088	0,514	0,195	0,088

befektető számára kedvezőtlen tulajdonságnak számíthat, hogy befektetésük nagy valószínűséggel nagyon alacsony hozamot hoz, éppen csak a hozamgarancia összegét. Ha ez a befektető eredeti elképzelésével nem egyezik, akkor ebben az esetben az eloszlás pozitív ferdeségén kell valamennyit korrigálni. Ezt segíti elő, ha egy újabb, másikfajta valószínűségi korlátot is beiktatunk a befektetési kritériumok közé. Ilyen *pótlólagos korlát* lehet annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott portfólió hozama [$P(r)$] egy adott hozamszintet (k) nem ér el, kisebb vagy egyenlő legyen, mint az előre meghatározott valószínűségi érték (m).

$$P(r \leq k) \leq m.$$

Ha hasonló korlátozó feltételt alkalmazunk, akkor az eloszlás alakját képesek vagyunk befolyásolni, méghozzá nagyobb valószínűséget tudunk rendelni nagyobb hozamú kimenetelekhez, miközben mindez a várható hozamra természetesen negatív hatással van.[21]

Ugyancsak tapasztaltuk az eloszlás végletesen aszimmetrikussá tételét, amikor nem a hozamgarancia-kritériummal, hanem ennél gyengébb feltétellel, *VaR-korláttal találkoztunk*. Az eloszlás ferdesége önmagában még nem biztos, hogy problémát jelent, sőt, a befektetők a tapasztalat szerint kedvelik a pozitívan ferde eloszlásokat. A kellemetlen jelenség abból származik, hogy a végletesen nagy ferdeségnek az az ára, hogy amennyiben bejön a konfidenciaintervallummal megadott szélsőséges esemény, akkor az egész vagyonunkat elveszítjük. Erre a VaR-érték és valószínűség önmagában még nem mutat rá, tehát ha a befektetőnek az ilyen szélsőséges stratégia nem kívánatos, akkor *a kaszinóhatás lehetőségét korlátoznia kell pótlólagos kockázatkritérium beépítésével*. Ez az újabb kritérium egy újabb alsóági kockázati mérőszám megadása lehet, amely a VaR alatti eloszlásra koncentrál, azt próbálja befolyásolni. Megoldásként több lehetőség kínálkozik.

A *legszigorúbb kritérium*, ha – éppen fordítva, mint a hozamgarancia-kaszinóhatásnál – a VaR-limit mellé *egy hozamgarancia-követelményt* is állítunk. Amennyiben a kedvezőtlen, VaR-ral mért esemény bekövetkezik, a veszteség akkor sem lehet nagyobb, mint

[21] Több hasonló korlátozással az eloszlás alakját teljesen át lehet alakítani, például hozamgarancia mellett straddle pozíciót is előállíthatunk.

a *k* hozam (érték). Ezzel megszüntetjük a teljes bukás lehetőségét, az eloszlás ferdesége is gyengül, kevesebb szélsőséges kockázatú, de nagy várható hozamú papírt tudunk vásárolni, ami persze a várható hozam csökkenésével is jár.

Gyengébb kritérium, ha a VaR alatti területre még egy magasabb rendű LPM-mutatót[22] *is megadunk* minimumértékként, amely átrendezve az eloszlás baloldalát, megint csak a szélsőséges esemény bekövetkeztének valószínűségét csökkenti. Hasznosnak ígérkezik például az LPM_1 mutató, amely egyfajta várható eltérést köt ki a VaR-limit értékétől. E mutató hátránya azonban, hogy értéke kevésbé egyértelmű és követhető, a befektető nehezen tudja segítségével elmagyarázni preferenciáit.

Ennél érthetőbb a feltételes VaR (CVaR) kritériumként történő megadása, vagyis az az érték, ami a kedvezőtlen esemény bekövetkeztekor várhatóan realizálódni fog. Ez például a kaszinóhatást eredményező stratégia esetén –100 százalék hozam volt, amennyiben ez a befektető számára elfogadhatatlan, akkor ennél kedvezőbb CVaR-értéket kell megadnia, amely természetesen megint csak a ferdeségen enyhít és a teljes várható hozamon ront.

A következőkben a hozamgarancia-, az LPM_1- és a CVaR-kritériumot beépítjük a portfóliókiválasztási modellünkbe, és így vizsgáljuk ezek hatását. A célunk megint csak az, hogy adott kockázati kritérium mellett – amiből már kettő van – a lehető legnagyobb várható hozamot érjük el. Három különböző értékű (minimum 50, 80 vagy 90 értéket adó portfólió) hozamgarancia, illetve a CVaR mellett is elvégeztük a számolást és átrendezést. Mivel az LPM_1 mutató megadása önmagában nehézkes, így ezt csak a különféle (hozamgarancia, CVaR melletti) stratégiák melletti legnagyobb várható hozamú portfóliók esetében utólag számítottuk ki. Az eredményeket a *10. táblázat* tartalmazza.

Az eredmények igazolták a várakozásokat, valamennyi pótlólagos korlát mellett kapott portfólió várható hozama kisebb, mint a csak Var-limit mellett kapott kaszinóhatást előidéző optimális portfólió hozama. *Minél szigorúbbak a hozamgarancia- vagy CvaR-követelmények, annál kevésbé van lehetőség az eloszlás aszimmetrikussá tételére és a nagy várható hozam elérésére*, de az alsóági, *VaR alatti terület kockázata is rohamosan javul*. Az is látszik, hogy mivel a CVaR egy várható értéket, a hozamgarancia pedig egy biztos értéket ad meg, így a CVaR mellett (azonos szinteket vizsgálva) még nagyobb lehetőség van az eloszlás aszimmetrikussá tételére. Sőt, ha a konkrét világállapotokat megvizsgáljuk, a legfelső világállapotot tükröző Arrow–Debreu-papírba (amelyik várható hozama egyébként a legkisebb) még mindig nem kellett egyik esetben sem befektetni. Mindez azt jelenti, hogy bár sokkal kisebb valószínűséggel (0,01 százalék), de még megtörténhet, hogy az egész vagyonunkat elveszítjük. Érdekes megfigyelni, hogy az alacsony szint melletti CVaR és hozamgarancia kritériuma nagyon hasonló eredményre vezet.

A portfólió hozamának csökkenése és az *eloszlás megváltozása természetesen a prémiumok értékére is hatással van*. A prémium értéke azonban még mindig elég jelentős, legrosszabb esetben, a 90-es hozamgarancia mellett is 1 millió forint körül van. Ez látható a *11. táblázatban* is.

Összefoglalóan megállapítható, hogy pótlólagos kockázati kritériumokat beépítve, a kaszinóhatás szélsőséges eredményén enyhíteni tudunk. Az így felépített limitrendszer

[22] Az LPM (Lower Partial Moment) mutató az alsóági kockázat mérésének egyik eszköze, amely egy *p* eszköz hozamának adott hozamkorláttól való eltérését jellemzi. Képlettel definiálva:

$$LPM_n = \sum_{r_p=-\infty}^{r_T} p_p (r_T - r_p)^n,$$

ahol p_p mutatja annak valószínűségét, hogy a portfólió hozama r_p lesz, r_T jelöli az alsóágon kijelölt minimális hozamkorlát hozamszintértékét, *n* pedig a momentum rendjét mutatja.

11. táblázat

Prémiumok a pótlólagos kockázati korlátok mellett kapott optimális portfóliók esetében
(forint)

1 milliárd forint portfólió mellett	Eredeti optimális portfólió	Cond VaR (50)	Cond VaR (80)	Cond VaR (90)	Hozamgarancia (50)	Hozamgarancia (80)	Hozamgarancia (90)
Fix benchmark							
A prémium várható értéke	25 946 235	16 638 844	11 054 410	8 703 855	15 885 367	9 848 847	7 836 673
A prémium pozícióértéke	3 574 770	2 292 435	1 523 033	1 199 183	2 188 623	1 356 935	1 079 706
Potfólióbenchmark							
A prémium várható értéke	25 934 296	16 626 905	11 042 471	8 695 791	15 873 428	9 836 908	7 824 734
A prémium pozícióértéke	3 573 125	2 290 790	1 521 388	1 216 234	2 186 979	1 355 290	1 078 061

pontosabban tükrözi a befektető preferenciát, igaz, ez egyben egy bonyolult, kevésbé átlátható – pedig a VaR-t éppen egyszerűsége miatt kedvelik – kritériumrendszer kiépítését igényelte.

Végül megjegyezzük, hogy a további kutatások egyik fontos iránya lehet a megfelelő prémiumrendszerek kifejlesztése és elemzése, amely a portfóliókezelőket jobb teljesítményre ösztönzi, ugyanakkor a kaszinóhatást is akadályozza.

Hivatkozások

Banz, R. W.–Miller, M. H. [1978]: Prices for State-Contingent Claims: Some Estimates and Applications. Journal of Business, Vol. 51. No. 4.

Beder, T. S. [1995]: VaR: Seductive but Dangerous. Financial Analysts Journal, szeptember–október.

Dert, C.–Oldenkamp, B. [2000]: Guaranteed Return Portfolios and Casino Effect. Research paper – Erasmus University of Rotterdam, február.

Dybvig, H. P. [1988]: Inefficient Dynamic Portfolio Strategies or How to Throw Away a Million Dollars in the Stock Market. Review of Financial Studies, Vol. 1. No. 1. 67–88. o.

Harlow, W. V. [1991]: Asset Allocation in a Downside-risk Framework. Financial Analysts Journal, szeptember–október.

Jensen, M. C.–Meckling, W. H. [1976]: Theory of the Firm: Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure. Journal of Financial Economics, 3.

Johansson, F.–Seiler, M. J.–Tjarnberg, M. [1999]: Measuring Downside Portfolio Risk. Journal of Portfolio Management, őszi szám.

Jorion, P. [1996]: Risk^2: Measuring the Risk in Value at Risk. Financial Analysts Journal, november–december.

Jorion, P. [1999]: Kockáztatott érték. Panem, Budapest.

J. P. Morgan/Reuters [1996]: Risk Metrics – Technical Document. RiskMetrics™ riskmetrics@jpmorgan.com

Ju, X.–Pearson, N. D. [1999]: Using Value at Risk to Control Risk Taking: How Wrong Can You Be? The Journal of Risk, Vol. 1. No. 2.

Leibowitz, M. L.–Henriksson, R. D. [1989]: Portfolio Optimization with Shortfall Constraints: A Confidence-Limit Approach to Managing Downside Risk. Financial Analysts Journal, március–április.

Leibowitz, M. L.–Kogelman, S. [1991]: Asset Allocation under Shortfall Constraints. Journal of Portfolio Management, téli szám.

Lucas, A.–Klaassen, P. [1998]: Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation. Journal of Portfolio Management, őszi szám.

Rockafellar, R. T.–Uryasev, S. [2000]. Optimization of conditional value-at risk. Journal of Risk, Vol. 2., No. 3.

Vorst, T. [1999]: Developing Strategies for Optimizing Portfolios under VaR Constraints. Előadás jegyzet – Risk Conference, Párizs, április.