

JANECSKÓ BALÁZS

Portfóliószemléletű hitelkockázat szimulációs meghatározása

A kereskedelmi bankok nyereséges működését leginkább veszélyeztető kockázattípus a hitelkockázat, amely nagyon leegyszerűsítve abból fakad, hogy az adósok nem teljesítik a bankkal szemben fennálló kötelezettségeiket. Egy esetleges nem teljesítési esemény következtében a bank tényleges hitelezési vesztesége a minősített kintlevőség kezelése (*work-out*) után válik pontosan számszerűsíthetővé. Felmerül a kérdés, hogy adott időhorizonton (például egy év alatt) és adott valószínűség mellett maximálisan mekkora lehet a bank teljes hitelportfóliójában keletkező veszteség, valamint a kockázat hogyan oszlik meg a különböző szempontok szerint kialakítható részportfóliók között, illetve az egyes hitelek hogyan járulnak hozzá a teljes portfólió kockázatához. A válaszhoz első lépésben egy közgazdasági modellt kell alkotni, amely leírja a vállalatok csődbemeneteli folyamatát, a csődesemények közötti kölcsönhatásokat, illetve a csőd utáni fedezetértékesítési folyamatot. A második lépésben a modell matematikai formalizálása történik meg. Végül pedig a matematikai problémát kell megoldanunk és az eredményeket közgazdaságilag interpretálnunk.

A cikk olyan közgazdasági modellt mutat be, amely rendkívül flexibilis, és számos más – a hitelkockázati problémától nagyon eltérő – feladat megoldásában is hasznos lehet. A kapcsolódó matematikai modell azonban csak nagyon speciális esetekben oldható meg képletekkel, ezért a szerző „kézi számolások” helyett magát a közgazdasági folyamatot (a csődesemények véletlenszerűségét) szimulálta számítógéppel, és így vizsgálta meg a hitelportfóliót érő teljes veszteség statisztikáját.*

Journal of Economic Literature (JEL) kód: C10, C15, G10, G11, G21, G33.

Egy bank hatékony működéséhez elengedhetetlen, hogy tőkeellátottsága közgazdasági értelemben megfelelő legyen, és a tőkét altevékenységei között optimális módon allokálja. Egy bank tőkeellátottsága akkor mondható megfelelőnek, ha a tőkéje egy előre meghatározott biztonsági szinten fedezi az éven belül (vagy egyéb időtávon) várható maximális hitelezési veszteségeket [ez a hitelezési kockázattal érték (*Credit Value at Risk*)].

A biztonsági szintet például úgy lehet meghatározni, hogy a bank rögzíti a saját elérendő hiteladós minősítését (például a Moody's *Aa* minősítését), és ezután megcélozza az ehhez a minősítéshez tartozó vállalattúlélési valószínűséget (például 99,97 százalékot). Ilyen historikus alapú minősítés-túlélési esély táblázatokat olvashatunk például az évente megjelenő Moody's tanulmányban (*Moody's* [2001]).

A tőkeallokáció során meghatározhatjuk, hogy a bank egyes altevékenységei (például üzletágai, régiói, a hitelek egyes iparági szegmensei) milyen mértékben járulnak hozzá a

* Köszönettel tartozom a Raiffeisen Banknak és *Kondor Imrének*, hogy támogatta e tanulmány elkészítését.

teljes hitelkockázathoz (a tőkeallokációs problémát számos cikk tárgyalja, például *Hallerbach* [1999], *Tasche* [1999]), és így ki lehet alakítani a közgazdasági tőke költséget is figyelembe vevő teljesítményértékelési rendszert. A hatékonyabb részterületek tevékenységének fokozásával maximalizálható a bank egészének hozzáadott gazdasági értéke (a tiszta profit).

Világos tehát, hogy egy bank hatékony működésének megteremtésében alapvető fontosságú a teljes banki portfólió kockázatának és az alportfóliók kockázati hozzájárulásának meghatározása.

A portfóliószemléletű hitelkockázati modellek lényege abban áll, hogy egy részportfólió (altevékenység) vagy akár egyetlen tetszőleges hitel kockázati hozzájárulása sem független az egész portfólió összetételétől. Ennek egyszerűen az a magyarázata, hogy az egyes vállalatok csődfolyamatai összefüggnek (korrelálnak) egymással. A korrelációkból következik az is, hogy a teljes portfólió kockázata általában kisebb, mint az egyedi kockázatok összege, azaz a portfólió kockázatában diverzifikációs hatás lép fel.

Hitelebíráláskor egy konkrét vállalati hitelkérelem kockázata különböző portfólióba helyezve más és más lesz (például két különböző banknál nyújtják be a kérelmet). Ezt könnyű megérteni, hiszen képzeljük el, hogy a hiteligénylő egy mezőgazdasági cég, továbbá az egyik megkeresett bank (*A* bank) portfóliójában csak mezőgazdasági cégek vannak, míg a másikban (*B* bank) mondjuk csak vegyipariak. Nyilvánvaló, hogy a kért hitel az *A* bank számára sokkal kockázatosabb, mert a mezőgazdasági cégek hitel-vissza-fizető képessége – mivel erőteljes mértékben közös kockázati faktoroktól függenek (időjárás, kereslet-kínálat) – erősen korrelálhatnak egymással, tehát kedvezőtlen gazdasági helyzetben az új hitel nagy valószínűséggel csak növelné az *A* bank veszteségét. Ugyanakkor ez a hitel a *B* bank számára előnyös lehet, hiszen a vegyipar számára kedvezőtlen gazdasági helyzetben a mezőgazdasági szektor sikeressége viszonylag függetlenül alakulhat (kisebb mértékű a közös gazdasági faktoroktól való függőség).

A hitelkockázat-mérés természetes alkalmazási lehetősége a kockázatkezelés (*risk-management*): például hitelderivatívák segítségével a portfólió megtisztítása a legnagyobb kockázati hozzájárulású (*marginal VaR*) és csőd esetén nagy veszteséget (*loss given default*) okozó elemektől,¹ továbbá a kockázatos hitelek árazásában az adott hitelhez tartozó várható veszteségekhez rendelt kockázati felár megjelenítésével. A portfóliószemlélet következménye, hogy egy kockázati hozzájáruláson alapuló hitelkockázati limitrendszer kialakítása információtechnológiai szempontból nem triviális feladat, hiszen minden hiteligény elbírálásakor, az egész portfóliót figyelembe kell venni, sőt ha a portfólió összetétele változik, akkor elképzelhető, hogy egy ma elutasított hitel holnap már elfogadható, illetve egy ma még profitábilis hitel holnapra már csökkenti a bank hozzáadott értékét.

Ezek a következmények meglehetősen gyakorlat- vagy üzletellenesnek tűnnek, ezért egy kockázati limitrendszer kialakítása csak nagy körültekintéssel képzelhető el (*Gordy* [2001b]). Talán nem véletlen, hogy a vitatott és a várhatóan 2006-ban életbe lépő Basel II. hitelkockázati tőkekövetelmény szabályozásában sem engedélyezik a portfóliószemléletű mérési módszerek (belső modellek) alkalmazását (*Basel Committee on Banking Supervision* [1999], [2001]).

¹ Magyarországon a hitelderivatívák mint kockázatosökkentési eszközök jelenleg még nem igazán állnak rendelkezésre.

A CreditRisk+ közgazdasági modellje

A bankiparban a hitelkockázat portfóliószemléletű mérésére néhány (négy-öt) alapmodell terjedt el (például CR+, KMV, CreditMetrics, CreditPortfolioView). Itt nem célok ezek bemutatása, színvonalas összehasonlító elemzések a szakirodalomban számos helyen fellelhetők (*Crouchy-Galai-Mark* [2001], *Gordy* [2000]). A komparatív elemzések legfőbb tanulsága, hogy bár az alapmodellek megfogalmazása matematikailag meglehetősen eltérő formalizmussal történik, mégis a közgazdasági tartalom tekintetében alapvető hasonlóságokat lehet kimutatni.

A CreditRisk+ (továbbiakban CR+) a *Credit Suisse Financial Products* [1997] által kidolgozott és az interneten nyilvánossá tett (letölthető technikai dokumentációjú), aktuárius szemléletű hitelkockázati modell. Közgazdasági-matematikai szerkezetében a hitelvesztés meghatározását egy klasszikus biztosítási probléma analógiájaként közelíti meg. Képzeljünk el ugyanis egy egyszerű életbiztosítási portfóliót. Itt éven belül a biztosítottak bizonyos valószínűséggel meghalnak, és ilyenkor a biztosító a kedvezményezetteknek fizet. A biztosító számára nyilvánvalóan fontos információ, hogy adott valószínűséggel maximálisan mekkora lesz az éven belüli kifizetések összege (például tartalékolásra, díjkalkulációra használják fel). Az analógia triviális, hiszen a bank esetében a haláleseményeknek megfeleltethetően bizonyos valószínűséggel a portfólióba tartozó vállalatok mennek csődbe, és ekkor a bank veszteséget realizál. Mindkét problémában a veszteség kialakításában két tényező játszik szerepet: egyfelől az adott időtávon belül bekövetkező (kár)események számának bizonytalansága, másfelől az egyes kárnagyságok alakulásának véletlenszerűsége (hiszen a kárnagyság attól függ, hogy melyik biztosított hal meg, illetve melyik cég megy csődbe).

A biztosítási feladattal való összehasonlításban azonban két lényeges különbségre is fel kell hívni a figyelmet. Egyfelől míg a biztosítási események megközelítőleg függetlenek, azaz egy biztosított halála alapesetben semmilyen pótlólagos információt nem jelent egy másik biztosított elhalálozási valószínűségére vonatkozóan, addig a csődesemények általában korrelálnak egymással, azaz például egy mezőgazdasági cég csődje „rossz előjel” lehet a többi mezőgazdasági vállalat hitelvisszafizető-képességének várható alakulásáról. További különbség, hogy bár a bank számára a vállalati csőd után az adós tartozása ismert mennyiség, de az már gyakorlatilag pontosan nem előrejelezhető, hogy a minősített kintlevőség kezelése (például fedezetértékesítés) során ebből mennyit sikerül visszaszerezni (a kárnagyság véletlenszerűségének tehát valójában két forrása is van, hiszen bizonytalan, hogy melyik vállalat megy csődbe, és az is, hogy ezen hány százalékos lesz a veszteség). Ebből az összehasonlításból jól látszik, hogy a hitelkockázati probléma valójában meglehetősen bonyolult biztosítási feladatként fogható fel.

Végezetül egy nagyon távoli területről is szeretnék egy analóg feladatot bemutatni. A kísérleti fizikában ismert mérési feladat (*Pál* [1995]) az adott idő alatt az úgynevezett ionizációs kamrában keletkező ossztöltések eloszlásának meghatározása. Az ionizációs kamrába véletlenszerűen részecskék csapódnak (biztosítottak meghalnak, vállalatok csődbe mennek), és az ionizáló részecskék által keltett véletlenszerű töltésadagokat (egyedi kárnagyságokat) az integráló kamra összegzi. A mért ossztöltés tehát a teljes kárnagysággal analóg mennyiség.

A hitelkockázati feladat szempontjából a legfontosabb a csődesemények, illetve a csődesemények közötti kölcsönhatások reális közgazdasági modelljének elgondolása. A CR+ a csőd okát alapvetően nem vizsgálja, hanem egyszerűen feltételezi, hogy adott időtávon belül egy vállalat bizonyos P valószínűséggel csődbe megy, és triviális módon $1 - P$ valószínűséggel pedig megőrzi fizetőképességét. A csődesemények korrelációja valójá-

ban abban áll, hogy a csődvalószínűségek együtt mozoghatnak. Például egy általános recesszióban egységesen megemelkedhetnek a vállalatok csődrátaértékei.

A CR+ a csődvalószínűségek alakulását véletlen folyamatnak képzelel el. A véletlenszerűség forrásaként szisztematikus kockázati faktorokat jelöl meg (x_1, x_2, \dots, x_N) , illetve ezen túl teret ad az idioszinkratikus, azaz egyedi, csak az adott vállalatra jellemző kockázati faktor (x_0) megjelenésének is. Egyedi kockázati forrásként tekinthetünk például a kutatás-fejlesztési kiadások megtérülésének bizonytalanságára, speciális marketingstratégiák sikerességére vagy egyéb, csak a vállalatra jellemző vezetői döntések következményeire. A szisztematikus kockázati faktorok tipikusan földrajzi régiók és/vagy iparági szegmensek gazdasági sikerességének indikátorai. A vállalatok „túlélési esélyei” (vagy csődvalószínűségei) különböző érzékenységgel reagálnak a szisztematikus faktorok és az egyedi kockázati faktor alakulására.

A CR+ a csődvalószínűséget tehát véletlenül alakuló értéknek fogja fel.² Természetesen adósmínősítési kategóriánként a csődrátának létezik egy, a múltbeli megfigyeléseken alapuló átlagos értéke (várható értéke). Ilyen átlagos értékekről olvashatunk többek között az évente nyilvánosságra kerülő Moody's tanulmányban. Például a Moody's [2001] 30. táblázatából kiolvasható, hogy az 1920–1999 közötti statisztikák alapján egy éven belül a B besorolású cégek 4,48 százaléka ment csődbe. A mögöttes kockázati faktorok kedvező (kedvezőtlen) alakulása esetén az adott besorolású cég csődvalószínűsége kisebb (nagyobb) lehet, mint a hosszú távú átlag. A kockázati faktorok ismeretében számítható csődráta tehát eltérhet a mögöttes információk hiányában megadható feltétel nélküli (*unconditional*) várható értékétől, azaz a hosszú távú átlagos rátától.

A CR+ lineáris kapcsolatot feltételez a mögöttes kockázati faktorok és a csődráta között. A lineáris kapcsolatban a faktorok együtthatóit (a súlyokat) szakértői alapon kell meghatározni (ennek részletezése önálló téma lehetne, a CR+ modell szempontjából a súlyok externális paraméterek). A súlyok azt a vélekedésünket fejezik ki, hogy az adott szisztematikus faktorok milyen mértékben befolyásolják az adós fizetőképességét, illetve milyen arányban magyarázható az adott vállalat csődrátájának változékonysága (szórása) az egyes faktorok alakulásával. A csődráta változékonysága tehát a mögöttes (szisztematikus) faktorok változékonyságának a következménye. A vállalatspecifikus kockázatot kifejező egyedi faktor szórása a CR+ modellben zérus. Ennek az oka, hogy a portfólióbeli vállalatok egyedi kockázati faktorai definíció szerint egymással nem korrelálnak, így egy nagy portfólióban az idioszinkratikus kockázat teljesen diverzifikálódik. Tehát közgazdaságilag (kockázati értelemben) az egyedi faktor fix értékűnek tekinthető.

Miként már láttuk, a faktorok bevezetésének célja, hogy segítségünkkel koherens módon változtassuk a közös szisztematikus kockázati forrásokra érzékeny vállalatok csődrátáit. Minél nagyobb súllyal szerepel két tetszőleges vállalat csődrátát meghatározó lineáris összefüggésében egy adott faktor (azaz minél inkább egy közös kockázatnak vannak kitéve a cégek), annál inkább korrelált módon fognak változni a csődvalószínűségeik. Szélsőséges esetben képzeljünk el két céget, amelyek 100 százalékban érzékenyek a mezőgazdasági szektor alakulására (az egyedi kockázattól most eltekintünk). Ebben az esetben teljesen korrelált módon változik meg a két cég csődrátája is. Ez azt jelenti, hogy

² Megjegyzem, hogy ez a valószínűség valószínűségeloszlását bevezető lépés „nehezen emészthető”, bár egyáltalán nem szokatlan matematikai gondolat, hiszen például a piaci kockázatok témakörében a sztochasztikus volatilitásmodelleknél is pontosan erről van szó. Ott az áringadozások Gauss-eloszlásúak, de időben változó Gauss-eloszlás szerint alakuló volatilitással. A CR+ modellben például a csődesemények száma binomiális eloszlású (0 vagy 1), és az eloszlás paramétere (P) Gamma-eloszlású (a Gamma-eloszlásokról még lesz szó). Ezzel a lépéssel lényegében a „nagy események” (extrém csődszám, kárnagyság, illetve árfolyam-ingadozás) valószínűségét lehet megnövelni (azaz a feltétel nélküli eloszlások „széleit lehet megvastagítani”).

mondjuk egy mezőgazdasági recesszióban mindkét cég csődrátája – a minősítésüknek megfelelő csődrátájukhoz képest – azonos százalékkal fog megnövekedni (például megduplázódnak a hosszú távú átlagként adódó rátákhoz képest). Bár trivialis, talán mégis érdemes hangsúlyozni, hogy a tökéletes korreláció tehát nem azt jelenti, hogy ha az egyik cég csődbe megy, akkor a másik vállalat is szükségszerűen így jár, hanem azt, hogy a cégek csődvalószínűségei mozognak determinisztikus kapcsolatban. A csődráták annál inkább korrelálatlan mozognak, minél nagyobb az átfedés a szisztematikus kockázatoktól való függőséget leíró súlyvektoraik között.

A közgazdasági modell ismertetése ezen a ponton befejeződik. A konkrét számítások elvégezhetősége érdekében a szisztematikus kockázati faktorok részletes statisztikai tulajdonságait is definiálni kell. A CR+ modell a kockázati faktorokat lényegében egy adott ipárhoz tartozó vállalatok átlagos csődvalószínűségeinek összegeként definiálja (illetve ezt egyre „normálja”, azaz az átlagos teljes csődszámot elosztja a várható értékével, és ezt tekinti szisztematikus kockázati faktornak). A CR+ feltételezi, hogy a kockázati faktorok tehát 1 várható értékű és adott szórású, továbbá Gamma-eloszlású (jobbra erősen elferdült haranggörbéjű) valószínűségi változók. Átlagosan tehát értékük 1, de elvileg 0 és plusz végtelen között tetszőleges értéket felvehetnek. Például 99,97 százalékos biztonsággal az 1 várható értékű és 1 szórású Gamma-eloszlású valószínűségi változó értéke nem haladja meg a 8,11-et, azaz 99,97 százalékos valószínűséggel egy adott szektorba tartozó vállalat adósminősítés alapján adódó csődrátája (a dekonjunkcióra következtében) maximum a 8,11-szeresére növekedhet (például a B besorolású 4,5 százalékos csődrátájú cég csődvalószínűsége maximum 36,5 százalékra nőhet meg). 99 százalékos biztonság fölött a „dekonjunktoraszorzó” értéke minimum 4,6.

A CR+ kockázati faktorok szórását a realizálódott szektorcsődráták szórásának historikus mérési eredményével lehet becsülni, továbbá elméletileg a szektorcsődrátá-szórások az adott szektorba valamilyen súllyal beletartozó vállalatok egyedi csődrátaszórásainak (súlyozott) összegeként állnak elő. Gordy [2000] cikkében olvasható, hogy az egyedi szórásértékek általában a minősítésből következő csődráták egyszerű számszorosai (multiplikáltjai), ahol a multiplikátor 0,4 és 1,4 közötti értékeket vehet fel (tehát például 99,97 százalékos biztonsággal a dekonjunktoraszorzó maximum $1,4 \times 8,11 = 11,4$ lehet). A *Credit Suisse Financial Products* [1997] a multiplikátor értékére az 1-t használja. A tapasztalatok szerint a rosszabb minősítésű kategóriákban alacsonyabbak a multiplikátorértékek (azaz a jobb adósminősítésű cégeknél magasabbak a dekonjunktoraszorzók).

A szisztematikus kockázati faktorok egymástól független (Gamma) valószínűségi változók. A függetlenség matematikai feltevése közgazdaságilag megkérdőjelezhető, hiszen például az egyes ipárgi szektorok konjunkturális helyzetének alakulása között intuitív módon korrelációkat feltételezhetünk. A CR+ ezt a problémát azon keresztül kezeli, hogy egy vállalatot a faktorérzékenysége alapján sok szektorra „súlyozza szét”, és így bár a szektorok egymástól függetlenek, de mivel egy cég egyszerre több szektorba is „belelóg”, ezért valójában a cégek közötti konjunkturális együttmozgásokat a „közös szektorokba súlyozások” alakítják ki. Sajnos persze a gyakorlatban a szakértői súlyszétosztás meglehetősen szubjektív megközelítéseket tesz lehetővé. Talán ennél valamivel objektívebb megoldás a CR+ *Burgisser-Kurth-Wagner* [1999] kiterjesztése, ahol a szisztematikus kockázati faktorok között páronkénti kovarianciákat (az együttmozgást számszerűsítő mennyiségeket) vezettek be. A kibővített modell azonban matematikailag sajnos nehezebben kezelhető. Ennek részleteire a következőkben még visszatérek.

Megemlítem, hogy a faktorsúlyok összege 1, mivel ezzel biztosítható, hogy a csődrátá várható értéke éppen a hosszú távú, minősítést tükröző csődvalószínűséggel egyezzen meg.

A CR+ eddig részletezett közgazdasági-matematikai specifikációja után további két lényeges matematikai egyszerűsítést kell megtenni ahhoz, hogy a valószínűségszámítás eszközeit felhasználva analitikus módon (képletekkel kifejezhetően) meghatározható legyen az adott időtávra vonatkozó hitelveszteség eloszlásfüggvénye, azaz a teljes portfóliót érő lehetséges hitelveszteségek és ezek kialakulásának valószínűségei. Természetesen ennek alapján már a hitelezési kockázatotott értékek is egyszerűen számolhatók. Az első matematikai közelítés szerint egy adott cég, adott időszakon belül (a cégminősítés és a faktorok által meghatározott csődrátájával megegyező paraméterű Poisson-eloszlás szerint) akárhányszor csődbe mehet. Ez nyilvánvaló közgazdasági nonszensz, hiszen egy cég adott időszakon belül vagy csődbe megy, vagy túlél. Erre a „Poisson-közelítésre” azért van szükség, hogy végül analitikusan meghatározható eloszlásfüggvény álljon elő. Pontosan ilyen okokból kellett a kockázati faktorokról Gamma-eloszlást feltételezni, továbbá ezért kell (második közelítésként) a portfólióbeli kitettségeket egész számokként (illetve egy általunk megválasztható egység egész számú többszöröseként) kezelni.

A Poisson-közelítés tartalmát érzékelteti, hogy például 99,9 százalékos valószínűséggel akkor nem fordul elő közgazdaságilag értelmetlen többszörös csődbemenetel, ha az adott cég csődvalószínűsége 4,5 százalék alatt marad. Ez durván azt jelenti, hogy adott szignifikanciaszinten egy B -nél rosszabb besorolású cég esetében a közelítés „hibás”. A biztonsági szintet 99 százalékra kell csökkenteni, hogy a közelítés jónak legyen mondható a 14,8 százalékos csődrátáértékgig – és ennek megfelelően egészen a C minősítésig – bezárólag. Természetesen, ha a csődráták megadásánál a (Gamma-eloszlás alapú) dekonjunktuuraszorzót is figyelembe vesszük, akkor a közelítés csődrátában mért elfogadhatósági tartománya jelentősen tovább szűkül. Általában elmondható, hogy a csődszám Poisson-eloszlással történő modellezése akkor lehetséges, ha a csődvalószínűség „kicsi” („sokkal kisebb, mint 1”).

A közelítések legfontosabb következménye az, hogy a számítások gyorsan elvégezhetőek,³ így leginkább gyakorlati jelentőségük van. A probléma ugyanakkor számítógépes szimulációval közelítések nélkül is megoldható. A szimulációs számítások általában időigényesebbek, de elvileg pontosabb eredményeket adhatnak. A szimuláció részleteire még visszatérek.

A kiterjesztett modell

A CR+ alapmodell feltételezi, hogy egy konkrét adós csődje esetén pontosan ismert a bank vesztesége. Ez azonban közgazdaságilag túlságosan egyszerűsítő feltételezés, hiszen a csőd után a hitel mögött álló fedezetek értékesítésére és a biztosítékok bevonására kerül sor (*work-out* folyamat), és természetesen a tartozás-visszaszerzési (követelésbehajtási) folyamat végeredménye bizonytalan. Pontosan nem ismert, hogy a banknak egy fizetéképtelenné vált vállalatától az eredeti tartozásának hány százalékát sikerül végül is visszaszereznie. Ezt a bizonytalan, többnyire százalékos formában megadott értéket szokás visszaszerzési vagy visszanyerési rátának nevezni (*recovery rate*).

³ A fent bemutatott (diszkrét Poisson-, Gamma-) közelítések értelme az, hogy ezek mellett a hitelvesztési valószínűségek egy egyszerű egyenleten, az úgynevezett Panjer-rekurzió keresztlíniá határozhatók meg (lásd Panjer [1981], Sundt-Jewell [1981], Panjer-Willmot [1992]). A Panjer-rekurzió ugyanis csak néhány speciális összetett eloszlás esetében alkalmazható. A CR+ közelítései összetett negatív binomiális eloszlású hitelvesztéseget eredményeznek, amelyre a Panjer-rekurzió alkalmazható. A CR+ valószínűségi generátorfüggvényeken (egy valószínűségi változó generátorfüggvénye az a függvény, amelynek hatványsoros felírásában az n . tag együtthatója megadja annak a valószínűségét, hogy a valószínűségi változó éppen az n . értékét veszi fel) alapuló levezetése, majd a rekurziós módszertan alkalmazása többek között a biztosításmatematikából lehet ismerős.

A visszaszerzési rátát az adminisztratív, jogi procedúra sikerességén túl, alapvetően a fedezet vagy biztosíték közgazdasági jellege határozza meg. Egy banki hitel mögött számtalan típusú fedezet állhat, itt csak néhány példát említek: ingatlan, részvény, vállalati kötvény, állampapír, befektetési jegy, bank- vagy állami garancia, bankkezesesség, biztosítás stb. A felsorolásból teljesen világos, hogy a fedezetek értéke az időben változik, tehát például egy ingatlannal fedezett hitel csődje esetén részben a csőd utáni ingatlanárak szabják majd meg, hogy mekkora lesz a visszaszerzési ráta. Valójában tehát amikor hitelkockázatról beszélünk, a bizonytalanság nemcsak a vállalati csődök előrejelezhetetlenségéről, hanem egy csőd esetén a visszanyerési ráta kiszámíthatatlanságáról is szól.

A visszaszerzési kockázatot például a CR+ modell egyik leghatékonyabb rivális modellje: a CreditMetrics (*Gupton–Finger–Bhatia* [1997]) (a továbbiakban: CM) módszerrel megpróbálja figyelembe venni. Ebben a modellben a visszaszerzési ráta 0 százalék és 100 százalék között bizonyos valószínűségekkel tetszőleges értéket felvehet. A valószínűségeket a Béta-eloszlásból számolják. A CM-ben a konkrét függvényforma megválasztásának kizárólag gyakorlati okai vannak, egyfelől ez az eloszlás két paraméterrel – a biztosíték típusa által meghatározott átlagos visszaszerzési rátával és a szórásával – jellemezhető, továbbá ez egy „kompakt tartójú” eloszlás, azaz csak egy véges intervallumon (0 és 100 százalék között) enged meg értékeket. A Béta-eloszlás feltevését azonban a múltban megfigyelt visszaszerzési rátákon alapuló historikus eloszlások illesztéses vizsgálataival is meg lehet erősíteni. A CM öt biztosítékkategóriát különít el (ezek mindegyikébe kötvények tartoznak, és csak a senioritásukban és a fedezettségükben térnek el egymástól), és ezekhez a historikus tapasztalatok alapján rendeli hozzá a visszaszerzési százalékok várható értékeit és szórásait. Például a legrosszabbul fedezett és hátrасorolt (*junior subordinated*) kitétségek esetében a visszanyerési ráta CM-dokumentációban (a Moody’s tanulmánya alapján) megadott legvalószínűbb értéke 10 százalék (17 százalékos várható értékkel és 11 százalékos szórással), továbbá a legbiztonságosabb fedezet kategóriában (*senior secured*) a visszanyerés várható értéke 54 százalék, és a szórás 27 százalék. Szintén a CM-dokumentációban olvashatjuk, hogy Egyesült Államok bankhitelei esetén (körülbelül ezer csődbe ment vállalat statisztikája alapján) az átlagos visszaszerzési ráta 65-70 százalék körül alakul, és a ráta szórása közelítőleg 30 százalék. Ezek a számok – például az eltérő jogrendszerek miatt – természetesen tetszőleges országra kritika nélkül nem alkalmazhatók.

A CM a visszaszerzési kockázatot teljes egészében idioszinkratikus, azaz egyedi kockázatként kezeli. Ez azt jelenti, hogy egy csődbe jutott cég esetében a visszaszerzési ráta „mindentől függetlenül alakul”, azaz értékét nem befolyásolják sem a csődvalószínűségeket alakító szisztematikus kockázati faktorok (azaz például az iparágak konjunkturális helyzete), sem a többi hitelfedezet értékének alakulása.⁴ Ennek a feltevésnek a közgazdasági lehetetlenségére egy extrém példát említek: képzeljünk el egy ingatlan-értékbecslő céget az adósaink között, amely hitelét ingatlannal fedezte. Nyilvánvalóan az ingatlanpiac (szisztematikus csőd-kockázati faktor) recessziója esetén nő a cég csődvalószínűsége, ugyanakkor ezzel korrelált módon csökken a hitelfedezet várható értéke, nő a szórása (azaz módosul a visszanyerési ráta eloszlása), továbbá ezzel korrelált módon módosulnak az egyéb ingatlannal fedezett hitelek visszanyerési rátáinak eloszlásai. Ebből a példából jól látszik, hogy közgazdaságilag a visszaszerzési kockázat nem kizárólag idioszinkratikus jellegű, hanem általában nem diverzifikálható, szisztematikus kockázatot is képvisel.

⁴ Ilyen esetben belátható, hogy egy „nagy portfólióban” a visszaszerzési kockázat teljesen diverzifikálódik, és végső soron a CM-modellben a sztochasztikus fedezetértékek (tehát a Béta-eloszlások) aszimptotikusan kiválthatók a fedezetek várható értékeivel [azaz a számolás vagy a szimuláció során a csőd esetén kockázatos sztochasztikus kitétség (tehát a véletlenszerűen alakuló *loss given default*) helyére a determinisztikus várható értéket lehet behelyettesíteni].

A szisztematikus visszaszerzési kockázat kezelésére számos modell született. Egyetlen szisztematikus kockázati faktort vezetett be *Frye* [2000a], [2000b], amellyel egy gazdaság általános konjunkturális helyzetét modellezi, és az egyedi kockázatok mellett ezen konjunktúrafaktor⁵ határozza meg mind a csődvalószínűségek alakulását, mind a fedezetek értékváltozását. *Burgisser–Kurth–Wagner* [2001] a CR+ olyan kiterjesztését (továbbiakban BKW-modell) adták meg, amelyben a csődvalószínűségek mellett a fedezetek értékalakulására is szisztematikus kockázati faktorokat vezettek be.⁶ A fedezet értékét az egyedi értéke és a kockázati faktorok egyszerű súlyozott átlagának szorzataként állítják elő, ahol a súlyok a fedezet értékének egyes faktorokra vonatkozó érzékenységét fejezik ki. A fedezetkockázati faktorok (az iparági felbontással analóg módon) bizonyos megfelelően kialakított fedezeti szegmensek konjunkturális helyzetét jellemző, 1-re normált (1 körül szóródó) számok. A súlyok összege 1, ezzel biztosítva hogy a faktorokra történt átlagolás után a visszaszerzési rátára a megfelelő feltétel nélküli eloszlásfüggvény (egyedi várható érték és szórás) adódjon. A faktorok – teljes analógiában a csődvalószínűségeket szisztematikusan alakító konjunktúraszorzókhöz – egyfajta fedezetkonjunktúra-faktorokként foghatóak fel (például ingatlanpiaci, kötvénypiaci, részvénypiaci stb. konjunkturális faktorok). A fedezetkonjunktúra-faktorok szórásának becslését idősoros alapon (például ingatlanpiaci indexek, kötvény- vagy részvényindexek segítségével) végezték el. A szisztematikus visszaszerzési kockázatot meghatározó faktor szórására 10 százalék és 20 százalék közötti értékek adódtak. A tipikus banki hitelfedezetek esetében az idioszinkratikus szórás általában a visszaszerzési ráta várható értékének 10–40 százaléka közötti értékeit veszi fel (kötvény fedezet esetében ez tipikusan 30–60 százalék).

A BKW-modell a fedezeti és csődvalószínűségi szisztematikus kockázati faktorok között függetlenséget tételez fel. Azaz a modellben az iparági és a fedezeti konjunkturális helyzet egymástól függetlenül alakulnak.⁷ Bár tehát a BKW-modell (az iparági szektorok után) a fedezeti szektorok között is bevezette a korrelációkat, de a matematikai kezelhetőség (gyors kiszámíthatóság) érdekében az iparág- és fedezetkonjunktúra között fellépő kölcsönhatásokat már nem modellezte. A következőkben egy teljesen kölcsönható (saját) modell alapjait vázolom fel, amelynek viselkedését számítógépes szimulációval lehet tanulmányozni.

⁵ A modell feltételezi, hogy a konjunktúrafaktor normális eloszlást követ. Ez fontos különbség a CR+ Gamma-eloszlású kockázati faktoraihoz képest, mert normális eloszlás esetén a korreláció jól értelmezhető fogalom, míg a Gamma-eloszlású változók összefüggőségének jellemzésére a klasszikus korrelációs mátrix nem megfelelő.

⁶ Itt lognormális eloszlással szimulálták a fedezetkonjunktúra-faktorokat.

⁷ Ennek az oka, hogy ilyenkor képletekkel felírható formában (azaz gyorsan elvégezhető számítások segítségével) lehet meghatározni a hitelvesztéségi eloszlásfüggvény szórását, illetve az egyes adósk kockázati hozzájárulásait. A modellben a szórás és a marginális kockázatok kiszámításakor további könnyebbség, hogy a fedezeti szegmensek közötti, és az iparági konjunktúraszorzókon belüli összefüggőségi viszonyokat (emlékeztetek, hogy az eredeti CR+-ban ezek is függetlenek voltak) ebben az esetben elegendő az egyszerű korrelációs mutatókkal jellemezni. A teljes eloszlásfüggvény analitikus meghatározásához (tehát a hitelkockázati VaR-hoz) azonban a lineáris együttmozgás erősségét jellemző korrelációs mátrix már nem elegendő. A korrelációs mátrix ugyanis csak normális eloszlású faktorok között adja meg az összefüggőségi viszonyok teljes jellemzését, itt azonban Gamma- és lognormális eloszlású változókkal dolgozunk. Tetszőleges eloszlású valószínűségi változók közötti összefüggések, kölcsönhatások jellemzéséről a kopulák matematikai elmélete szól (a kockázatkezelés és a kopulák kapcsolatáról számos cikk született, például *Frey–McNeil–Nyfeler* [2001], *Nyfeler* [2000], *Embrechts–McNeil–Straumann* [1999], [2001], *Frey–McNeil* [2001] vagy magyar nyelven *Benedek–Köbor–Pataki* [2002]). A kopula olyan függvény, amely egy sokváltozós eloszlásfüggvény folytonos peremeloszlásaiból előállítja az együttes eloszlást. A speciális elliptikus kopulák (Student-féle t , Gauss-kopulák) esetén már elegendő a peremeloszlások és a korrelációk (és az úgynevezett t -szabadságfok) ismerete is az együttes eloszlás megadásához. A BKW-modell kopulaalapú továbbfejlesztéséről eddig még nem publikáltak tanulmányokat.

Monte-Carlo-szimuláció

MATLAB⁸ szoftverben olyan szimulációs programot készítettem, amelynek segítségével a konjunktúraszorzők speciális eloszlásának feltételezése mellett egy teljesen kölcsönható közgazdasági rendszer modellezhető.

Általánosságban a kölcsönhatások a szorzők együttes eloszlásfüggvényének megadásával ragadhatók meg. Leegyszerűsített megfogalmazásban az együttes eloszlásfüggvény tetszőleges szorzőkombinációk valószínűségét adja meg (például milyen valószínűséggel áll elő a következő szorzőkombináció: mezőgazdaság – 0,9; ipar – 1,1; szolgáltatás – 1,3; ingatlanpiac – 1; kötvény – 0,7 stb.). Ezen elvi megoldás azonban a gyakorlatban nagyon nehezen lenne alkalmazható, mert egy ilyen eloszlás historikus alapú mérése nagyon hosszú idősorokat igényelne, amelyek természetesen nem állnak rendelkezésre; továbbá az együttes eloszlás (mint többváltozós függvény) szakértői megadása bonyolultsága miatt teljesen illuzórikus. A kölcsönhatás egyik egyszerű jellemzője a korreláció vagy kovariancia. Két véletlen változó kovarianciája a változók átlagtól való eltérésszorzatának átlaga. A korreláció a kovariancia „1-re normálásával” adódik (a kovariancia osztva a két változó szórásainak szorzatával), lehetséges értéke -1 és 1 között mozog: a 0 érték a két változó függetlenségét jelöli, az 1 érték a tökéletes (determinisztikusan meghatározott) együttlazgást, a -1 pedig a tökéletesen ellentétes irányú mozgást. A korreláció azonban csak normális eloszlású változók között adja meg a kölcsönhatás teljes jellemzését, azaz általában a változók együttes eloszlásfüggvényének megadásához (azaz egy tetszőleges változókombináció valószínűségének megadásához) nem elegendő a változók kovarianciáit ismerni. Nem normális (például Gamma-, Béta-, lognormális) marginális eloszlású változók esetén a korrelációk ismeretében az együttes eloszlásfüggvényt nem lehet megkonstruálni.

A gyakorlatban legfeljebb a konjunktúrafaktorok marginális eloszlásait és a közöttük fennálló korrelációkat lehetséges megbecsülni. Az előző bekezdés alapján tudjuk, hogy ezen információk csak a faktorok normális eloszlásának feltételezése mellett jelentenek elegendő információt a kölcsönhatások (együttlazgások) teljes jellemzéséhez.

E fenti megfontolások alapján a teljesen kölcsönható szimulációs modellben a csődválósínűségek és a visszanyerési ráták lognormalitását feltételeztem, azaz a ráták logaritmusai normális eloszlást követnek. A lográták közötti korrelációkat például szakértői alapon lehet megbecsülni (például legyen a szisztematikus csődfaktorok között egységesen $0,7$, a fedezetszegmensek között $0,2$, valamint a fedezetszegmensek és az iparágak között $0,5$). A szakértői becslésekben rejlő bizonytalanságok hatásának tesztelésére (vagyis a modellünk robusztusságának ellenőrzésére) érdemes átfogó érzékenységvizsgálatot végezni (például eltérő korrelációs mátrix, szisztematikus szórásmultiplikátorok stb.). A lognormális eloszlásokból elvileg nem negatív, de 100 százaléknál nagyobb ráták is kijöhetnek (ez a probléma a CR+ modellbeli Gamma-eloszlások esetében is fennállt!). Ezért az eloszlást úgy módosítottam, hogy az ilyen közgazdaságilag értelmetlen 100 százalékos feletti értékek ne fordulhassanak elő.⁹ A lognormális multiplikátoreloszlások várható értékét 1 -gyel (mivel ezek 1 -re normált konjunktúraszorzőket generálnak), szórását a korábban már megadott empirikus értékekkel tettem egyenlővé. Tulajdonképpen itt csak annyi történt, hogy a CR+ iparági faktorainak Gamma-eloszlásait a korrelációk

⁸ A MATLAB egy programozható matematikai szoftver, amelyben szimbolikus számítások is végezhetőek. A bankban a szoftver LINUX operációs rendszer alatt fut.

⁹ A szimulációban a 100 százalékos feletti értékek helyett új szorzőértékeket sorsoltam (ezzel matematika-ilag végső soron a levágott eloszlásrész súlyát egyenletesen szétkentem az értelmezhető 0 – 100 százalékos közötti értékek tartományán).

felhasználhatósága érdekében jól illeszkedő lognormális eloszlásokra cseréltem.¹⁰ Az idioszinkratikus visszanyerési kockázat Béta-eloszlásait pedig tehát lognormális konjunk-túraszorzókkal moduláltam.

Ezután a közgazdasági rendszer szimulációs modelljének további paraméterezése a következőképpen történt. Minden adóshoz tartozott egy adósminősítés és ezen keresztül természetesen egy (feltétel nélküli, átlagos) csődvalószínűség. Ezen túl egy adós össze-vont kintlevőségei és az egyes kintlevőségek fedezeti [illetve fedezetminősítési kategó-riái (*collateral rating*)] alapján előállítottuk a fedezetiszegmens-súlyokat¹¹ (például egy ügyfélnek 3 hitele és 1 le nem hívott garanciája és 1 ki nem használt hitelkerete van 5 milliárd forint összértékben, továbbá a teljes portfóliójának 70 százaléka ingatlannal, 20 százaléka állampapírral és 10 százaléka részvénnel fedezett). Fedezetminősítési kategó-riánként az idioszinkratikus visszaszerzési kockázat megadásához szükséges várható vissza-nyerési rátákat rendeltünk hozzá, majd ezen értékek meghatározott százalékaként (lásd az előző pontot) megadtuk a visszaszerzési ráta szórását is. A konkrét banki portfólió kockázatának mérésekor a csődvalószínűséget befolyásoló szisztematikus kockázatifaktor-súlyok megadása során az adósok KSH TEÁOR-kódja alapján a kitettségeket 100 száza-lékos súllyal egyetlen iparágba soroltuk, és ezt legfeljebb egy vállalatspecifikus súly bevezetésével bonyolítottuk (itt újra hangsúlyozom, hogy ilyen triviális szerkezetű súly-megosztás esetén különösen fontos lehet a konjunk-túraszorzók korrelációjának bevezeté-se, hiszen a CR+ a szétkent súlyvektorokon keresztül próbálta megragadni a konjunk-túra-együttmozgásokat). Általános modellszámításoknál természetesen például szakértői alapon az adósokhoz tetszőleges súlyvektorok hozzárendelhetők.

A paraméterezés után a szimulációs logika a következő volt. Első lépésben a megfelelő korrelációs szerkezetben a lognormális eloszlásokból kisorsoltam az iparági és a fedezeti szisztematikus kockázati faktorokat (az „1-re normált” konjunk-túraszorzókat).¹² Ezután adósonként az átlagos csődrátákat megszoroztam a kisorsolt iparági konjunk-túraszorzók súlyozott átlagával (illetve triviális súlyleosztás esetén magával az iparági konjunk-túra-szorzóval), így előállítottam az adott szimulációs scenárióhoz tartozó feltételes csődrá-tákat. A következő lépésben minden egyes adóshoz (egyenletes eloszlással) kisorsoltam egy 0 és 1 közötti számot, és ha ez a szám a feltételes csődrátánál kisebbnek adódott, akkor ez azt jelentette, hogy az adott scenárióban a cég csődbe ment. Ezzel egy időben adósonként előállítottam a visszaszerzési ráták értékét is. Ehhez adósonként és fedezeti kategóriánként a Béta-eloszlásból egyedi visszanyerési rátákat sorsoltam, majd ezeket megszoroztam (moduláltam) a közös fedezetkonjunk-túra-szorzókkal, és végül ezek sú-lyozott átlagaként előállt az adott scenárióhoz tartozó visszaszerzési érték. Ezt az érté-ket használtam fel a csődbe vitt vállalatokon ténylegesen elszenvedett veszteség meghatá-rozásához. Az adott scenárió mellett a teljes banki hitelezési veszteséget az egyedi vesz-teségek összege adta ki.

¹⁰ Ez a lognormális eloszlás két paraméterére két transzcendens egyenlet megoldását tette szükségessé. Például az 1 várható értékű és 1 szórású lognormális eloszlás várható érték paramétere $-0,346$ és szórás paramétere $0,8326$. Az eredeti Gamma-eloszlásnál a 99 százalékos és 99,9 százalékos percentilisek rendre 4,6 és 6,9, ugyanezek a lognormális eloszlásnál 4,9 és 9,3. Látszik tehát, hogy a 99 százalékos biztonsági szint felett a lognormális eloszlás „vastagabb szélű”. Tehát ezen új modell már a szisztematikus kockázati fakto-rok szintjén is az eredeti CR+ modellnél konzervatívabb.

¹¹ Az alapadat-transzformációk alapvetően adatbázis-kezelési feladatot jelentettek. Ezeket (egy speciális interfész segítségével) a MATLAB-ból is meghívható MySQL adatbázis-kezelő segítségével oldottam meg. Például az adósonkénti kitettség-összevonások a „SUM kitettség GROUP BY adós neve” SQL műveletekkel végezhető el.

¹² A kockázati faktorok logaritmusának vektora a korrelációs mátrixból egyértelműen meghatározható Cholesky felső háromszög-mátrix és az 1 várható értékű és adott szórású független normális változók vektorá-nak szorzataként állt elő. A Cholesky dekompozíció gyors és pontos végrehajtásában a MATLAB haszná-lata nagy könnyebbséget jelentett.

Elegendően nagyszámú szimulációs sorsolás eredményeként nagyszámú lehetséges veszteségérték állítható elő, és ezen értékek statisztikai tanulmányozásával a banki hitelkockázat részletesen elemezhető. Például 10 000 scenárió generálása után a 99,9 százalékos biztonságú VaR-érték becslését a 10. $[10\,000 \times (1 - 0,999)]$ legnagyobb veszteség adja meg, tehát 99,9 százalékos valószínűséggel a hitelfortfólión keletkező veszteség nem fogja meghaladni a 10. legnagyobb szimulált veszteséget. Természetesen a 10. legnagyobb érték a VaR-nak csak egy becslése, egy másik 10 000-es szimuláció után valószínűleg a 10. legnagyobb veszteségre egy másik érték adódna. Valójában tehát a VaR-ra egy intervallumbecslés adható csak, tehát például 95 százalékos biztonsággal állíthatjuk, hogy a 99,9 százalékos VaR az U -adik és az L -edik legnagyobb értékek között van.¹³ A VaR mellett a statisztika számtani átlagaként a várható veszteséget állíthatjuk elő, továbbá a kockázatkezelésben fontos VaR-on túli várható veszteséget (*expected shortfall*) az adott biztonsági szinthez tartozó VaR-nál nagyobb veszteségek egyszerű számtani átlagával lehet becsülni. Természetesen a veszteségstatisztika legátfogóbb jellemzőjét a szimulációsveszteség-értékek alapján egyszerűen felrajzolható valószínűségi eloszlásfüggvény adja meg. E függvény segítségével meghatározható annak a valószínűsége, hogy a hitelveszteség tetszőleges A és B érték közé esik.

A szimulációs program technikai részleteiről (véletlenszám-generálások, futási idő kérdései), a szimulációs eredmények értékeléséről (további hibabecslések, elméleti momentumtesztek) és az érzékenységvizsgálatok részleteiről (korrelációk, csődráták, visszanyerési ráták, eloszlástípusok megváltoztatásának hatása a veszteségstatisztikára) külön tanulmányt lehetne készíteni. Egy, a szimulációs módszertan részleteit megadó tanulmánynak nélkülözhetetlen eleme lenne az eredmények táblázatos és grafikus illusztrációja is. Ezért egy részletes értékelés bemutatása egy mintaportfólió elveinek kidolgozását is megkövetelné.¹⁴ Ebben a cikkben azonban a céloom csak a szimulációs technika közgazdasági tartalmának vázlatos bemutatása és a matematikai részletek érzékeltetése volt.

Zárógondolatként már csak azt jegyzem meg, hogy a kockázati számítások gyakorlati jelentősége a gazdaságigény meghatározásán túl a kockázatok különböző szempontok szerinti megoszlásának meghatározásában áll. A teljes portfólióból adott szempont szerint kiválogatott elemek kockázati hozzájárulásának ismerete elengedhetetlenül fontos alapinformációja a kockázatsökkentést vagy a hatékonyságnövelést célzó kockázatkezelésnek. Alportfólió-képzési kategóriák lehetnek a következők: üzletág, ügyfél, ügyfélreferens, iparág, fedezeti kategória, régió, terméktípus, vállalati árbevétel kategóriája, futamidő stb. A kialakított kategóriák mentén elméletileg VaR-alapú (portfólió-szemléletű) limitrendszer építhető (a megvalósítás gyakorlati nehézségeiről már beszélünk). A kockázati megoszlás táblázatainak technikai előállítását a fenti szimulációs módszertan és egy adatbázis-kezelő rendszer integrálását követeli meg.¹⁵

Záró megjegyzések

Ebben a cikkben a formális matematikai részletek közlését teljesen elhagytam. Ezzel az volt a céloom, hogy a közgazdasági tartalomra koncentrálhassak. Azt gondolom, hogy a CR+ modell megértésének valódi nehézsége is a közgazdasági tartalma. Ennek elemzése tette lehetővé a modell szimulációs megvalósítását, és ezen keresztül az elméletileg szük-

¹³ U és L meghatározása statisztikai alapfeladat, például a CreditMetrics technikai dokumentációjának függelékében is megtalálhatjuk a levezetéseket.

¹⁴ Mivel a meglévő számítások nem egy mintaportfólióra, hanem a tényleges banki portfólió elemzésére készültek el, ezért az illusztrációs ábrák megjelentetése és a tényszerű inputadatok szerepeltetése üzleti titkot sérthetne.

¹⁵ Ezt MATLAB-MySQL integrációban valósítottam meg, de ennek részleteire itt már nem térek ki.

séges leegyszerűsítések elhagyhatóságát. Itt arra gondolok, hogy a szimulációs modellben a vállalatok egynél többször nem mehetnek csődbe (ellentétben a Poisson-közelítéssel) és a kitétségek diszkretizálására sem volt szükség. Továbbá amennyiben a szisztematikus kockázati faktorok függetlenségét feltételezzük (a CR+ eredeti szétsúlyozásos rendszerben ez némiképp védhető feltevés), akkor a faktorok a szimulációban tetszőlegesen eloszlásúak lehetnek (például a Gamma- és Béta-eloszlás helyett). Ha a mögöttes kockázati faktorok kölcsönhatásban vannak egymással, akkor pedig vagy az eloszlások normalitását kombinálhatjuk a korrelációs struktúrával, vagy tetszőleges eloszlások esetén a kopulák elméletét kell segítségül hívnunk. A kopulák elméletében a kölcsönhatások jellemzésére újfajta fogalmakat (konkordancia, függőség stb.) vezetnek be. Ezek szakértői becslése természetesen megköveteli az új fogalmak alapos megismerését és megértésük elmélyítését.

A szimulációs modell továbbfejleszhető úgy, hogy segítségével a csőd hullámok dinamikáját is modellezni tudjuk. Azaz a modellbe építhetjük azt a jelenséget, hogy gazdasági recesszióban a csőd valószínűségek emelkedésével egyidejűleg a szektorok közötti korrelációk is erősödnek. Ehhez a feltételes csőd valószínűségi összefüggésünkbe (azaz a lineáris kockázati faktor-képletünkbe) be kell vezetni egy országkonjunktúra-szorót, és a szoróhoz tartozó érzékenységi súlyt (például egy vállalat fizetőképességét 50 százalékban befolyásolja az ország gazdasági helyzete), és ha a szimulált konjunktúraszorzó egy előre rögzített érték fölé nő (például az 1 várható értékű szorzó 1,2 fölé nő, azaz a hosszú távú átlagos értékhez képest 20 százalék \times országkockázati súllyal megemelkedik a csőd-ráta), akkor a többi (például iparági) faktor közötti korrelációs mátrix elemeit adott százalékkal megemeljük.¹⁶ Persze a paraméterértékek helyes beállítása ismét szakértői feladatnak tűnik, és természetesen az érzékenységvizsgálatok kiemelten fontosak lesznek.

A CR+ modell tanulmányozása intellektuálisan rendkívül érdekes feladat, és ebben a cikkben számos nagyon érdekes matematikai részletre nem térhettem ki. Itt már csak a téma iránt mélyebben érdeklődők kedvéért adnék egy felsorolást a kapcsolódó témakörökből: a hitelvesztéségi eloszlásfüggvény Panjer-féle rekurziós előállításának elmélete és a kapcsolódó numerikus problémák (Gordy [2001a]), az eloszlás szélének pontosabb meghatározása a nyeregpont módszer és az extrémális értékek elmélete (EVT, extreme value theory) alapján (Martin-Thompson-Brown [2001a], [2001b]), valamint az eloszlásfüggvény meghatározása és egy portfóliószemléletű hitelkockázati rendszeren alapuló, mégis portfóliófüggetlen limitrendszer kialakításának lehetősége egyetlen szisztematikus kockázati faktor és finoman szemcsézett (fine-grained) portfólió feltételezése mellett (Gordy [2001b], Burgisser-Kurth-Wagner [2001]).

Hivatkozások

- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [1999]: Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications. Technical Report. Bank for International Settlements, Bazel.
- BASEL COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION [2001]: The New Basel Capital Accord. Consultative Document. Bank for International Settlements, Bazel.
- BENEDEK GÁBOR-KÓBOR ÁDÁM-PATAKI ATTILA [2002]: A kapcsolatszorosság mérése m -dimenziós kopulákkal és értékpapírportfólió-alkalmazások. Közgazdasági Szemle, 2. sz.
- BURGISSER, P.-KURTH, A.-WAGNER, A. [2001]: Incorporating Severity Variations into Credit Risk. Journal of Risk, 3 (4), 5–31. o.

¹⁶ Ezután az új korrelációs mátrixra végezzük el a Cholesky-dekompozíciót, majd ezen új háromszögmátrixunkkal szorozzuk a függetlenül szimulált véletlen vektorunkat.

- BURGISSER, P.–KURTH, A.–WAGNER, A.–WOLF, M. [1999]: Integrating Correlations. *Risk*, Vol. 12. No. 7. 57–60. o.
- CREDIT SUISSE FINANCIAL PRODUCTS [1997]: CreditRisk+, A Credit Risk Management Framework. Credit Suisse Financial Products, London, <http://www.csfb.com/creditrisk/>
- CROUCHY, M.–GALAI, D.–MARK, R. [2001]: Risk Management. McGraw Hill, New York.
- EMBRECHTS, P.–KLUPPELBERG, C.–MIKOSCH, TH. [1997]: Modelling Extremal Events. Number 33. Applications of Mathematics, Springer-Verlag, Berlin.
- EMBRECHTS, P.–MCNEIL, A.–STRAUMANN, D. [1999]: Pitfalls and Alternatives. *Risk*, Vol. 12. No. 5. 69–71. o.
- EMBRECHTS, P.–MCNEIL, A.–STRAUMANN, D. [2001]: Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls. Megjelent: Dempster, M.–Moffatt, H. K. (szerk.), Risk Management: Value at Risk and Beyond. Cambridge University Press, http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub_list.html.
- FREY, R.–MCNEIL, A. [2001]: Modelling Dependent Defaults, http://www.math.ethz.ch/~mcneil/pub_list.html
- FREY, R.–MCNEIL, A.–NYFELER, M. [2001]: Copulas and Credit Models. *Risk*, Vol. 14. No. 11. 111–114. o.
- FRYE, J. [2000a]: Collateral Damage: A Source of Systematic Credit Risk. *Risk*, Vol. 13. No. 4. 91–94. o.
- FRYE, J. [2000b]: Depressing Recoveries. *Risk*, Vol. 13. No. 11. 108–111. o.
- GORDY, M. B. [2000]: A Comparative Anatomy of Credit Risk Models. *Journal of Banking and Finance*, 24. 1–2. 119–149. o.
- GORDY, M. B. [2001a]: Calculation of Higher Moments in CreditRisk+ with Applications. FED, New York, Working Paper, <http://www.mgordy.tripod.com>
- GORDY, M. B. [2001b]: Credit VaR and Risk-Bucket Capital Rules: A Reconciliation. Proceedings of the 36th Annual Conference of Bank Structure and Competition., New York
- GUPTON, G. M.–FINGER, CH. C.–BHATIA, M. [1997]: CreditMetrics-Technical Document. J. P. Morgan & Co. Incorporated, New York.
- HALLERBACH, W. G. [1999]: Decomposing portfolio value-at-risk: A general analysis. Discussion paper, TI 99-034/2, Tinbergen Institute, Rotterdam.
- JENSEN, J. L. [1995]: Saddlepoint Approximations. Clarendon Press, Oxford.
- MARTIN, R.–THOMPSON, K.–BROWNE, CH. [2001]: VaR: who contributes and how much? *Risk*, Vol. 14, No. 8. 99–103. o.
- MARTIN, R.–THOMPSON, K.–BROWNE, CH. [2001a]: How dependent are defaults? *Risk*, Vol. 14, No. 7. 87–90. o.
- MARTIN, R.–THOMPSON, K.–BROWNE, CH. [2001b]: Taking to the Saddle. *Risk*, Vol. 14, No. 6. 91–94. o.
- MOODY'S [2001]: Historical Default Rates of Corporate Bond Issuers, 1920-1999. Moody's Investors Service, Global Credit Research.
- NYFELER, M. A. [2000]: Modelling Dependencies in Credit Risk Management. Diplomamunka.
- PÁL LÉNÁRD [1995]: A valószínűségszámítás és a statisztika alapjai, I. Akadémia Kiadó, Budapest.
- PANJER, H. H. [1981]: Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions. *ASTIN Bulletin*, 12. 22–26. o.
- PANJER, H. H.–WILLMOT, G. E. [1992]: Insurance Risk Models. Society of Actuaries, Schaumburg, IL.
- SUNDT, B.–JEWELL, W. S. [1981]: Further Results on Recursive Evaluation of a Family of Compound Distributions. *ASTIN Bulletin*, 12. 27–39. o.
- TASCHE, D. [1999]: Risk contributions and performance measurment. Working Paper, Technische Universität, München.