

## ZSEMBERY LEVENTE

### A volatilitás előrejelzése és a visszaszámított modellek

---

A volatilitással és annak kockázatával az elmúlt másfél-két évben nemcsak a részvénytőkebefektetők, hanem a kötvény-alapkezelők és a devizaügyletekkel foglalkozók is megismerkedhettek. Bár az opciók – különösen a devizaopciók –, illetve az opciós jogokat tartalmazó értékpapírok piaca dinamikusan bővült az utóbbi időben, az opciók árazásában a világ sok pontján alkalmazott szofisztikált módszerek Magyarországon ma még csak szűk körben terjedtek el. A szerző azokat a modelleket mutatja be, amelyek alkalmasak lehetnek az újonnan kiírandó opcióknak a már piacon lévő opciók árával összhangban történő árazására, illetve annak elemzésére, hogy a piac milyen jövőbeli ár- és volatilitásalakulás lehetőségét rejt magában. Az elmúlt években több ilyen modell született, a tanulmány ezek közül csak azokat veszi sorra, amelyeknek az alapja vagy az idehaza is gyakran használ binomiális modell, vagy a véges differenciák módszere. A szerző célja a modellek felhasználóbarát bemutatása, illetve hibáik és erőnyeik összevetése.

Journal of Economic Literature (JEL) kód: G12, G13, G19.

---

#### A volatilitáskockázatról

A volatilitás egyre gyakrabban szerepel a szakmai vitákon. Bár a kockázat mérőszáma-ként már nagyon régóta használjuk, sokáig úgy tekintettünk rá, mint egyfajta időben állandó értékre, olyan tényezőre, ami diverzifikációval megszüntethető. Az, hogy a volatilitás időben változhat, alapvetően csak az opciókkal kereskedő üzletkötőket, illetve az ő kockázatukat figyelemmel kísérni hivatott személyeket érintette.

A kereskedés globalizálódásával azonban a diverzifikáció lehetősége egyre jobban beszűkül, az egyre jelentősebb spekulációs tőke pedig időről időre felbolygatja a piacokat, a volatilitás hirtelen jelentős változását okozva ezzel. Éppen ezért az érintettek köre a fentieknél lényegesen tágabb lehet.

Gyakori megfigyelés a piacon, hogy a volatilitás és az árfolyamok negatív módon korreláltak, azaz az árfolyamok esésekor a volatilitás tipikusan megnő. Ezt korábban a piacok közötti diverzifikációval részben ki lehetett védeni, hiszen a zuhanás az egyik piacon nem feltétlenül járt együtt a többi piac esésével. Ma azonban a tőkepiacok oly mértékben összekapcsolódtak, hogy az egyik piac esését gyakran követi a többi piac lefelé mozdulása is.

Ezeknek a problémáknak két következménye van. Egyrészt egyre fontosabb a jövőbeli

volatilitás alakulásának az előrejelzése, másrészt egyre határozottabban jelenik meg az igény volatilitásra szóló termékek jegyzésére, a volatilitással történő kereskedelemre.

Mint az látható volt, a probléma már régen nem csak az opciós piacon kereskedők problémája. Talán ennek is köszönhető, hogy a volatilitás előrejelzése, illetve a volatilitáskereskedés módszerének kialakítása az elméleti pénzügyi szakirodalomban is egyre gyakrabban vetődik fel.

Ebben a dolgozatban célom a volatilitás előrejelzésére szolgáló modellek bemutatása, illetve egymással való összevetése. Bár mind a szakirodalomban, mind a gyakorlatban nagyon elterjedt a volatilitást ökonometriai módszerekkel leíró ARCH- és GARCH- (általánosított autoregresszív feltételes heteroszkedaszticitás; *Generalised Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) modellek használata, ezzel a dolgozatomban nem kívánok foglalkozni. Ezekről a modellekről jó áttekintést ad Varga [2001]. Ehelyett elemzésem középpontjába a tőzsdéken is jegyzett volatilitásindexeket, a nagy befektetési bankok által is ajánlott visszaszámított modelleket, illetve a véges differenciák modelljét helyeztem.

A visszaszámított modellek lényegében arra keresik a választ, hogy milyen jövőbeli ár- és volatilitásalakulással számolt a piac, amikor ezeket az opciós árakat meghatározta. Az így kapott eredmények felhasználásának célja kettős lehet. A kapott adatok egyrészről felhasználhatók más termékek, elsősorban derivatívok árazására, másrésztől a kapott volatilitásértékek a volatilitás előrejelzésére is alkalmasak lesznek. A modellek bemutatása előtt röviden áttekintjük, hogyan lehet a volatilitás értékét más módszerekkel meghatározni.

### A historikus volatilitás

A volatilitás jövőbeli alakulásának előrejelzésére a legegyszerűbb és legelterjedtebb módszer az úgynevezett historikus volatilitás számítása. Ennek során feltesszük, hogy a múltbeli adatokból számított volatilitás a jövőben is jellemző lesz, azaz a volatilitás időben nem változik. E szerint az értékelési eljárás szerint a volatilitás a folytonosan számított hozam szórása éves szinten. Azaz kiszámoljuk a napi hozamokat:

$$r = \ln\left(\frac{S_T}{S_{T-1}}\right),$$

majd meghatározzuk ezek szórását. A szórást természetesen ugyanúgy éves szinten kell megadni, mint a hozamokat, ezért a megkapott napi szórást éves szintre arányosítjuk:

$$\sigma_{\text{éves}} = \sqrt{252}\sigma_{\text{napi}}.$$

A képlet mögött két feltételezés húzódik meg. Az egyik az, hogy a volatilitás alapvetően a kereskedés eredménye. Így, mivel egy évben 252 kereskedési nappal számolunk, a volatilitás értékét befolyásoló információ csak ekkor érkezik a piacra. Ennek köszönhető a 252-vel való szorzás. A másik feltevés az, hogy az egymást követő napi hozamok egymástól függetlenek és azonos (normális) eloszlásúak. Így varianciáik összeadhatók. Mivel mi nem varianciáról, hanem szórásról beszélünk, ezért nem 252-vel, hanem  $\sqrt{252}$ -vel szorzandó a napi volatilitás értéke.

A gyakorlati alkalmazás során gyakran adják azt a tanácsot, hogy a historikus volatilitás számítása során ugyanannyi időre tekintsünk vissza a múltba, mint amekkora időtávra a számított értéket fel kívánjuk használni. Azaz ha a volatilitást egy egyéves opció árazásához akarjuk felhasználni, akkor egy egyéves múltbeli adatsort használjunk fel a historikus volatilitás meghatározásához.

A historikus volatilitás hibája, hogy számításához a múltra kell támaszkodnunk. Így implicit módon azzal a feltevessel élünk, hogy a volatilitás időben állandó, holott ennek a tapasztalatok ellentmondanak. Ezért használják inkább a piac vélekedését jobban tükröző, az opciók piaci árából visszaszámított úgynevezett implicit volatilitást.

### Az implicit volatilitás

Az implicit volatilitás meghatározása során a piacokon jegyzett opciók árából indulunk ki. A volatilitás meghatározásának alapja a Black–Scholes-modell. Esetenként (főleg amerikai opciók esetében) a Cox–Ross–Rubinstein-féle (CRR) binomiális fa is felhasználható. Azt keressük, hogy milyen volatilitásértéket kellene e modellekben alkalmazni, hogy annak eredményeként éppen az aktuális piaci opciós árat kapjuk vissza.

A kérdés tehát az, hogy milyen jövőre vonatkozó volatilitásérték van a piac fejében, mikor opciót jegyez adott áron a piacon. Természetesen ebben az esetben is feltevéseket teszünk. A legalapvetőbb feltevés, hogy a fenti modellek jól árazzák az opciókat. Ha ugyanis a Black–Scholes- vagy a Cox–Ross–Rubinstein-modell nem írja le jól a valóságot, akkor nem kapunk vissza jó értéket. Ezen a ponton pedig újabb problémába ütközünk, hiszen egyik modell sem tekinthető hibátlanak, a valóságot hűen tükrözőnek. Ezért – ahogyan *Rebonato* [1999] szellemesen fogalmaz – az implicit volatilitás tulajdonképpen az a rossz érték, amit egy rossz képletbe beírva a helyes árfolyamot kapjuk vissza.

Az implicit volatilitás felhasználását ért egyik leggyakoribb kritika az, hogy a fenti modellek is abból a feltételezésből indulnak ki, hogy a volatilitás időben állandó. Ez az opciók árából visszaszámított volatilitásértékekben is meglátszik. A piaci árakból a volatilitást kiszámolva ugyanis azt tapasztaljuk, hogy az az opciók kötési árfolyamától és futamidejétől nem lesz független.

Sokan bemutatták azt a jelenséget, hogy az opciók implicit volatilitása a kötési árfolyam függvényében változik, egy mosolyhoz hasonló formát rajzolva ki. Ezt nevezték el volatilitásmosolynak (*volatility smile*). E szerint az OTM (árfolyam alatti) és ITM (árfolyam feletti) opciók implicit volatilitása magasabb, mint az ATM opcióké. Egyesek ezt nem annyira mosolynak, mint inkább grimasznak tartják (*skew*), mert szerintük az implicit volatilitás a kötési árfolyam növekedésével folyamatosan csökken.

*Rebonato* [1999] szerint a devizapiacra a mosoly inkább a fejlett országok devizáira jellemző, míg a feltörekvő országok (*emerging market*) devizáira inkább a grimasz jellemző.

*Rebonato* érveléséhez hasonló megállapításokra jutott *Zou* [1999] is. Ő a részvényt piacot elemezve próbálta feltárni az opciók árban benne foglalt kockázatmentes eloszlást, illetve az implicit volatilitást. Eredményei szerint a helyzet a részvényt piacon az 1987-es krach után változott meg. Addig a volatilitásmosoly, illetve -grimasz nem lépett fel. Ennek kialakulását arra vezeti vissza, hogy a hozamok eloszlása a gyakorlatban nem normális, mivel a nagy negatív hozamok valószínűsége lényegesen nagyobb a nagy pozitív hozamokénál. A historikus valószínűség eloszlásait felhasználva (az entrópia minimalizálása által) meghatározott implicit volatilitások már a piacon tapasztalt grimasznak megfelelőek lesznek. A grimasz kialakulásának okát tehát alapvetően abban látja, hogy a piaci szereplők nagyobb esélyt adnak a nagy árzuhanásnak, mint az áremelkedésnek.

Ez gyakorlatilag egybeesik *Rebonato* megállapításával, hiszen a fejlett gazdaságok devizáinál a nagy csökkenés valószínűsége azonos a nagy emelkedés valószínűségével, míg egy felzárkózó gazdaság esetén a valuta összeomlásának nagyobb valószínűséget ad a piac, mint a hirtelen felértékelődésének.

De a volatilitás nemcsak a kötési árfolyam, hanem az opciók futamideje alapján is változhat. Ezt a volatilitás lejárat szerkezete (*term structure of volatility*) tartalmazza. A két változó szerint pedig megrajzolható az adott termék opciós piacának implicitvolatilitás-felülete.

Minden hibája ellenére az implicit volatilitás jelentős piaci információt jelent, a piac szereplői gyakran használják tájékozódási pontként, illetve további elemzések kiindulópontjaként. Hogy ez mennyire jellemző, azt jól mutatják az úgynevezett volatilitásindexek is. Ezek egy-egy likvid opciós piac implicit volatilitását hivatottak kifejezni, még hozzá több opció implicit volatilitásának felhasználásával. Mivel ezeket az indexeket több tőzsdén jegyzik, sőt származtatott ügyletek alaptermékeként is szolgáltak, részletesebben foglalkozom velük.

### *A volatilitásindexek*

Mint arról szó volt, a tőzsdén jegyzett volatilitásindex tulajdonképpen kiemelt opciók implicit volatilitásainak súlyozott átlaga. Az implicit volatilitás azonban csak egyes opciókhoz kötődik, a piac egészéről nem sokat árul el. Ahhoz, hogy a volatilitásmosoly, illetve a lejárat szerkezet hatásait kiszűrjék, nem egyetlen kötési árfolyam és egyetlen lejárat opcióit használják fel, hanem ezek valamilyen kombinációját. Így jutottak el a volatilitásindexek számításáig. Ezek előnyei és a hátrányai hasonlóak az egyéb – például részvény- vagy kötvénypiaci – index jellemzőihez. Bár a piac átlagos alakulását jól bemutatják, mégis csak egy, a részleteket elfedő átlagot jelentenek.

Ezek az indexek a továbbiakban felhasználhatók a piaci várakozások egyfajta mérőszámaként, de esetenként származtatott ügyletek alaptermékeként is.<sup>1</sup>

A likvid opciós piacokon több volatilitásindex született. Ilyen például az eredetileg a Deutsche Terminbörse által 1994 decemberében indított VDAX-index, vagy a CBOE VIX-indexe. Az előbbi a DAX-indexre szóló vételi és eladási opciók implicit volatilitásának indexe, míg utóbbi értékét az S&P100-ra szóló vételi és eladási opciók felhasználásával határozzák meg. Legutóbb az AMEX vezette be népszerű, a Nasdaq-indexet másoló QQQ portfólióra szóló opciók indexét, az úgynevezett QVQ volatilitásindexet. Nézzük meg röviden, hogyan épülnek fel ezek a termékek!

A DAX-ra szóló opciókból több volatilitásindexet is számítanak.<sup>2</sup> Vannak az úgynevezett alindexek, amelyek külön-külön az egyes lejáratokhoz kötődnek. Ezek az adott lejáratú, az ATM értéket közrefogó kötési árfolyamokhoz tartozó vételi és eladási opciók implicit volatilitásának átlagaként adódnak. Az aggregált VDAX-index esetében megpróbálják az értéket a lejárat időpontoktól is függetlenné tenni. Ezt a 45. naphoz legközelebb lévő, már kiszámított alindexek átlagolásával számítják. A súlyokat a kitűzött negyvenöt napos időponttól való eltérések jelentik, a volatilitás értékét éves szintre kerekítik.

A kereskedés kezdeti szakaszában – hogy minél hamarabb tudjanak VDAX-értéket számítani – nemcsak a 45. naphoz legközelebbi lejáratok, hanem bármilyen már kereskedett lejárat felhasználható. Természetesen, ahogy a kereskedés beindul, ezeket az értékeket a közelebbi lejáratok értékeire cserélik fel.

A CBOE-n forgalmazott VIX-index – a VDAX-hoz hasonlóan – a szándékok szerint a lejáratától független marad.<sup>3</sup> Itt azonban az egyes alindexeket nem jegyzik, csak a végső,

<sup>1</sup> Ilyen volt például Németországban a VDAX-indexre szóló határidős ügylet. A gondot csak az jelentette, hogy maga az index nem állítható elő, így nem lehetett valós alaptermék a határidős ügyletnek, hiszen a szintetikus előállítás és ezáltal az arbitrázs nem mehetett végbe.

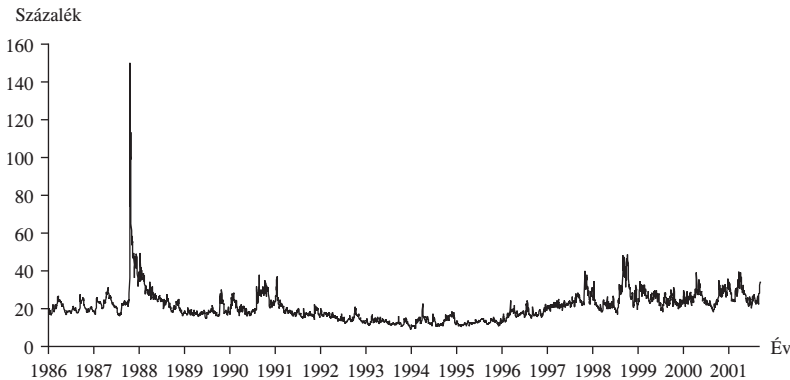
<sup>2</sup> A VDAX-index részletes leírását lásd *Guide to the Volatility Indices ...* [1997].

<sup>3</sup> A termék részletes leírását lásd *Whaley* [1993], [2000]

aggregált index értékét. A névleges időpont, amire az implicit volatilitás értékeit átlagolják, a CBOE-n harminc naptári nap. Az index az ehhez legközelebb lévő két időpont ATM-hez legközelebb lévő vételi és eladási opciók implicit volatilitásának súlyozott értékeként adódik. Kivételt jelentenek azok a lejáratok, ahol a kifutásig nyolc vagy annál kevesebb nap van hátra. Ekkor ugyanis a piac gyakran abnormálisan viselkedik, ami az index értékét összezavarná. Ezért ezeket az értékeket a számításnál kihagyják.

### 1. ábra

A VIX értéke 1986. január és 2001. szeptembere között



Mindkét index esetén a vételi (*call*) és az eladási (*put*) opciók értékét a vételi és az eladási árfolyamok számtani átlagaként kapjuk. Ezzel két probléma is megoldódik. Egyrészt el lehet kerülni azt a vitát, hogy melyik alkalmasabb valójában a volatilitás mérésére, másrészt a marzs esetleges szélesedésének hatásai is elkerülhetők.

Különbség azonban, hogy a VIX alapjául szolgáló, az S&P100-ra szóló opció amerikai, a DAX-indexre szóló európai típusú. Ezért az első esetben a binomiális Cox–Ross–Rubinstein-modell, az utóbbiban a Black–Scholes-modell felhasználásával számítják az implicit volatilitás értékét.

## Visszaszámított modellek

A továbbiakban azokat a modelleket mutatom be, amelyek szintén a piacon forgó opciók árából próbálnak meg információt nyerni, azonban a fentieknél bonyolultabb módszerrel igyekeznek több tudást szereznii. A cél nem csupán az opciók árában lévő implicit volatilitás meghatározása, hanem az úgynevezett helyi volatilitás felületének a kiszámítása.

A helyi volatilitás az egyes jövőbeli időpontokhoz tartozó volatilitásérték. Ha úgy tetszik, az eddig egyetlen (ma és az opció lejáratá közötti) periódust rövidebb részperiódusokra bontjuk. Az eljárás hasonló, mint amikor kötvények lejáratig számított hozamából (IRR) forward hozamgörbét számolunk. A kötvények lejáratig számított hozama csak egy adott kötvényre jellemző, önmagában a piacról nem mond el sokat. Aki az IRR alapján próbál egy másik kötvényt beárazni, könnyen félreárazhatja azt. A hozamgörbe meghatározásának éppen az a célja, hogy minden lejáratához rendelkezünk elemi kötvényhozamokkal, vagy ami ezzel egyenértékű, ismerjük az egyperiódusos hozamokat tartalmazó forward görbét.

A következő modellekkel fel tudjuk majd rajzolni a helyi volatilitás felületét, ami az árfolyam és az idő függvényében megadta a helyi, egy periódusra érvényes volatilitásokat.

Tehát míg az *implicit volatilitás* a mai időpont és az opció lejáratá közötti (több periódusból álló) időszak volatilitását mutatja (lásd IRR), a *helyi volatilitás* egyetlen periódus volatilitását adja meg (lásd forward hozam).

Az analógiát tovább folytatva, hasonlóan járunk el, mint amikor a kötvények lejáratig számított hozamából egyperiódusos forward hozamokat számítunk. Ott is piaci árakat használunk, célunk ott is olyan értékek kikövetkeztetése, amivel a számított árfolyamok a lehető legkisebb mértékben térnek el a kötvények piaci áráról.

A fenti felület tisztázása minden, az opciós piacon részt vevő paci szerelő számára fontos lehet. A csupán az opció kiírásával foglalkozó bankokat az érdekli, milyen volatilitást vár a piac a jövőben az egyes periódusokban. De fontos lehet a kérdés a spekulánsok számára is.

*Ha az opciót lejáratáig megtartjuk, és a volatilitás valóban megegyezik az implicit volatilitással, akkor a dinamikus  $\Delta$ -fedezés során realizált hozam éppen a kockázatmentes hozammal fog megegyezni. Ha azonban csak az opció futamidejénél rövidebb ideig folytatjuk ezt a stratégiát, a realizált hozam ennél magasabb lehet. Az arbitrázsórt tehát az opció egész futamideje érdekli, a spekulánst azonban nem feltétlenül!*

Ugyanígy a kötvények esetén a fedezeti ügyletkötőt, illetve az arbitrázsórt nem a hozamgörbe valós jövőbeli alakja érdekli, hanem az, hogy hogyan viszonyul a most kiszámított hozamgörbével beárazott kötvény ára a többi kötvényéhez. A spekuláns azonban arra kíváncsi, hogyan alakul a hozamgörbe a jövőben, illetve ha a várakozási elmélet szerint haladunk, mennyire becsli jól a forward görbe a jövőbeli hozamokat.

Hasonlóan az implicit volatilitás sem a spekuláns, hanem a fedezeti ügyletet kötő, illetve az arbitrázsórt számára fontos. A spekulánst az izgatja, mennyire jelzi ez jól előre a jövőbeli volatilitást.

Célunk tehát az lesz, hogy a piacon kereskedett opciók implicit volatilitásának felhasználásával azokat a különböző jövőbeli időpontok közötti volatilitásértékeket határozzuk meg, amelyek a piaci árakban benne foglaltatnak.

Igy lesznek alkalmasak ezek a modellek a későbbiekben más, akár egzotikus opciók értékének a többi piacon forgalmazott opció értékével összhangban történő árazására, illetve – akinek arra van szüksége – a jövőbeli volatilitás előrejelzésére.

A kialakított modellek diszkrét idejűek, az alapjuk általában a (Cox–Ross–Rubinstein-féle) binomiális vagy trinomiális fa, illetve a véges differenciák módszere. Ennek megfelelően a számolás eredményeképpen egy jövőbeli árfolyam fát kapunk eredményül, ahol a jövőben a részvényárfolyam csak bizonyos időpontokban bizonyos értékeket vehet fel.

A bemutatott modellek nem csupán a könyvtárak és az elméleti közgazdászok számára készültek. Derman és Kani modellje a Goldman Sachs által árusított szoftver alapja, amelyet bankok és intézményi befektetők számára árusítanak. A modell célja alapvetően a volatilitás előrejelzése.

Bár Rubinstein modelljét a gyakorlatban ritkábban alkalmazzák, az egyik legtisztább és legegyszerűbben használt visszaszámított modell. Ez inkább más derivatívok piaci árakkal összhangban lévő árazására használatos. Gyakorlatilag megoldja azt a gondot, hogyan tudunk amerikai vagy egzotikus opciókat időben változó volatilitás mellett árazni.

Rebonato modelljét azért mutatom be, mert egy másik, a gyakorlatban egyre inkább elterjedő modellre, a véges differenciák módszerére épít. Nem foglalkozom ugyanakkor a trinomiális modellekre épülő modellekkel.<sup>4</sup> Ennek az az oka, hogy ezek a gyakorlatban lényegesen szűkebb körben használtak, mint a binomiális modellek és a véges differenciák módszere.<sup>5</sup>

<sup>4</sup> Ezekről az érdeklődők az alábbi cikkekben olvashatnak: a Derman–Kani–Chriss-modellt részletesen bemutatja *Derman–Kani–Chriss* [1996], míg a Dupire modellről lásd *Dupire* [1994].

<sup>5</sup> A véges differenciák módszere és a trinomiális modellek amúgy is megfeleltethetők egymásnak. Erről lásd *Hull* [1999].

A Derman–Kani-modell<sup>6</sup>

Derman és Kani eljárásának lényege, hogy az opciók árát ismertnek véve, az opciók árából határozza meg a binomiális fa minden egyes pontját, illetve azt, hogy milyen módon és milyen valószínűséggel juthatunk el oda. Mivel a fa alakjára az opciók árából következtetünk vissza, semmi sem garantálja, hogy az emelkedés és csökkenés mértéke minden egyes pontban azonos lesz. Ennek megfelelően az adott ponthoz tartozó volatilitás, az úgynevezett helyi volatilitás minden egyes periódusban más és más lehet.

A Derman–Kani-modell alapja a binomiális modellek egyik legelterjedtebb verziója, a Cox–Ross–Rubinstein-modell. Mint ismert, ez utóbbi modellben az emelkedés mértéke  $u$  (*up*) és a csökkenés mértéke  $d$  (*down*) egymás reciprokai, ahol az emelkedés mértékét, az  $u$ -t az

$$u = e^{\sigma\sqrt{t}} \quad (1)$$

képlet határozza meg.

Változó volatilitás esetén a volatilitás időről időre változik, azaz a  $\sigma$  értéke minden egyes csomópontban más és más lesz. Ennek megfelelően változik az  $u$  értéke is. Ebből viszont az következik, hogy a fa elveszti szép szabályos alakját, „hullámzóvá” válik. A Derman–Kani-modellben éppen ezt a „hullámzó”, azaz semmiképpen sem szabályos fára próbálunk az opciók árából következtetni, és ez a minden periódusban változó volatilitásérték lesz a helyi volatilitás.

A fa felépítését a nulladik időpontból, azaz a ma ismert azonnali árfolyamból indítjuk, majd innen haladunk előre periódusról periódusra.

A fa felépítéséhez minden egyes időbeli lépést azonos,  $\Delta t$  nagyságúnak tételezünk fel. Az általánosság kedvéért tegyük fel, hogy az első  $n$  lépést már megtettünk, és most lépünk tovább az  $n + 1$ -edik időpontra. Ennek megfelelően ismertek az  $n$ -edik időszak árai, illetve ezen árak bekövetkezésének valószínűségei. Legyen a folytonosan számított kockázatmentes forward hozam  $r$ . Ennek természetesen szintén adhatnánk egy indexet, hiszen forward hozamról van szó, ami minden egyes  $\Delta t$  lépés után módosul. A továbbiakban ezzel a kérdéssel az egyszerűség kedvéért nem foglalkozunk, feltesszük, hogy a kockázatmentes hozam minden periódusban ugyanakkora.<sup>7</sup>

Az  $n + 1$ -edik időpontban összesen  $n + 1$  csomópontunk van, és azokban  $n + 1$  ismeretlen  $S_i$  árfolyam. Jelölje tehát  $i$  a szintet, azaz azt, hogy az  $n + 1$ -edik időszakban milyen „magasan” vagyunk. Legyen  $S_1$  a legalacsonyabb,  $S_{n+1}$  pedig a legmagasabb árfolyam ebben a periódusban. Jelölje  $s_i$  az  $n$ -edik időszakban érvényes (már ismert) spot árfolyamot az  $i$ -edik szinten.

Jelölje  $p_i$  annak valószínűségét, hogy az árfolyam az  $n$ -edik időszaki  $i$ -edik szintről emelkedik. A csökkenés valószínűsége természetesen  $1 - p_i$ . Legyen továbbá  $\lambda_i$  az  $(n, i)$  csomópontban érvényes Arrow–Debreu-ár.<sup>8</sup> A fa felépítését és a fenti változók elhelyezkedését a 2. ábra bal oldala mutatja.

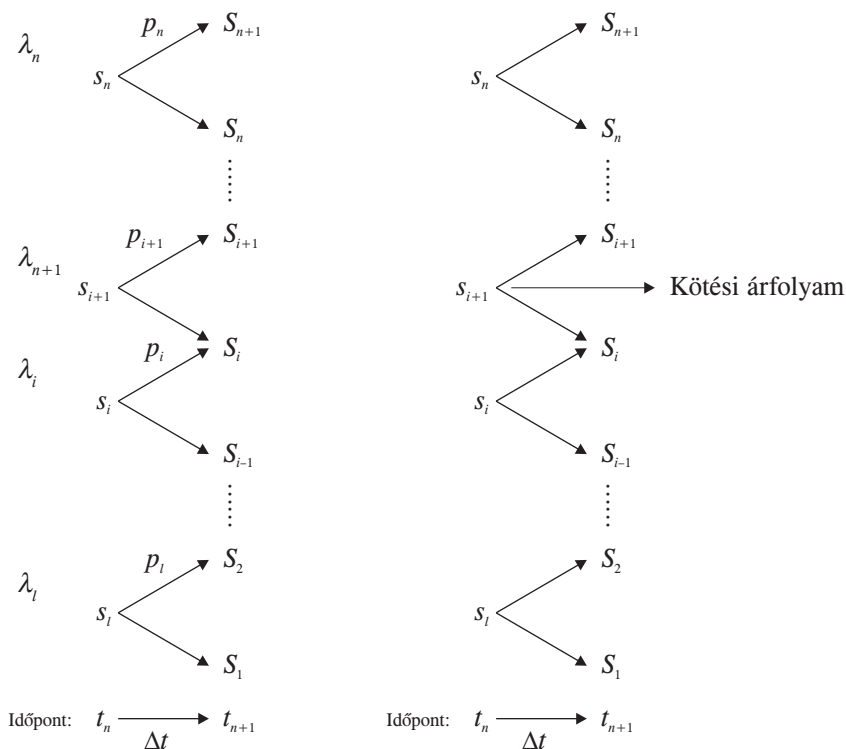
Összesen tehát  $2n + 1$  változónk van:  $n + 1$  jövőbeli részvényárfolyam, és  $n$  darab valószínűség. Ennek meghatározásához, hogy az egyenletrendszer jól determinált legyen, éppen  $2n + 1$  egyenletre van szükségünk. Ehhez az  $n$  darab  $s_i$  értékekből számított  $n$  darab határidős árfolyamot ( $F_i$ ), valamint  $n$  darab  $s_i$  kötési árfolyamú opció árfolyamát fogjuk felhasználni.

<sup>6</sup> Az alfejezet Derman–Kani [1994] cikke alapján készült.

<sup>7</sup> Vegyük észre, hogy ez a tiszta várakozási elmélet esetében gyakorlatilag a vízszintes hozamgörbe feltételezésével azonos.

<sup>8</sup> Ezt a korábbi valószínűségek szorzatának diszkontált értékeként fogjuk megkapni minden egyes időpontban. Az Arrow–Debreu-árakat szokták még állapotáraknak vagy Green-függvénynek is nevezni.

2. ábra



A határidős árfolyamok számítása egyszerű, legyen az  $s_i$ -ből számított forward árfolyam:<sup>9</sup>

$$F_i = s_i e^{r\Delta t}. \quad (2)$$

Az opciók olyan opciók lesznek, amelyekről feltesszük, hogy ma, azaz a nulladik időszakban bocsátják ki őket, az  $n + 1$ -dik periódusban fognak lejárni, az árazásukhoz felhasznált volatilitás pedig éppen a piacon meghatározott implicit volatilitás.

Természetesen a piacon nem jegyeznek minden lejáratra és kötési árfolyamra opciókat. A hiányzó esetekben magunk határozzuk meg az opció árát, ezt szerepeltetve „piaci” értéként. Az árazáshoz szükséges egyetlen ismeretlen paraméter a volatilitás, amit az implicitvolatilitás-függvény felhasználásával kapunk meg.<sup>10</sup> Kötési árfolyamuk  $s_i$ , azaz mindig az abban a pontban érvényes árfolyam, ahonnan továbblépni szándékozunk (lásd a 2. ábra jobb oldalát).<sup>11</sup> A kérdés csak az, hogy a vételi vagy az eladási opciókat alkalmazzuk. Derman és Kani OTM opciók használatát javasolja, mert abban már csak a volatilitás és az idő értéke szerepel.<sup>12</sup> Ezért a „középső” (azaz a mai) árfolyam alatt az eladási, attól felfelé a vételi opciókat fogjuk használni.<sup>13</sup>

<sup>9</sup> Az osztalékoktól ezen a ponton tekintsünk el.

<sup>10</sup> Azaz a volatilitásmosolyt és a volatilitás lejárat szerkezetét felhasználva, magunk adunk meg „piaci” árfolyamokat.

<sup>11</sup> Természetesen az opciók „piaci” árát többféleképpen is megkaphatjuk. Használhatjuk a binomiális és a Black-Scholes-képletet is. *Rebonato* [1999] bemutatta, hogy a folytonos megközelítés használata, bár kétségkívül gyorsabb lehet, zajt okoz, numerikus hibát generál.

<sup>12</sup> Ezeknek az opcióknak már csak görbületi értékük van. Részletesebben lásd *Száz* [1999].

<sup>13</sup> Mert a mai árfolyam alatti kötési árfolyamú eladási, illetve az afeletti kötési árfolyamú vételi opciók lesznek OTM-ek.

Adva van már tehát  $2n$  egyenlet,  $n$  határidős és  $n$  opciós árfolyam. A hiányzó egy szabadságfokot a Cox–Ross–Rubinstein-modell fogja megadni. Használjuk fel a Cox–Ross–Rubinstein-modell azon feltevését, hogy a fel-, illetve a lefelé a mozdulás mértékének szorzata 1 (*centring condition*).

A számítás során minden periódusban középről indulunk. Ha az adott periódusban páratlan pont van, a középső árfolyam a mai árfolyammal lesz azonos. Ha páros, a két középső árfolyam logaritmusának számtani átlagát tesszük egyenlővé a mai árfolyam logaritmusával, azaz

$$\ln S_0 = \frac{\ln S_1 + \ln S_2}{2} \rightarrow \ln S_0^2 = \ln (S_1 \cdot S_2) \rightarrow S_0^2 = S_1 \cdot S_2. \quad (3)$$

Persze páratlan pont esetén más lehetőségünk is lehetne. Derman és Kani utal rá, hogy a „középső árfolyam” lehet a mai azonnali, de lehet az adott időpontra számított határidős árfolyam is. A továbbiakban Derman és Kani eredeti modellje szerint haladva, használjuk fel a jelenlegi azonnali árfolyamot.

Az eddigiekben tehát röviden megnéztük, hogyan is kapjuk meg a  $2n + 1$  változót. Vizsgáljuk meg ezt most részletesebben, és írjuk fel a fát meghatározó egyenleteket!

Az opciók árazásához kockázatmentes valószínűségeket használunk fel, azaz az árazásra használt fa kockázatmentes. Ebből következően annak a fának, amelyet opciók árából számolunk vissza, szintén kockázatmentesnek kell lennie. Így igaznak kell lenni annak is, hogy a jövőbeli, prompt árfolyam várható értéke megegyezik a határidős árfolyammal, azaz:

$$F_i = p_i \cdot S_{i+1} + (1 - p_i) \cdot S_i. \quad (4)$$

Minden  $i$  szintre van egy ilyen egyenlet, és mivel az  $n$ -edik periódusban éppen  $n$  szint van, összesen  $n$  darab ilyen egyenletünk lesz. Azaz, mivel a határidős árfolyamok értékét a (2) egyenletben lévő képlettel kiszámolhatjuk, a (4) egyenletben az ismeretlen éppen a keresett valószínűség, illetve a jövőbeli ( $n + 1$ -edik periódusbeli árfolyam) lehet.

A következő  $n$  változót az  $n$  darab, a  $n + 1$ -edik időszakban lejáró opció adja meg.<sup>14</sup> Olyan opciókat fogunk felhasználni, hogy kötési árfolyamuk az előbb elmondottaknak megfelelően mindig a megfelelő  $s_i$ .<sup>15</sup> Azaz az eljárás most is hasonló a határidős árfolyamnál látottakhoz. Az opció ára a piacról ismert. A cél az opció értékét a valószínűségek és a jövőbeli részvényárfolyamok függvényében felírni, hogy ezáltal az utóbbiak számíthatók legyenek. Az opciók értékének felírásához ennek megfelelően az Arrow–Debreu-papírokat, illetve azok árát fogjuk felhasználni.

Az Arrow–Debreu-papír olyan értékpapír, amelyik egy  $n$ -edik időszak egy adott pontjában [például a fa  $(n, i)$  pontjában] egy forintot fizet, egyébként nullát. Az Arrow–Debreu-ár ( $\lambda$ ) ennek a papírnak az ára. Ennek megfelelően a  $n$ -edik időszakban lejáró opció értékét a  $\lambda$ -k és az opció kifizetések szorzata adják meg. Diszkontálásra nincs szükség, hiszen az Arrow–Debreu-papír ára már mai pénzben van kifejezve.

Az implicit fák meghatározásánál azonban egy olyan opcióval foglalkozunk, amelyik nem az  $n$ -edik, hanem az  $n + 1$ -edik időszakban jár le. Így nem pusztán szorzunk az Arrow–Debreu-papírok áraival, hanem módosítanunk kell valamennyit az eljárásán. Felhasználva, hogy az Arrow–Debreu-papírok ára a valószínűségek szorzatának diszkontált

<sup>14</sup> Az ugyanolyan kötési árfolyamú vételi és eladási opciók nem jelentenek külön, egymástól független megoldást, hiszen a put-call paritás megteremti közöttük a kapcsolatot.

<sup>15</sup> Azaz minden egyes csomóponthoz egy-egy opciót rendelünk hozzá. A vételi opciók esetében az opció értékét csak  $S_{i+1}$  és az ennél nagyobb részvényárfolyamok, eladási opciók esetében  $S_i$  és az ennél kisebb részvényárfolyamok fogják meghatározni.

értékével azonos, továbbá azt, hogy a fa egy pontjába, ha az nem a szélen helyezkedik el, két úton juthatunk el, igaz az, hogy

$$\lambda_{n+1,i} = e^{-r\Delta t} \cdot [p_{i-1}\lambda_{n,i-1} + (1-p_i)\lambda_{n,i}].^{16} \quad (5)$$

Ezt felhasználva, az opció értéke:

$$C(K, t_{n+1}) = e^{-r\Delta t} \sum_{j=1}^n [\lambda_j p_j + \lambda_{j+1}(1-p_{j+1})] \max(S_{j+1} - K, 0). \quad (6)$$

Ugyanakkor ne feledjük, hogy az implicit fák módszerének lényege, a binomiális fát felfedni. Ezért az adott futamidőhöz tartozó európai opciók piaci árát ismertnek vesszük, illetve ha a piacon éppen nem kereskednek vele, a hagyományos Cox–Ross–Rubinstein-moddellel meghatározzuk.<sup>17</sup> Mivel a cél a fenti egyenlet jobb oldalán szereplő értékek explicit módon történő kifejezése, ezért az egyenletet át kell rendeznünk.

A  $K = s_i$  helyettesítést elvégezve, és a fenti képletben az  $S_{i+1}$  értékhez tartozó kifizetést elkülönítve, továbbá felhasználva a határidős árfolyamokra vonatkozó (4) egyenletet, az (6) egyenlet a következőképpen módosul:<sup>18</sup>

$$e^{r\Delta t} C(s_i, t_{n+1}) = \lambda_i p_i (S_{i+1} - s_i) + \sum_{j=i+1}^n \lambda_j (F_j - s_i). \quad (7)$$

Mivel a szummás tag csupa ismert tényezőt tartalmaz, minden pontban a már meglévő adatokból számítható, így a továbbiakban ezt az egyszerűség kedvéért csak egy  $\Sigma$ -val fogjuk jelölni.

Mivel tehát mind a határidős árfolyamok, mind az opciók ára ismert, a (4) és a (7) egyenleteket szimultán módon megoldhatjuk, kifejezve  $S_{i+1}$ , valamint  $p_i$  értékeket.

$$S_{i+1} = \frac{S_i \cdot [e^{r\Delta t} \cdot C(s_i, t_{n+1}) - \Sigma] - \lambda_i s_i (F_i - S_i)}{[e^{r\Delta t} C(s_i, t_{n+1}) - \Sigma] - \lambda_i (F_i - S_i)} \quad (8)$$

$$p_i = \frac{F_i - S_i}{S_{i+1} - S_i}. \quad (9)$$

Ha  $S_i$  értékét ismernénk, az  $S_{i+1}$  és  $p_i$  értékeket, illetve ez utóbbiból  $\lambda_i$  értékeket könnyen kiszámíthatnánk. Ezt a hiányzó szabadságfokot fogja a Cox–Ross–Rubinstein-modell már említett centralitási feltétele szolgáltatni.

Az  $S_i$  meghatározásakor figyelembe kell vennünk, hogy az adott időperiódusban páros vagy páratlan csomópont van-e. A megoldás ennek megfelelően más lesz akkor, ha az adott periódusban páros, és más, ha páratlan csomópont található.

Ha páratlan, a középső értéket egyenlővé tesszük a mai árfolyammal, így  $S_i$  adott, a fán fel-, illetve lefelé haladva a szükséges értékek meghatározhatók. Amennyiben az adott időszakban páros elemünk van, a (5) egyenletet fogjuk felhasználni. Tehát

$$S_i = \frac{S^2}{S_{i+1}}. \quad (10)$$

<sup>16</sup> Az, hogy  $\lambda$ -nak ebben az egyenletben két indexe van, természetesen csak a megértést könnyíti. A  $\lambda_{n+1,i}$  ebben az esetben azt jelenti, hogy a  $n + 1$ -edik periódus  $i$ -edik szintjének bekövetkezése esetén egyet fizet, egyébként semmit. Ebbe a pontba pedig két úton juthatunk el. A továbbiakban alapvetően a  $n$ -edik időszak Arrow–Debreu-áraitól beszélünk, így az index első felét elhagyjuk.

<sup>17</sup> A továbbiakban az implicit fa meghatározásához európai opciókat fogunk használni. A modellt kiterjeszthető amerikai opciókra is, amelyet *Chriss* [1997] mutat be.

<sup>18</sup> Legyen  $K = s_j$ . Írjuk fel a lehetséges árfolyamokat a következő módon:  $S_1 < S_2 < \dots < S_{i-1} < s_i < S_{i+1} < \dots < S_{n+1}$ . Ennek megfelelően az opció kifizetésfüggvénye  $s_i$  alatt, azaz  $j = i$ -ig nulla lesz.

Legyen  $S = s_i$ , azaz az előző periódus – ami páratlan elemet tartalmaz – középső pontja. Ezt a feltételt felhasználva és a (8) egyenletbe helyettesítve

$$S_{i+1} = \frac{S[e^{r\Delta}C(S, t_{n+1}) + \lambda_i S - \Sigma]}{\lambda_i F_i - e^{r\Delta}C(S, t_{n+1}) + \Sigma}, \quad \text{ahol } i = n/2. \quad (11)$$

A középső pontok alatti értékeket, mint arról már szó volt, nem a vételi, hanem az eladási opciókkal határozzuk meg. A képlet ebben az esetben a következőképpen módosul:

$$S_i = \frac{S_{i+1}[e^{r\Delta}P(s_i, t_{n+1}) - \Sigma] + \lambda_i s_i (F_i - S_{i+1})}{[e^{r\Delta}P(s_i, t_{n+1}) - \Sigma] + \lambda_i (F_i - S_{i+1})}, \quad (12)$$

ahol  $\Sigma$  ebben az esetben az eladási opciónak megfelelően a

$$\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j (s_j - F_j). \quad (13)$$

Ha ezeken a lépéseken végigmegyünk, sikerül a volatilitásmosoly felhasználásával, azzal összeillő módon felvázolni a kockázatmentes binomiális fát.

Ebből a fából aztán a részvényárfolyamok és valószínűségek segítségével az adott pontban érvényes helyi volatilitás (*local volatility*) már kiszámítható. Legyen a mai árfolyam  $S_0$ , áremelkedés esetén a következő időszaki árfolyam legyen  $S_u$ , csökkenés esetén  $S_d$ . Az éves szintre arányosított hozam ezekben az esetekben:

$$r = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln\left(\frac{S_u}{S_0}\right), \quad \text{illetve} \quad r = \frac{1}{t_1 - t_0} \ln\left(\frac{S_d}{S_0}\right). \quad (14)$$

Innen a várható hozam:

$$r = \frac{p}{t_1 - t_0} \ln\left(\frac{S_u}{S_0}\right) + \frac{1-p}{t_1 - t_0} \ln\left(\frac{S_d}{S_0}\right). \quad (15)$$

A hozam helyi szórása pedig:

$$\sigma_{loc} = \frac{1}{\sqrt{t_1 - t_0}} \sqrt{p(1-p)} \ln\left(\frac{S_u}{S_d}\right). \quad (16)$$

Ennek megfelelően a fa, illetve az egyes csomópontokhoz tartozó valószínűségek ismeretében a helyi volatilitások minden egyes pontban kiszámíthatók.

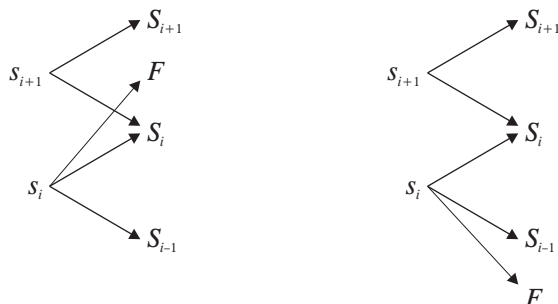
A fenti eljárással a piaci árakhoz illeszkedő kockázatmentes fát kaptunk. Gyakorlatilag azt határoztuk meg, hogy a piac milyen jövőbeli részvényárfolyam mozgást „tervez”. Ennek megfelelően a kiszámított árfolyamokból és valószínűségekből meghatározható, hogy a piac milyen jövőbeli kockázatmentes valószínűség-eloszlást használ az opciók árazása során.

A fentiekben elmondottak arra a feltevésre épültek, hogy az implicit fát európai opciók felhasználásával számítjuk ki. Chriss bemutatja a fenti modell egy olyan kiterjesztését, ahol az inputárak lehetnek mind európai, mind amerikai opciók árai (Chriss [1997] 369–379. o.). Terjedelmi korlátok miatt ennek ismertetésétől eltekintek, de Chriss könyvében a modell részletes leírását is megadja.

A fa felvázolása után már csak egy tényező van hátra, az arbitrázsmentesség biztosítása. Ez a fa esetében azt jelenti, hogy a valószínűségeknek nulla és egy közé kell esniük.

Ez a kijelentés azonos azzal, hogy a határidős áraknak, amelyek a fa kockázatmentes jellege miatt megegyeznek a jövőben várható azonnali árfolyamokkal, a következő időszak felső és alsó árfolyamai közé kell esniük – lásd a (9) egyenletet. Ha a piaci adatokból számított részvényárfolyam a fenti feltételt megsérti, valami mással kell helyettesíteni. Többfajta megoldás létezik, amivel a „rossz” valószínűséget egy „jó” valószínűségre cseréljük ki. Egy természetes – és a Cox–Ross–Rubinstein-moddal illeszkedő – megoldás lehet, ha az árfolyamot úgy módosítjuk, hogy a két árfolyam közötti távolság az előző időszak meghatározott pontjai közötti távolsággal legyen azonos (3. ábra.)

3. ábra



Az azonos távolság azért kerül a középpontba, mert a távolságot a helyi volatilitás határozza meg. A (14)–(16) egyenletek alapján látható, hogy a helyi volatilitást a felső és az alsó árfolyam, illetve azok távolsága, egyértelműen meghatározza.

Ennek megfelelően, ha a határidős árfolyam az alsó árfolyamnál kisebb lenne (3. ábra jobb oldala), a korigált alsó árfolyam legyen

$$S'_i = \frac{S_{i+1}S_i}{S_{i+1}}. \quad (17)$$

Ha a határidős árfolyam a felső árfolyamnál is nagyobb (3. ábra bal oldala), a korigált felső árfolyam legyen

$$S'_i = \frac{S_{i+1}S_{i-1}}{S_i}. \quad (18)$$

Előfordulhat azonban olyan eset is, amikor ez a képlet továbbra sem szolgáltat „jó”, nulla és egy közé eső valószínűségeket, azaz a forward árfolyam még mindig kívül esik a tartományon, egy ennél erősebb módosítást kell végrehajtani. Chriss erre az esetre azt javasolja, hogy az adott csomópontban esedékes árat úgy határozzuk meg, hogy a határidős árfolyam éppen a kívánt tartományba essen (Chriss [1997] 383. o.), azaz például a 3. ábrán baloldalt szereplő esetben

$$S'_i = e^{r\Delta t} s_i - \varepsilon, \quad (19)$$

ahol  $\varepsilon$  egy exogén, tehát nem a piaci adatokból számított, hanem az adott körülményeknek megfelelő kis szám. Az  $\varepsilon$ -ra természetesen végtelen számú megoldás létezik. Vegyük mindig ezek közül a legkisebbet.

A jobb oldali esetben természetesen a

$$S'_i = e^{r\Delta t} s_i + \varepsilon \quad (20)$$

képletet használjuk.

Ha túl sok csomópontban hajtunk végre efféle módosítást, az nagymértékben torzítja a

modellből nyert információt. A „hamis” csomópontok beépítésével éppen a kezdeti célkitűzésünkkel, azaz azzal ütközünk, hogy minél több piaci információt gyűjtsünk össze. Természetesen a rossz csomópontok kicserélésének hatása a fa különböző pontjain nem azonos. Ha a fa szélén hajtunk végre korrekciót, a hatás kisebb lesz. Ezekhez az értékekhez ugyanis kisebbek a csomópontokhoz tartozó Arrow–Debreu-árak, mivel ezen esetek bekövetkezésének valószínűsége is kisebb. Ritkábban jutunk el ezekbe a pontokba, így az opció értékére gyakorolt hatásuk is kicsi.

A negatív valószínűségek kiküszöbölésének egy másik lehetséges megoldása, ha binomiális helyett trinomiális fát alkalmazunk az implicit információk feltárására. Ez azonban, mint arról már szó volt, túlmutat a jelen dolgozat keretein, és a trinomiális modellek a gyakorlatban sem terjedtek el annyira, mint a binomiálisak.

A Derman–Kani-modell további problémája, hogy amennyiben a piaci változásokat a modellben nyomon akarjuk követni, úgy szinte mindennap, eseménydúsabb napokon akár naponta többször újra kell számítanunk. Mivel a fa megszerkesztése nem túl egyszerű, főleg ha a negatív valószínűségek előbb tárgyalt problémáját is szem előtt tartjuk, ez igen sok számítást tesz szükségessé. Ez a probléma a fa megszerkesztésének programozásával természetesen csökkenthető. A negatív valószínűségek kiküszöbölése azonban nem rutinszerű feladat az ott alkalmazott feltevésekre jó odafigyelni, különösen a modell kialakításának és használatának első hónapjaiban.

### A Rubinstein-modell

A Rubinstein által felépített implicitfa-modell alapvetően különbözik Derman, Kani és Chriss modelljeitől. Az előző modellekben az inputparaméterek a mai részvényárfolyam, a kockázatmentes hozam és a volatilitásmosoly függvénye, illetve az ebből *számított opciós árak* voltak.<sup>19</sup> Ennek eredményeként előre felé számolva kaptuk meg később a binomiális fát, az egyes csomópontokban érvényes helyi volatilitást és az adott időszak árfolyamainak valószínűségeloszlását.

Ezzel szemben Rubinstein azt feltételezi, hogy a piaci szereplők az alaptermék *azonnali árfolyamán*, a piacon jegyzett *opciók árán* és a *kockázatmentes hozam* ismeretén túl valamifajta ismerettel (vagy véleménnyel) rendelkeznek arról, hogy *n periódus múlva az árfolyamok milyen eloszlást követnek*. Az így számított fa *n* periódus hosszú lesz, és az *n*-edik periódus végén tapasztalt eloszlás éppen a feltételezett eloszlás lesz. Ezeket felhasználva, a fa „végéről” elindulva számítjuk ki a korábban lehetséges árfolyamokat és ezek valószínűségét.

A kérdés az, honnan ismerik a piaci szereplők az *n* periódus múlva érvényes eloszlást. Rubinstein utalt arra, hogy előtte ezzel a témával már többen foglalkoztak a szakirodalomban. Így például Longstaff (idézi *Rubinstein* [1994]), aki a piacon jegyzett opciós árakból próbált hisztogramot rajzolni. Felteszi, hogy létezik egy olyan  $K_n$  kötési árfolyam, amit nulla valószínűséggel fog meghaladni az alaptermék lejáratkori árfolyama. Felteszi továbbá, hogy a piacon kereskedett (diszkrét számú) opciók kötési árfolyama közötti árfolyamok bekövetkezési valószínűsége kockázatmentes világban azonos. Azaz például az összes  $K_i$  és  $K_{i+1}$  közötti árfolyam ugyanolyan kockázatmentes valószínűséggel következik be az opciók lejáratakor. Ezzel a módszerrel próbál egy sematikus, hisztogramszerű kockázatmentes valószínűségeloszlást rajzolni. Rubinstein a modell tesztelése alapján arra a következtetésre jutott, hogy alkalmazása negatív valószínűségekre vezethet, így számára nem megfelelő.

<sup>19</sup> Mint arról már volt szó, a volatilitás és az opció ára ugyanolyan összefüggő, egymást kölcsönösen meghatározó tényezők, mint a kötvény és a hozam. Az egyik ismerete a másikat egyértelműen meghatározza.

Egy másik – Rubinstein által ugyancsak vizsgált – eljárás Shimko nevéhez fűződik. Ő a korábban a Breeden és Litzenberger által kifejlesztett módszer alkalmazását mutatja be a gyakorlatban (Shimko eljárásait idézi *Rubinstein* [1994] és *Kim* [2000]). *Breeden–Litzenberger* [1978] megmutatta, hogy amennyiben kontinuum számosságú, azonos időpontban lejáró európai opcióknak van, amelyek kötési árfolyama a nullától a végtelenig terjed, az arra az időszakra teljes kockázatmentes valószínűség eloszlás meghatározható, ha az opció árának kötési árfolyam szerinti második deriváltját használjuk fel.<sup>20</sup>

Shimko először véges számú opció felhasználásával meghatározta az opciók implicit volatilitását, majd ehhez görbét illesztve kirajzolta a volatilitásmosolyt. Azaz meghatározta a  $K \propto C(K, T)$  függvényt, ez adja az interpolált Black–Scholes-féle implicit volatilitásokat. Végül Breeden és Litzenberger eljárását alkalmazva, a Black–Scholes-modell második deriváltjába helyettesítve határozza meg az implicit kockázatmentes sűrűségfüggvényt a két szélső kötési árfolyam között.<sup>21</sup>

Bár ez a modell jobban állta a teszteket, Rubinstein maga is kialakított egy egyszerű eljárást. Mivel a végső cél egy binomiális fa visszaszámítása, az induló valószínűség-eloszláshoz is a binomiális modellt alkalmazta. Egy hagyományos standard Cox–Ross–Rubinstein-modellből indult ki. Javaslatára szerint használjuk fel az ATM opciók implicit volatilitását, majd szerkesszünk egy hagyományos Cox–Ross–Rubinstein-fát, és ennek eredményeképpen számoljuk ki, hogy milyen árfolyamok és milyen kockázatmentes valószínűségek mellett következhetnek be a kérdéses  $t_n$  időszakban. Ezt tekintette a továbbiakban a kiinduló valószínűségeloszlásnak.

Emellett természetesen ő is feltette, hogy ismert az azonnali árfolyam, a kockázatmentes hozam, valamint a piacon jegyzett opciók ára. Azonban szemben a Derman–Kani-eljárással, Rubinstein nem az OTM opciókra koncentrált, hiszen célja nem a helyi volatilitás felülértékelés meghatározása volt, hanem az implicit fa értékeinek megkeresése. A számoláshoz Rubinstein vagy csak a vételi, vagy csak az eladási opciókat használja fel. Amennyiben egy adott kötési árfolyamra a piacon nincsenek csak vételi vagy csak eladási opciók, a put-call paritás segítségével származtathatjuk a számunkra szükséges piaci árat.

További különbség, hogy míg Derman és Kani több különböző futamidejű opció árát felhasználja, addig Rubinstein csak a fa utolsó  $n$ -edik periódusában (azaz a  $t_n$  időpontban) lejáró opciókkal foglalkozott.

A továbbiakban legyenek az  $n$  periódus múlva (a  $t_n$  időpontban) lejáró vételi opciók árai rendre  $C_1, C_2, \dots, C_m$  illetve az ezekhez az opciókhoz tartozó kötési árfolyamok  $K_1, K_2, \dots, K_m$ . Legyen a mai időpont  $t_0$ , a fa utolsó időpontját jelző jövőbeli időpont pedig  $t_n$ . Jelölje  $S_0$  a mai,  $S_{n,i}$  az  $n$ -edik periódus  $i$ -edik szintjén elhelyezkedő csomópontot. Legyen továbbá  $r$  a folytonosan számított kockázatmentes hozam,  $d$  pedig a folytonosan számított osztalékhozam.<sup>22</sup> Legyen  $P_i$  ( $i = 1$ -től  $n + 1$ -ig) annak valószínűsége, hogy a fán az  $(n, i)$  pontba jutunk.

Mindezek ismeretében az első lépés egy, már a piacon jegyzett opciók árával is összhangban lévő valószínűségeloszlás meghatározása oly módon, hogy a standard Cox–Ross–Rubinstein-modellből becsült valószínűség (a továbbiakban  $P'$ ) és az opciók árak felhasználásával becsült (a továbbiakban  $P$ ) valószínűség a lehető legkisebb mértékben térjen el egymástól.

<sup>20</sup> Bemutatták, hogy ez a kötési árfolyam szerinti második derivált éppen a keresett sűrűségfüggvény. Lásd *Breeden–Litzenberger* [1978].

<sup>21</sup> Itt kell megjegyezni, hogy bár Shimko felhasználja a Black–Scholes-modellt, eljárásához nem szükséges az, hogy a Black–Scholes-modell a valóság hű képét adja vissza. Ő csak mint eszközt használja fel azt.

<sup>22</sup> Rubinstein az opciók árazásához használt volatilitást a piacon lévő opciókból számított implicit volatilitások interpolálásával nyeri, akárcsak a Derman–Kani-szerzőpáros.

Azaz célunk a (21) függvény megoldása:

$$\sum_{i=1}^{n+1} (P_i - P_i')^2 \rightarrow \min. \quad (21)$$

A peremfeltételek a következők:

$$\sum_{i=1}^{n+1} P_i = 1 \quad \text{és} \quad P_i \geq 0, \quad (22)$$

$$C_j = e^{-r(t_n - t_0)} \sum_{i=1}^{n+1} P_i \max(S_{n,i} - K_j, 0), \quad \text{ahol } j = 1, \dots, m. \quad (23)$$

$$S_0 = e^{-(r-d)(t_n - t_0)} \sum_{i=1}^{n+1} P_i S_{n,i}. \quad (24)$$

A fenti célfüggvény megoldásával kapjuk a modellben a továbbiakban felhasznált „becsült” valószínűségeket. A (22) egyenlet biztosítja, hogy a valószínűségek nulla és egy közé essenek, azaz „valódi” valószínűségek legyenek. A (23) azt biztosítja, hogy az eloszlás illeszkedjen a piachoz, azaz jól árazza az adott futamidejű opciókat. Az utolsó peremfeltétel szerint a jövőbeli várható értékek az osztalékok figyelembevételével jelenre diszkontált értéke egyezzen meg a mai árfolyammal. Ennek az utolsó feltételnek kettős szerepe van. Egyrészt ez biztosítja, hogy a kapott fa kockázatmentes legyen, hiszen csak a kockázatmentesség feltételezése mellett igaz, hogy a jövőbeli várható árfolyam megegyezik a határidős árfolyammal. A másik szerepe az, hogy elérje: a fa végéről előre felé haladva az utolsó lépésben éppen a mai árfolyamot kapjuk vissza.<sup>23</sup>

Ezek a feltételezések nem voltak túl erősek, mondhatni „adták magukat”. Elegendők azonban ahhoz, hogy a számos valóshoz közeli eloszlásból megadják azt, amelyik valóban megfelel céljainknak, azaz a legfontosabbnak, hogy jól árazza az opciókat.

Rubinstein feltevései tehát eddig a következők voltak:

- a) az alaptermék árfolyama binomiális mozgást követ;
- b) a binomiális fa összekapcsolódó (azaz egy emelkedés és egy csökkenés ugyanoda vezet, mint egy csökkenés és egy emelkedés);
- c) a kamatláb minden periódusban azonos, állandó.

Míndezek felhasználásával megadható egy, a piaci adatokkal összhangban lévő  $n$  periódussal későbbi valószínűségeloszlás, ahol a lehetséges árfolyamokat az ATM opció volatilitásának felhasználásával szerkesztett standard Cox–Ross–Rubinstein-fa adja, míg az ezekhez tartozó valószínűségek már a piacon jegyzett opciók árával (és így a volatilitásmosollyal) is összhangban vannak.

A kérdés csak az, hogy mennyiben torzítja a becslést az, hogy a standard Cox–Ross–Rubinstein-modell volt a kiindulási alapunk. Máshogyan: nem befolyásolja-e az eredményt a kezdetben meglehetősen önkényesen választott, az ATM opciók volatilitása alapján felépített fa. Ez a piacon található opciók árának függvénye. Rubinstein úgy találta, hogy minél „sűrűbb” az opciók jegyzése, annál kevésbé függ a végső eredmény a kezdeti feltételezésektől. Ha az opciók száma elmarad a keresett csomópontok számától, a modell érzékeny lesz a kezdeti feltevésekre.

Ugyanezt találta a használt optimalizációs függvényt vizsgálva is. Megfelelő piaci információ esetén az általa is alkalmazott legkisebb négyzetek módszere alkalmas a probléma megoldására.

<sup>23</sup> Valójában Rubinstein eredeti cikkében ennél általánosabb megoldást ad. Az opciók áráiról, illetve a részvényárfolyamról felteszi, hogy a jegyzett vételi és eladási árfolyamok között van. Azaz olyan feltételek mellett is megadja a megoldást, amikor a piacon nem egyetlen árfolyam van. Mi ezt a továbbiakban nem vizsgáljuk.

Nézzük meg, hogyan számolhatók ki mindezek után a fa egyes pontjai! A valószínűségek azt mutatják, milyen eséllyel következnek be az adott állapot. Hogy ebből a fa korábbi periódusai is számíthatók legyenek, Rubinstein egy további feltételezéssel, az úgynevezett binomiális utak függetlenségével (*binomial path independence* – BPI) él. E szerint minden útnak, amelyik a fa egy adott csomópontjához elvezet, ugyanolyan a valószínűsége.

Egy egyszerű példával, ha a Cox–Ross–Rubinstein-modellben a fa összekapcsolódó, két periódus múlva visszatérhetünk a kiinduláskori árfolyamhoz. Ez vagy egy emelkedés és egy csökkenés, vagy egy csökkenés és egy emelkedés eredményeként állhat elő. Rubinstein fenti feltétele szerint mindkét úton való végighaladásnak ugyanaz a valószínűsége, mindkét utat ugyanolyan valószínűséggel járhatjuk be.

A „becsült” valószínűségeloszlás egyes értékeit, azaz az egyes csomópontok bekövetkezésének valószínűségeit ennek megfelelően el kell osztani az abba a csomópontba vezető utak számával, így meghatározva egyetlen befutásának a valószínűségét.

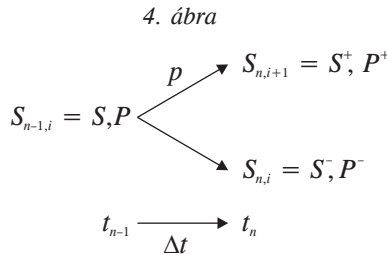
Ennek megfelelően tehát több, egymással szorosan összefüggő valószínűséget használunk.  $P$ -vel jelöltük egy adott pont bekövetkezésének valószínűségét, azaz a *pontvalószínűséget*. Ebbe a pontba azonban több úton juthatunk el. Egy-egy úton való végighaladás valószínűségét nevezzük a továbbiakban *útvalószínűségnek*. A fa egy adott  $(n, i)$  pontjába  $N$ -féle úton juthatunk el, ahol

$$N = \frac{n!}{i!(n-i)!}. \quad (25)$$

Ennek megfelelően minden egyes úton, ami az adott pontba visz

$$\frac{P_i}{N} = \frac{P_i i!(n-i)!}{n!} \quad (26)$$

útvalószínűséggel haladhatunk végig. Az is igaz ugyanakkor, hogy a fa egyik pontjából tovább haladva, a továbblépés valószínűségének (*emelkedésvalószínűség*) ismeretében az egyes pályák valószínűsége továbbra is ismert. Nézzük a 4. ábrát!



Az  $(n-1, i)$  pontból biztosan tovább lépünk,  $p$  valószínűséggel felfelé,  $(1-p)$  valószínűséggel lefelé. Ennek megfelelően az alsó és a felső pontba vezető utak valószínűségének összege megadja az  $(n-1, i)$  pontba vezető út valószínűségét.<sup>24</sup>

$$P = P^- + P^+. \quad (27)$$

<sup>24</sup> Ne feledjük el, hogy kétféle valószínűségről van szó! Kisbetűvel az egyik pontból a másikba való elmozdulás valószínűségét jelöljük, a nagybetű pedig az adott út valószínűségét jelenti!

A felső pontba vezető út valószínűsége a következő módon származtatható:

$$P^+ = p \cdot P \rightarrow p = \frac{P^+}{P} = \frac{P^+}{P^- + P^+}. \quad (28)$$

Ugyanakkor a valószínűségek és a második időpontbeli árak ( $S^+$ ,  $S^-$ ) ismeretében a forward egyenlet felhasználásával  $S$ , az első időszakos árfolyam is számítható:

$$S = e^{-(r-d)\Delta t} [pS^+ + (1-p)S^-]. \quad (29)$$

A fent leírtak egyben azt is megadják, hogyan építsük fel a Rubinstein-féle binomiális fát. Ismerve a végső valószínűségeloszlást (azaz az árakat és a valószínűségeket), visszafelé haladunk a fán.<sup>25</sup> Kiszámítjuk az utolsó előtti periódus emelkedéseinek és csökkenéseinek valószínűségét, azaz a kis  $p$ -ket [(28) egyenlet], majd ezek ismeretében a (29) felhasználásával kiszámítjuk az egy periódussal korábbi árfolyamokat, illetve a (27) alapján az ezekhez tartozó valószínűségeket, a nagy  $P$ -ket. Ahogy arról már szó volt, a (24) egyenlet fogja a (29) segítségével biztosítani, hogy visszafelé haladva az azonnali ár megegyezzen az  $S_0$  árfolyammal.

Rubinstein nem vetette el annak lehetőségét sem, hogy a piaci szereplők, amennyiben saját várakozásuk van az  $n$  periódussal későbbi valószínűségeloszlásra, azt figyelembe is vehessék. Egy ilyen eljárást ad meg Chriss. Megmutatta, hogyan tudjuk az opciók árából visszszámított eloszlást a saját véleményünk alapján „torzítani” (Chriss [1997] 424–426. o.). Ezek után az így „torzított” eloszlást fogjuk használni az implicit fák meghatározásához. A (21)–(24) egyenletekhez hasonlóan járunk el. Legyen  $Q_i$  az általunk kívánt eloszlás! Ezt azonban nem ismerjük, csak a valós piaci árak alapján számított (becsült)  $P_i$  valószínűségeket. Azt tudjuk továbbá, hogy a bizonyos  $P_i$  valószínűségeket ki szeretnénk cserélni, de azt nem, hogyan módosítja ez a többi kimenet valószínűségét. Ennek kiszámításához minimalizáljuk a

$$\sum_{i=1}^n (P_i - Q_i)^2 \quad (30)$$

függvényt, ahol a peremfeltételek a következők lesznek:

$$\sum_{i=1}^{n+1} Q_i = 1 \quad \text{és} \quad Q_i \geq 0 \quad (31)$$

$$Q_i = P'_i \dots Q_{i_n} = P'_{i_n}$$

$$S_0 = e^{-(r-d)(t_n-t_0)} \sum_{i=1}^{n+1} Q_i S_{n,i}, \quad (32)$$

ahol a  $P'_i$  értékek a piaci szereplő egyéni várakozását tükrözik. A fenti egyenletrendszer megoldásával megkapjuk a módosított valószínűségeloszlást. Innen az út már ugyanaz, mint a fent bemutatott, azaz a Rubinstein-féle eljárást alkalmazva haladunk visszafelé a fán, és meghatározzuk az ehhez a valószínűséghez tartozó árfolyamokat.

A Rubinstein-modell egyszerűsége és könnyen áttekinthetősége azonban elfedi a módszer néhány hibáját. Bár az, hogy a rövidebb futamidejű opciókat nem használja fel, egyszerűsíti a modellt, és a gyakorlatban is jól alkalmazhatóvá teszi, ezen információk

<sup>25</sup> Ez természetesen azt jelenti, hogy az emelkedésvalószínűségek szorzata adja az útvalószínűséget. Ezt a kockázatmentes hozammal osztva a jól ismert Arrow–Debreu-árakat kapjuk vissza.

<sup>26</sup> Megint csak nem úgy, ahogyan Derman és Kani, akik a nulladik időpontból előrefelé haladva töltötték fel a fát adatokkal.

kihagyása ugyanakkor információvesztéshez vezet. Az ezen opciókból visszaszámított rövidebb távú árfolyam-alakulás ugyanis nem feltétlenül esik egybe azzal az információval, ami a rövidebb futamidejű opciók ára tartalmaz. A modell másik gyengéje az ugyanazon pontba vezető utak azonos valószínűségének feltételezése. Ez a feltételezés valós körülmények között aligha tartható.<sup>27</sup>

### *A Derman–Kani- és a Rubinstein-eljárások különbségei*

A most bemutatott két eljárás sok tekintetben hasonlít, nagyon sokban azonban különbözik egymástól.

Derman és Kani egy egész sor opció árát használja fel az implicit fa meghatározásához, míg Rubinstein csak az adott időpontban lejárt opciókét. Ennek megfelelően az ő modelljéből származó információk nem függenek a rövidebb lejáratú opciók áráról, így azok árazásához, értékeléséhez a Rubinstein-féle fa nem használható fel.

Céljuk is más. A Derman–Kani-szerzőpáros célja nemcsak egy implicit fa, hanem az ahhoz kapcsolódó *helyi volatilitás függvényének a feltárása*. Ezért használnak OTM opciókat. Céljuk az, hogy minél kevesebb feltételezéssel éljenek a részvényárfolyam által követett folyamatot illetően, de minél többet tudjanak meg a volatilitásról.

Rubinstein modellje a binomiális utak függetlenségének felhasználásával sokkal keményebb feltételezésekkel indít. Ugyanakkor az ő eljárása egyszerűbb, és nem kell attól sem félni, hogy a Derman–Kani-modellhez hasonlóan rossz valószínűségek csúsznak be a számításba. Célja azonban *nem annyira a volatilitás ismerete, mint egy opciók árazására alkalmas modell megalkotása*.

Derman és Kani modelljének inputdataként *mind európai, mind amerikai opciók* felhasználhatók. Rubinstein modellje azonban csak *európai* opciókra támaszkodik, azok közül is vagy csak a vételi, vagy csak az eladási opciókat használja fel. Ugyanakkor *a Rubinstein modell nem standard európai opciókból is megkonstruálható*.

A Derman–Kani-modellben az eloszlás a végeredmény, az „*output*”, míg a Rubinstein-modellben a bemenő paraméter, az „*input*”. Ez utóbbinak az az előnye, hogy a modell felhasználói könnyebben belevihetik egyéni véleményüket, a lejáratkori eloszlásra vonatkozó várakozásaikat. A piacról származó objektív és a szubjektív elemek keveredhetnek.

### *Rebonato modellje*

Az eddigiekben áttekintettük a gyakorlatban elterjedt binomiális modellekre építő visszaszámított modelleket. Egy, a gyakorlatban alkalmazott modellel összehangban lévő eljárás van még hátra: Rebonato véges differenciákra alapuló modellje. Az eljárás azért érdekes, mert sok helyen alkalmazzák a binomiális modell helyett a véges differenciák módszerét. Az ilyen értékelési modellek felhasználói is kialakíthatnak egy visszaszámított modellt.

Rebonato ugyanis egy olyan numerikus eljárást javasol, aminek az alapja a véges differenciák módszere. Az eljárás visszafelé haladva próbálja meghatározni az opciók árát oly módon, hogy a lehetséges árfolyamok, illetve jövőbeli időpontok számát egy véges értékben korlátozza, a kétdimenziós felületet egy rácscsal helyettesíti.<sup>28</sup> E rácspontok alapján definiálja a Black–Scholes-féle differenciálegyenletben szereplő  $\Delta$ ,  $\Gamma$  és  $\Theta$

<sup>27</sup> Ezen a ponton egészítette ki, illetve általánosította Rubinstein modelljét Jackwerth. Ő egy súlyfüggvényt rendelt az utakhoz oly módon, hogy eljárásának a Rubinstein-modell egy lineáris súlyozású speciális esete. Részletesen lásd *Jackwerth* [1997].

<sup>28</sup> A véges differenciák módszeréről lásd például *Hull* [1999].

értékeket, és ezek segítségével mintegy differenciaegyenletszerűen közelíti meg a Black–Scholes-féle differenciálegyenletet azon esetekben, mikor ez utóbbi megoldására zárt képlet nem áll rendelkezésre.

A Rebonato által javasolt eljárás abban az értelemben hasonlít ehhez, hogy a differenciálegyenletek helyett azok diszkrét verzióját alkalmazva ad meg numerikus eljárást a volatilitásfelület feltérképezéséhez.

A modell nem ad zárt képletet a helyi volatilitás felületének a meghatározásához, célja „csupán” a felület minél kisebb hibával történő becslése. Nézzük meg, milyen feltevésekkel dolgozik a Rebonato által javasolt eljárás, illetve milyen fontos megjegyzések fűzhetőek ezekhez a feltevésekhez!<sup>29</sup>

1. *feltétel.* A részvényárfolyam a következő folyamatot követi:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu(S_t, t) + \sigma(S_t, t)dz(t), \quad (33)$$

ahol  $\mu$  az adott részvénytől elvárt hozam,  $dz$  pedig egy Wiener-folyamat.

1. *megjegyzés.* Figyeljünk arra, hogy a helyi volatilitás továbbra is az időnek és az alaptermék árfolyamának függvénye, akárcsak az implicit fák esetében. Nem függvénye azonban az opció kötési árfolyamának. Ezzel szemben az opciók implicit volatilitása a kötési árfolyam függvényében adott, azaz a kötési árfolyamtól függő implicit volatilitást előállítani képes helyi volatilitásokat keresünk.

2. *megjegyzés.* Ennek megfelelően, ha a jövőbeli részvényárfolyam ismert, ismert a jövőbeli helyi volatilitás is.

3. *megjegyzés.* Vegyük észre, hogy a fenti egyenletben csak egyetlen bizonytalansági tényező van, a Wiener-folyamat, hiszen ugyanez a folyamat mozgatja a helyi volatilitást is. Azaz a piac teljes, tehát – ahogy arról az első fejezetben is szó volt – nincs szükségünk újabb termékre ahhoz, hogy az alaptermékre szóló opciót árazni tudjunk.

2. *feltétel.* Tegyük fel, hogy végtelen számú kötési árfolyamú, illetve lejáratú opció mai árát ismerjük. Tegyük fel, hogy ezeket a piaci gyakorlatnak megfelelően implicit volatilitásuknak megfelelően jegyzik:  $\sigma_{\text{impl}}(0, T)$ .

4. *megjegyzés.* A valóságban természetesen a 2. *feltétel* nem állja meg a helyét, csak véges számú opcióval kereskednek még a legnagyobb piacokon is. Ezért ezekből az adatokból egy megfelelően sima és differenciálható felületet kell képeznünk. Ezen belül a kötési árfolyam szerint kétszer, a hátralévő futamidő szerint egyszer deriválhatónak kell lennie.

Ezen a ponton Rebonato modellje erősebb feltevésekkel él, mint az implicitfa-modellek. Ott is feltételként fogalmazódott meg a megfelelő simaság, de ennek alapvetően közgazdasági okai voltak, ilyen többszöri differenciálhatóságot nem tételeznek fel a modellek. Amennyiben viszont ez a simaság nem áll fenn, a helyi volatilitás felületében szakadások lesznek. Rebonato ezzel a feltételezéssel kiküszöböli a numerikus hibákat, ugyanakkor egy másik, nem éppen gyenge feltételt támaszt.

5. *megjegyzés.* Amennyiben a részvényárfolyam a (33) egyenletben leírt folyamatot követi, a Black–Scholes-féle differenciálegyenlet nem lesz megoldható az eladási, illetve a vételi opciók lejáratkori értékére tett peremfeltételek mellett. Így a továbbiakban nem lesz igaz az sem, hogy az implicit volatilitás (variancia) a helyi volatilitások (varianciák) összege, azaz:<sup>30</sup>

$$\sigma_{\text{impl}}^2(0, T) \neq \int_0^T \sigma^2(S_u, u) du. \quad (34)$$

<sup>29</sup> A tanulmány ezen része Rebonato [1999] 129–135. oldalai alapján készült.

<sup>30</sup> A diszkrét modellben nem okoz gondot a dolog, be tudjuk árazni, tehát van megoldás. Folytonos modellben azonban nincs zárt képletünk, így az implicit volatilitás nem értelmezhető e módszerrel.

6. megjegyzés. Az opciós piacon kereskedők számára az a fontos, hogyan viselkednek az opciók árában benne foglalt implicit volatilitások, hiszen ezek lényegében a jövőbeli opciós árak egyszerű jegyzési formáját jelentik. A jövőbeli várható implicit volatilitások meghatározásához azonban tovább kell számolni:

- meg kell határozni a helyi volatilitás felületét;
- feltételezve, hogy ennek jövőre vonatkozó adatai az akkori azonnaliaknak felelnek meg, ki kell számolni az akkori opciós árakat;
- ebből kell meghatározni az implicit volatilitásokat; végül
- meg kell vizsgálni, hogyan viselkednek az implicit volatilitások.

A modell feltételeinek és az azzal kapcsolatos értelmező és kritikai megjegyzések után nézzük meg részletesen a Rebonato által felvázolt eljárást! Vegyünk egy  $t$  időpontban értékelt,  $T$  időpontban lejárató,  $K$  kötési árfolyamú vételi opciót. Legyen az alaptermék mai árfolyama  $S$ . Mivel a piac teljes, a kockázatmentes árazás továbbra is lehetséges, de a Black–Scholes-képlet már nem elegendő. Ugyankor a kérdéses vételi opció értékének a Black–Scholes-féle parciális differenciálegyenletet ki kell elégítenie. E szerint:

$$\left( \frac{\partial C_{K,T}(t,S)}{\partial t} + (r-d)S \frac{\partial C_{K,T}(t,S)}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma_{S,t}^2 S^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}(t,S)}{\partial S^2} \right) = rC_{K,T}(t,S), \quad (35)$$

ahol  $d$  az alaptermék folytonosan számított osztalékhozamát,  $C_{K,T}(t, S)$  pedig a vételi értékét jelöli. Ezt az egyenletet a Kolmogorov „backward” egyenlet. Megoldásához szükség van az opció értékének egy jövőbeli eloszlására. Ez tipikusan a lejáratkori árfolyam szokott lenni, amit peremfeltételként csatolunk az egyenlethez. Innen visszafelé haladva határozzuk meg az opció értékét.

Az opciók árát ismerjük a piacról. Amennyiben a görög betűk ( $\Theta$ ,  $\Delta$ ,  $\Gamma$ ) értékét is ismernénk, az egyetlen ismeretlen a fenti egyenletben a helyi volatilitás függvénye lenne. Ezzel a megoldással az a gond, hogy mivel a hagyományos Black–Scholes-egyenlet nem áll fenn, a hagyományos  $\Delta$ ,  $\Gamma$  és  $\Theta$  értékek sem használhatók fel az egyenlet megoldásához. Az információk kiszűrhetők lennének az implicitvolatilitás-felületből, de ahhoz viszont azt kellene tudnunk, hogy milyen az implicitvolatilitás-függvény viselkedése az alaptermék árfolyama, illetve az idő függvényében. Ehhez viszont éppen a keresendő helyi volatilitás felületének az ismeretére lenne szükség. Itt a kör bezárult.

Megoldást adhat azonban az, ha a fenti differenciálegyenlet duálisára, a Fokker–Planck-féle „forward” egyenletre térünk át. Ennek megoldása során a jelenben ismert paraméterek szükségesek, és innen haladunk előre

$$\left( \frac{\partial C_{K,T}(t,S)}{\partial T} + (r-d)K \frac{\partial C_{K,T}(t,S)}{\partial K} + \frac{1}{2} \sigma_{K,t}^2 K^2 \frac{\partial^2 C_{K,T}(t,S)}{\partial K^2} \right) = -dC_{K,T}(t,S). \quad (36)$$

Az értékeléskori időt ( $t$ ) most is a lejáratig hátralévő idő ( $T$ ) váltotta fel, míg az alaptermék árfolyama helyett a kötési árfolyam szerepel. Legyen  $t = 0$ . Mivel zárt képlet továbbra sincs, a fenti deriváltak nem határozhatók meg. Ezek kiszámítására megadható azonban egy numerikus közelítő eljárás. Így legyen:

$$\frac{\partial C_{K,T}(0,S)}{\partial K} = \frac{C_{K+\Delta K,T}[0,S,\sigma_{impl}(0,K+\Delta K)] - C_{K,T}[0,S,\sigma_{impl}(0,K)]}{\Delta K} \quad (37)$$

$$\frac{\partial^2 C_{K,T}(0, S)}{\partial K^2} = \frac{C_{K+\Delta K,T}[0, S, \sigma_{impl}(0, K + \Delta K)] + C_{K-\Delta K,T}[0, S, \sigma_{impl}(0, K - \Delta K)] - 2C_{K,T}[0, S, \sigma_{impl}(0, K)]}{\Delta K^2} \quad (38)$$

$$\frac{\partial C_{K,T}(0, S)}{\partial T} = \frac{C_{K,T+\Delta T}[0, S, \sigma_{impl}(0, K)] - C_{K,T}[0, S, \sigma_{impl}(0, K)]}{\Delta T} \quad (39)$$

Figyeljünk arra, hogy ezekben az egyenletekben nemcsak a kötési árfolyamot változtatjuk, hanem ennek megfelelően az implicit volatilitásokat. Éppen ezért volt szükség a második feltételre, hogy minden pontban tudjunk egy implicit volatilitást mondani. A (37)–(39) egyenleteket a (36) egyenletbe helyettesítve, kifejezhetjük a volatilitást:

$$\sigma_{K,T}^2 = 2 \frac{\frac{\partial C_{K,T}(0, S)}{\partial T} + (r - d)K \frac{\partial C_{K,T}(0, S)}{\partial K} + dC_{K,T}(0, S)}{\frac{\partial^2 C_{K,T}(0, S)}{\partial K^2} K^2} \quad (40)$$

Ez a függvény minden jövőbeli  $T$  ( $t = T$ ) időpontban minden  $K$  ( $S_t = K$ ) árfolyam mellett megadja a helyi volatilitás értékét.<sup>32</sup>

### A helyi volatilitás felülete

Végül essen néhány szó a helyi volatilitás felületéről, alakulásáról! Mit tudunk a részvényárfolyam, illetve az idő változásának függvényében elmondani róla?

#### *Az implicit és a helyi volatilitás*

Érdekes piaci megfigyelés, hogy a helyi volatilitás és az árfolyam fordított irányban változnak. Magasabb árfolyam mellett a volatilitás kisebb, az árak esésével pedig nő. Az implicit és a helyi volatilitás közötti viszonyról ennél több hüvelykujjszabályt állíthatunk fel.<sup>33</sup>

*1. szabály.* A helyi volatilitás az árfolyam függvényében megközelítőleg kétszer olyan gyorsan változik, mint az implicit volatilitás.

Nézzünk egy egyszerű bizonyítást! Vegyünk egy egyszerű esetet, ahol a helyi volatilitás nem függ az időtől, csak az árfolyamtól. Így a korábbi  $\sigma(S, t)$  függvény helyett csak  $\sigma(S)$  szerepel. Legyen továbbá ez az összefüggés lineáris, azaz:

$$\sigma(S) = \sigma_0 + \beta \cdot S. \quad (41)$$

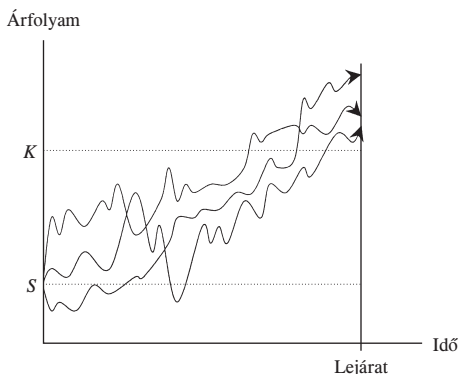
<sup>31</sup> Az opció értékének kötési árfolyam szerinti második deriváltja megegyezik az alaptermék árának sűrűségfüggvényével, azaz:

$$\frac{\partial^2 C_{K,T}(0, S)}{\partial K^2} = \Phi(t = T, S_t = K).$$

<sup>32</sup> Szintén a véges differenciák módszerét használja fel Dumas, Fleming és Whaley. Az ő modelljük azonban a visszaszámított modellek szempontjából kevésbé fontos, ezért a cikk megjelölésén túl az ő megállapításokkal nem foglalkozunk. Részletesen lásd *Dumas–Fleming–Whaley* [1996].

<sup>33</sup> Az egyszerűség kedvéért most a folytonos modell jelöléseit használjuk. Lényegét tekintve természetesen nem különböznek az itt tett megállapítások attól, mintha diszkrét modellekről beszélnénk. Részletesebben lásd *Derman–Kani–Zou* [1995].

5. ábra



Nézzük egy OTM vételi opció implicit volatilitását! Legyen a jelenlegi részvényárfo-lyam  $S$ , a kötési árfolyam  $K$  (5. ábra). Jelölje az implicit volatilitást  $\sigma_{impl}(S, K)$ . Minden olyan lehetséges út, amelyik hozzájárul az opció értékéhez, átmegy az  $S$  és a  $K$  közötti tartományon. Ennek megfelelően ezen utak mindegyikének a volatilitása függ a kérdéses tartomány helyi volatilitásától. Ne feledjük, hogy az idő nem változtatja a helyi volatilitást, az csak az árfolyam függvénye! Így ha  $S$ -ből  $K$  fölé jutunk, minden e közötti árfolyamon át kell menjünk, így minden helyi volatilitásnak hatással kell lennie az adott útvonal volatilitására. Ennek megfelelően egy  $K$  kötési árfolyamú opció implicit volatilitásának közelítőleg a helyi volatilitások összegének kell lennie. Azaz:

$$\sigma_{impl}(S, K) \approx \frac{1}{K - S} \int_S^K \sigma(S) dS. \quad (42)$$

A (42) egyenletet ebbe behelyettesítve a következőket kapjuk:

$$\sigma_{impl}(S, K) \approx \sigma_0 + \frac{\beta}{2}(S + K). \quad (43)$$

A (42) és a (43) egyenletet összevetve, éppen az első hüvelykujjszabályt látjuk viszont.

Az első szabályra, amely szerint tehát a helyi volatilitás az implicitnél gyorsabban változik, szintén találunk analógiát a kötvénypiacon. A kötvények árfolyamából lejáratig visszaszámított hozamgörbe szintén lassabban változik, mint a forward hozamgörbe.

A korábban felrajzolt fa azonban másra is használható. Ha az idő múlásával a helyi volatilitás felülete nem változik, azaz új információ a volatilitásról nem érkezik, és az alaptermék árfolyama időben változik, gyakorlatilag a fán haladunk előre. A későbbi „azonnali” piaci szituációt a mai fa „vége” fogja tükrözni, ahogyan a várakozási elmélet szerint a forward kamatlábak előrejelzik a jövőbeli azonnali kamatlábakat. Az akkorra becsült helyi volatilitásokból pedig kiszámíthatjuk egy akkor kibocsátandó opció árát, abból pedig a Black–Scholes-képlet segítségével az akkori implicit volatilitást.

Amennyiben a helyi volatilitás és az árfolyam negatívan korreláltak, egy adott árfolyamú opció implicit volatilitása az árfolyam emelkedésével csökken, illetve fordítva, az árfolyam csökkenésével az implicit volatilitás nő. Innen felvázolható a 2. heurisztikus szabály.

**2. szabály.** Az opciók implicit volatilitása közelítőleg ugyanúgy változik a piaci árak változásával, mint a kötési árfolyamok változásával.

Azaz ha a mai volatilitásmosoly olyan, hogy egy 100 forintos kötési árfolyamú opcióhoz képest egy 110 forintos implicit volatilitása három százalékkal magasabb, akkor a

100 forintos kötési árfolyamú implicit volatilitása ugyanekkora lesz, ha a részvényárfolyam tíz forinttal megemelkedik.

Nézzünk egy, az előzőkhöz hasonlóan egyszerű bizonyítást! A (43) egyenlet éppen azt mutatja, hogy az alaptermék árfolyama és a kötési árfolyam hasonló módon befolyásolja az adott futamidejű opciók implicit volatilitását. Ez pedig éppen a fenti állítással azonos.

Ha a helyi volatilitás és a kötési árfolyam negatív módon korrelált, és az implicit volatilitás a helyiek összegeként adódik, ebből már következik az a kijelentés is, hogy az implicit volatilitás a kötési árfolyammal ugyancsak inverz kapcsolatban van, azaz magasabb árfolyam mellett az implicit volatilitás is kisebb lesz.

A helyi volatilitás és az árfolyam közötti negatív korreláció feltételezése azonban a fedezeti arányra ( $\Delta$ ) is hatással van. Egy Cox–Ross–Rubinstein-modellben a fa szabályos, míg a Derman–Kani-modell által „előállított” fa hullámzó. A kitétséget, azaz a  $\Delta$ -t az opció, illetve az alaptermék árfolyamának „terjedelme” határozza meg:

$$\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_u - S_d}. \quad (44)$$

Jelölje az implicit fa esetén az opció lehetséges értékeit  $C'_u$ , illetve  $C'_d$ . Mivel az implicit volatilitás és a részvényárfolyam is negatív módon korrelál egymással,  $C'_u < C_u$  és  $C'_d > C_d$ . Ebből pedig  $(C'_u - C'_d) < (C_u - C_d)$  következik. E szerint viszont a kitétség és így a fedezeti arány a vételi és az eladási opcióknál az árfolyam és a volatilitás negatív korrelációja esetén kisebb, mint a Cox–Ross–Rubinstein-modellben. Derman, Kani és Zou ennek megfelelően felállítottak egy 3. szabályt is.

3. szabály. Ha az alaptermék árfolyama és a volatilitás nem független egymástól, a  $\Delta$  korrigált értéke a

$$\Delta = \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \beta \quad (45)$$

képlet alapján határozódik meg, ahol  $\Delta_{BS}$  az eredeti Black–Scholes-módszerrel számított  $\Delta$ , a  $V_{BS}$  a Black–Scholes-szerzőpáros feltevései alapján számított vegát jelöli, míg a  $\beta$  megegyezik a már korábban bevezetett  $\beta$  értékkel, azaz azt mutatja meg, hogy az implicit volatilitás és az alaptermék árfolyama milyen viszonyban vannak egymással. A piacon megfigyelt negatív összefüggés esetén a  $\beta$  értéke negatív, azaz a  $\Delta$ , azaz a kitétség tényleg alacsonyabb, mint a „hagyományos” feltételek mellett számított.

A fenti eredményt könnyen megkapjuk. Jelölje az opció értékét az implicitvolatilitás-felület feltételezése mellett  $C[S, \Sigma(S, K), r, t, K]$ . A  $\Delta$  ennek részvényárfolyam szerinti első deriváltja, azaz

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial \Sigma} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial S} = \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial S}. \quad (46)$$

Felhasználva a (43) egyenletet, amely szerint az implicit volatilitásra a kötési árfolyam és az alaptermék árfolyama megközelítőleg azonos hatással bír, az előző egyenlet a következőképpen írható át:

$$\Delta = \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial S} \approx \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \frac{\partial \Sigma}{\partial K} = \Delta_{BS} + V_{BS} \cdot \beta. \quad (47)$$

Ez pedig éppen a fenti állítás.

\*

A tanulmányban áttekintettünk néhány módszert, amelyeket a gyakorlatban is jól lehet alkalmazni a piaci árakban foglalt volatilitás előrejelzésére. Ezek a modellek a későbbiekben felhasználhatók egzotikus vagy csak egyszerűen tőzsdén kívüli termékek árazásá-

hoz. Az így kapott árban nem annyira a szubjektív feltételezéseink, hanem a piacról nyert információk fognak szerepelni. Az így meghatározott ár ebben az értelemben összhangban lesz a piaccal.

Amennyiben elfogadjuk, hogy a piaci szereplők várakozásai a jövőbeli folyamatok jó előrejelzését adják, akkor ezeket a modelleket felhasználhatjuk a jövőbeli volatilitás előrejelzésére, nagymértékben csökkentve a volatilitás bizonytalansága miatti kockázatunkat. A hazai piaci szereplők egyre erősebb nemzetközi beágyazottságát tekintve, remélhető, hogy a tárgyalt modellek előbb vagy utóbb a hazai pénzügyes gyakorlatban is alapeszközzé válhatnak.

### *Hivatkozások*

- BREEDEN, D.–LITZENBERGER, R. [1978]: Prices of state-contingent claims implicit in option prices. *Journal of Business*, LI. évf. 127–146. o.
- CHRIS, N. [1997]: *Black Scholes and Beyond, Option Pricing Models*. Irwin, Chicago.
- DERMAN, E.–KANI, I.–CHRIS, N. [1996]: Implied Trinomial Trees of the Implied Volatility. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, február.
- DERMAN, E.–KANI, I.–ZOU, J. Z. [1995]: The Local Volatility Surface, Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, december.
- DERMAN, E.–KANI, I. [1994]: The Volatility Smile and Its Implied Tree. Goldman Sachs Quantitative Strategies Research Notes, január.
- DUMAS, B.–FLEMING, J.–WHALEY R. E. [1996]: Implied Volatility Function: Empirical Tests. NBER Working Paper.
- DUPIRE, B. [1994]: Pricing with a Smile. *Risk*, VII. évf. 1. sz. január.
- GUIDE TO THE VOLATILITY INDICES... [1997]: Guide to the Volatility Indices of Deutsche Börse. Deutsche Börse AG Information Products, www.dtb.de 2001. 10. 05.
- HULL, J. C. [1999]: Opciók, határidős ügyletek és egyéb származtatott termékek. Panem–Prentice–Hall, Budapest.
- JACKWERTH, J. [1997]: Generalised binomial trees. *Journal of Derivatives*, V. évf. 2. sz.
- KIM, I. [2000]: A comparative study of market implied price processes. Working Paper, 2000 július.
- REBONATO, R. [1999]: *Volatility and Correlation*. Wiley, New York.
- RUBINSTEIN, M. [1994]: Implied Binomial Trees. *The Journal of Finance*, XLIX. évf. 3. sz. július.
- SZÁZ JÁNOS [1999]: Tőzsdei opciók vételre és eladásra. Tanszék Kft., Budapest.
- WHALEY, E. R. [1993]: Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue. *Journal of Derivatives*, őszi szám.
- WHALEY, E. R. [2000]: The Investor Fear Gauge. A VIX index ismertetője. február, www.cboe.com 2001. 10. 16.
- VARGA JÓZSEF [2001]: Pénz- és tőkepiaci idősorok sztochasztikus volatilitás modelljei. *Sigma*, XXXII. évf. 1–2. sz.
- ZOU, J. [1999]: Extracting And Forecasting Volatility Skews Using Historical Return Data – Applications To Basket Options, előadás anyaga, Párizs, 1999.