

Állandó értékű élmenti vasúti terhelés igénybevételeinek számítása

Dr. Kazinczy László

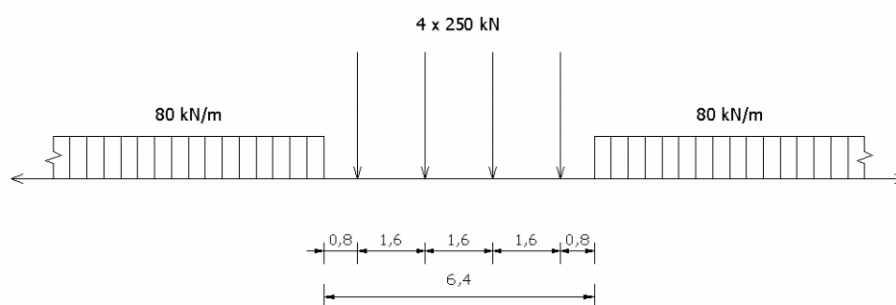
egyetemi docens

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem

Út és Vasútépítési Tanszék

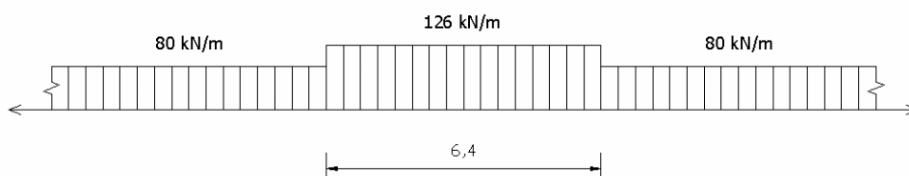
1. Bevezetés – Az igénybevétel-számítás körülményei

Vasúti műtárgyak és különböző pályaszerkezeti elemek méretezésekor a vonatkozó szabályzatok gyakran állandó értékű, élmentén megoszló terhelési szakaszokat tartalmazó statikai modellek felvételét írják elő. Az 1-3. ábrák példaként az EUROCODE 1 [1] által javasolt terhelési sémákat szemléltetik.



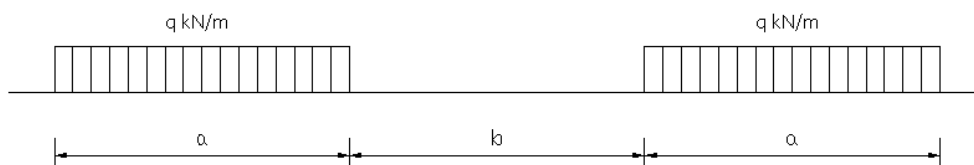
1. ábra

Az EUROCODE-1 által javasolt UIC 71 jelű terhelési modell



2. ábra

Az EUROCODE-1 által javasolt UIC 71 jelű egyszerűsített terhelési modell



Terhelési osztály	q [kN/mm]	a [mm]	b [mm]
SW/0	133	15,00	5,30
SW/2	150	25,00	7,00

3. ábra

Az EUROCODE-1 által javasolt SW jelű terhelési modellek

A vasútépítési gyakorlatban az élmenti terhek (q [kN/m]) figyelembevétele igénybevételi szempontból – a legelterjedtebben alkalmazott Zimmermann-féle méretezési eljárás [2] esetében – csak szakaszonként képzett koncentrált erőkkel való helyettesítés révén történik. E túlméretezést eredményező közelítés gazdaságtalan tervezéshez vezet.

Mindezek alapján az állandó értékű, élmenti terhelés által a vasúti sínszalokban keltett igénybevételek (hajlítónyomaték, süllyedés, ágyazási nyomás, élmenti reakció) közelítés nélküli meghatározása a Zimmermann-féle elmélet vasútépítésben alkalmazott összefüggéseinek egy hiányzó elemét pótolja.

2. Az igénybevételek meghatározása

2.1. A levezetés alapösszefüggései

A végtelen hosszú, rugalmas ágyazású tartó valamely „K” - keresztmetszetében – koncentrált erők hatására – ébredő

– hajlítónyomaték az

$$M = \frac{L}{4} \sum Z_i \mu_i \quad [\text{Nmm}]$$

– rugalmas lehajlás az

$$y = \frac{1}{2 C s L} \sum Z_i \eta_i \quad [\text{mm}]$$

összefüggés révén határozható meg a Zimmermann-féle elmélet alapján, ahol

Z_i – az i -edik jelű koncentrált erő [N],

μ_i – a süllyedési hatására ordináta az i -edik jelű koncentrált erő keresztmetszetében [-],

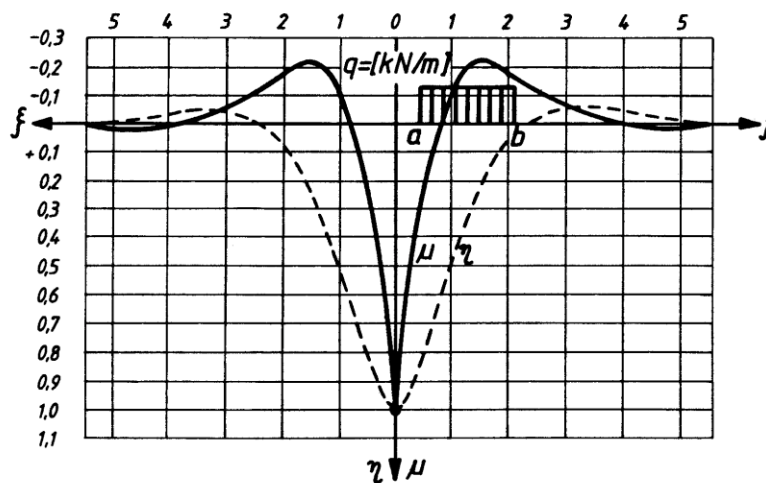
η_i – a nyomatéki hatására ordináta az i -edik jelű koncentrált erő keresztmetszetében [-],

L – a tartó merevségi hossza [mm],

C – a tartó ágyazási tényezője [N/mm³],

s – a helyettesítő hosszalj szélessége [mm].

A 4. ábrán vázolt állandó értékű, élmenti teher (q [N/mm]) a tartó (a sínszál) „K”-keresztmetszetében keltett igénybevételei a nyomatéki, illetve a süllyedési hatásábrák elemi hosszúságú ($d\check{x}$) szakaszainak leterhelése, illetve az elemi igénybevételek összegzése révén határozhatók meg.



4. ábra

A nyomatéki, illetve a süllyedési hatásábrák leterhelése állandó értékű, élmenti terhelési szakasszal

A hajlítónyomaték az

$$M = \frac{L}{4} \int_a^b q L \mu d\zeta \quad [\text{Nmm}]$$

a süllyedés az

$$y = \frac{1}{2 C s L} \int_a^b q L \eta d\zeta \quad [\text{mm}]$$

összefüggésből nyerhető, kétszeres parciális integrállal.

2.2. A hajlítónyomaték meghatározása

A hajlítónyomaték a nyomatéki hatására függvény helyettesítésével

$$\begin{aligned} M &= \frac{L}{4} \int q L \mu d\zeta = \frac{qL^2}{4} \int \mu d\zeta = \\ &= \frac{qL^2}{4} \int \frac{-\sin \zeta + \cos \zeta}{e^{-\zeta}} d\zeta = \\ &= \frac{qL^2}{4} \left[\int -e^{-\zeta} \sin \zeta d\zeta + \int e^{-\zeta} \cos \zeta d\zeta \right] \end{aligned}$$

Az első integrál értéke a parciális integrálra vonatkozó

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

összefüggés kétszeri alkalmazása

$$-\int e^{-\zeta} \sin \zeta d\zeta = e^{-\zeta} \cos \zeta + \int e^{-\zeta} \cos \zeta d\zeta$$

$$\int e^{-\zeta} \cos \zeta d\zeta = e^{-\zeta} \sin \zeta + \int e^{-\zeta} \sin \zeta d\zeta,$$

s a helyettesítés elvégzése

$$-\int e^{-\zeta} \sin \zeta d\zeta = e^{-\zeta} \cos \zeta + \left(e^{-\zeta} \sin \zeta + \int e^{-\zeta} \sin \zeta d\zeta \right)$$

után:

$$-\int e^{-\zeta} \sin \zeta d\zeta = \frac{e^{-\zeta} \sin \zeta}{2} + \frac{e^{-\zeta} \cos \zeta}{2}$$

A második integrál értéke a parciális integrálva vonatkozó

$$\int uv' dx = uv - \int u'v dx$$

összefüggés kétszeri alkalmazása

$$-\int e^{-\zeta} \cos \zeta d\zeta = e^{-\zeta} \sin \zeta + \int e^{-\zeta} \sin \zeta d\zeta$$

$$\int e^{-\zeta} \sin \zeta d\zeta = e^{-\zeta} \cos \zeta - \int e^{-\zeta} \cos \zeta d\zeta,$$

s a helyettesítés elvégzése

$$-\int e^{-\xi} \cos \xi \, d\xi = e^{-\xi} \sin \xi + \left(e^{-\xi} \cos \xi - \int e^{-\xi} \cos \xi \, d\xi \right)$$

után

$$\int e^{-\xi} \cos \xi \, d\xi = \frac{e^{-\xi} \sin \xi}{2} + \frac{e^{-\xi} \cos \xi}{2}$$

Mindezek alapján

$$M = \frac{qL^2}{4} \int \frac{-\sin \zeta \cos \zeta}{e^{\zeta}} d\zeta = \frac{e^{-\zeta} \sin \zeta}{2} + \frac{e^{-\zeta} \cos \zeta}{2} + \frac{e^{-\zeta} \sin \zeta}{2} - \frac{e^{-\zeta} \cos \zeta}{2} = \frac{qL^2}{4} [e^{-\zeta} \sin \zeta]$$

2.3. A süllyedés meghatározása

A süllyedés a süllyedési hatására függvény helyettesítésével

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2C_s L} \int qL\eta \, d\zeta = \frac{q}{2C_s} \int \eta \, d\zeta = \\ &= \frac{q}{2C_s} \int \frac{\sin \zeta + \cos \zeta}{e^{\zeta}} d\zeta = \frac{q}{2C_s} \int (e^{-\zeta} \sin \zeta + e^{+\zeta} \cos \zeta) d\zeta = \\ &= \frac{q}{2C_s} \left[\int e^{-\zeta} \sin \zeta \, d\zeta + \int e^{-\zeta} \cos \zeta \, d\zeta \right] \end{aligned}$$

Az integrálok értéke a parciális integrálra vonatkozó

$$\int uv' \, dx = uv - \int u'v \, dx$$

összefüggés kétszeri alkalmazása után

(felhasználva a hajlítónyomaték meghatározásánál kapott eredményeket):

$$\int e^{-\zeta} \sin \zeta \, dx = \frac{e^{-\zeta} \sin \zeta}{2} + \frac{e^{-\zeta} \cos \zeta}{2},$$

$$\int e^{-\zeta} \cos \zeta \, dx = \frac{e^{-\zeta} \sin \zeta}{2} + \frac{e^{-\zeta} \cos \zeta}{2}$$

Mindezek alapján

$$y = \frac{1}{2C_s L} \int \frac{\sin \zeta + \cos \zeta}{e^{\zeta}} d\zeta = \frac{e^{-\zeta} \sin \zeta}{2} + \frac{e^{-\zeta} \cos \zeta}{2} + \frac{e^{-\zeta} \sin \zeta}{2} - \frac{e^{-\zeta} \cos \zeta}{2} = \frac{1}{2C_s L} [e^{-\zeta} \cos \zeta]$$

3. Az állandó értékű, élmenti terhelés által keltett igénybevételek

A 2. fejezet levezetései alapján az állandó értékű, élmenti teher (q [Nmm]) által a végtelen hosszú, rugalmasan ágyazott tartó (sínzál) vizsgált „K”-keresztmetszetében ébredő
– hajlítónyomaték

$$M = \frac{q L^2}{2} \left[e^{-\xi} \sin \xi \right]_a^b \quad [\text{Nmm}],$$

– süllyedés

$$y = \frac{q}{2 C s} \left[-e^{-\xi} \cos \xi \right]_a^b \quad [\text{mm}],$$

– ágyazási nyomás ($p = C y$ - alapján)

$$p = \frac{q}{2 s} \left[-e^{-\xi} \cos \xi \right]_a^b \quad [\text{N/mm}^2],$$

– élmenti reakció ($q_r = p \times s$ - alapján)

$$q_r = \frac{q}{2} \left[-e^{-\xi} \cos \xi \right]_a^b \quad [\text{N/mm}].$$

Az igénybevételek legnagyobb értéke a nyomatéki-, illetve a süllyedési hatására belső két „nullpont” közti leterhelésével kapható. A mértékadó
– hajlítónyomaték

$$M_M = 2 \frac{q L^2}{4} \left[e^{-\xi} \sin \xi \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 0,161 q L^2 \quad [\text{Nmm}],$$

– süllyedés

$$y_M = 2 \frac{q}{2 C s} \left[-e^{-\xi} \cos \xi \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = 1,067 \frac{q}{C s} \quad [\text{mm}],$$

– ágyazási nyomás

$$p_M = 2 \frac{q}{2 s} \left[-e^{-\xi} \cos \xi \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = 1,067 \frac{q}{s} \quad [\text{N/mm}^2],$$

– élmenti reakció

$$q_{rM} = 2 \frac{q}{2} \left[-e^{-\xi} \cos \xi \right]_0^{\frac{3\pi}{4}} = 1,067 q \quad [\text{N/mm}].$$

Irodalomjegyzék

- [1.] EUROCODE-1, Méretezési alapelvek és a szerkezeteket érő hatások – 3. rész: ENV 1991-3,
- [2.] Dr. Nemesdy Ervin, Vasúti felépítmény Vasútépítés II., Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.