

Budai László

## Gondolkodási folyamatok fejlesztése dinamikus geometriai szoftverrel

*Egy matematikai fogalom, tétel, algoritmus megtanítása nem lehet öncélú. A matematikatanár legfontosabb feladata az, hogy az ismeretek rendszerének elsajátítása során fejlessze a tanulók gondolkodását. A gondolkodásra nagyon sok, egymástól lényegesen eltérő meghatározást olvashatunk. Más a pszichológusok megközelítése, és más a pedagógiai kutatóké. A gondolkodási műveletek mindegyike elengedhetetlen mind a megértéshez, mind a problémamegoldáshoz. Fontos, hogy a tanuló olyan feladatokat, feladattípusokat oldjon meg, melyek során minél több gondolkodási műveletet használhat. Ezeken kívül fontos még egy jó motivációs bázis létrehozása is. Ebben nagyon nagy szerepe lehet a számítógépes eszközöknek, az interaktivitásnak. A GeoGebra nagyszerű lehetőséget nyújt erre. Szeretnék szólni az ezzel kapcsolatos tapasztalataimról, illetve néhány példaprogramon keresztül bemutatni, hogyan használom a gondolkodási műveletek fejlesztésében a GeoGebrát, alátámasztva mindezeket néhány konkrét kutatási adattal.*

A gondolkodás teszi képessé az embert a természeti és társadalmi törvények megismerésére, és arra, hogy a természeti törvényeket, erőket saját szolgálatába állítsa.

Egy matematikai fogalom, tétel, algoritmus megtanítása nem lehet öncélú. Tehát a matematikatanár legfontosabb feladata az, hogy az ismeretek rendszerének elsajátítása során fejlessze a tanulók gondolkodását. A gondolkodásra nagyon sok, egymástól lényegesen eltérő meghatározást olvashatunk. Más a pszichológusok megközelítése és más a pedagógiai kutatóké. Egy dolog azonban közös: a gondolkodási műveletek mindegyike elengedhetetlen mind a megértéshez, mind a problémamegoldáshoz (amik a gondolkodás alapját képezik). [1]

Fontos, hogy a tanuló olyan feladatokat, feladattípusokat oldjon meg, amelyek minél több gondolkodási műveletet érintenek. Ezeken kívül fontos még egy jó motivációs bázis létrehozása is. Ebben nagyon nagy szerepe lehet a számítógépes eszközöknek, melyek az elmúlt tíz évben egyre nagyobb teret hódítanak. [3]

## A (MATEMATIKA)OKTATÁS JELENLEGI HELYZETE

A társadalmi változások, a gyors technológiai fejlődés, a rohamosan bővülő ismeretanyag mind-mind hozzájárulnak új módszerek kidolgozásának, bevezetésének szükségességéhez. Továbbá fontos tény az is, hogy napjainkban átalakult a pedagógus szerepe is: nem az iskola az egyetlen tudásforrás. Mivel ezek következtében az iskola nem tudja ellátni a tanulót egész életére tudással, felmerül a legfontosabb kérdés: milyen tudásra lesz szüksége később a ma tanulójának?

## A (MATEMATIKA)OKTATÁS JÖVŐBELI FELADATAI

Egyrészt a társadalom, a gazdaság közvetlenül alkalmazható tudást vár. Másrészt a tanulót fel kell készíteni pszichés szempontból az öt esetlegesen érő különböző élethelyzetekre (munkahelyváltás, élethosszig tartó tanulás...). Így jutunk el a képességek, készségek, attitűdök fejlesztéséhez.

A matematikaoktatásnak alapvetően az a feladat, hogy a tanulóban kialakítsa és elmélyítse a társadalomba való beilleszkedéshez szükséges pszichés tulajdonságokat: problémaérzékenység, kombinatorikus gondolkodásmód, bizonyítási igény, algoritmikus gondolkodásmód, becslés, pontosság, szaknyelv pontos használata, térszemlélet (tér és idő). Mondhatnánk azt is, hogy egyfajta olyan kreatív személyiség kialakítását tűzzük ki célul, aki helytáll a különböző élethelyzetekben. Ezen bizonyos kreatív személyiség kialakításának alapja pedig nem más, mint a gondolkodási műveletek fejlesztése, melyben a matematika kulcsfontosságú szereppel bír.

## GONDOLKODÁSI MŰVELETEK

Léteznek elemi gondolkodási műveletek és összetett gondolkodási műveletek, melyeket az elemiek kombinációjával kapunk. Az 1. táblázat tartalmazza az alapvetően fejleszteni kívánatos gondolkodási műveleteket: [1]

1. TÁBLÁZAT: Elemi és összetett gondolkodási műveletek	
Elemi gondolkodási műveletek	Összetett gondolkodási műveletek
Analízis-szintézis	Összefüggések feltárása
Absztrahálás-konkretizálás	Lényegkiemelés
Általánosítás-specializálás	Ítéletalkotás
Összehasonlítás	Fogalomalkotás
Kiegészítés	Bizonyítás
Rendezés	Transzferálás
Analógia	

## GONDOLKODÁSI MŰVELETEK FEJLESZTÉSE A GEOGEBRÁVAL

A GeoGebra egy dinamikus geometriai szoftver, mely 2001-ben készült egy doktori munka részeként. Előnye a többi, hasonló témájú szoftverrel szemben, hogy teljesen ingyenes, platformfüggetlen, magyar nyelvű, egyszerűen kezelhető, jól használható súgó és rengeteg mintaprogram készül hozzá, nem is szólva a jövőjéről (Magyar GeoGebra Intézet megalapítása, webalapú alkalmazások, GeoGebraTube létrehozása, GeoGebra Wiki stb.) Az érdeklődő a hivatalos honlapon [2] minden részletet és segítséget megtalálhat, amire kíváncsi, beleértve a lentebb említett példaprogramokat is.

Miért jó a GeoGebra bevonása a tanítási-tanulási folyamatba? Egyrészt felgyorsítja a fogalomalkotás, az ismeretszerzés egyes fázisait, másrészt a tanulók számára érdekesen, figyelemfelkeltően lehet gyakorlatiasságot kialakítani. Munkaforma szempontjából a GeoGebra differenciálási lehetőségekkel is rendelkezik. Minden eddiginél könnyebben és hatékonyabban fejleszthető általa a szaknyelv pontos használata, és felkelti a bizonyítás iránti igényt. A GeoGebra használatával elkerülhetők a tanulóknál előforduló bizonyos gondolkodással kapcsolatos (helytelen analógián alapuló...) jellegzetes hibák. Ami a legfontosabb azonban a fentebb leírtak tükrében, hogy a GeoGebra egy nagyon jó motivációs bázist teremt, felkelti a tanulóban az érdeklődést és tanulásra ösztönöz.

Az alábbiakban néhány eredményemet ismertetem – adatokkal alátámasztva – a GeoGebra használatáról.

A helyszín egy kisvárosi 8 osztályos gimnázium és szakközépiskola, melyekhez öszszefonás következtében tartozik néhány tagintézmény. A tagintézmények mindegyike általános iskola, sok hátrányos helyzetű tanulóval, ezért a számítógép bevonása már alapvetően egyfajta ösztönző hatással bír. A vizsgálatokat kontrollcsoportos kialakítással, felmenő rendszerben végeztem, aminek során 2-2 eredményt hasonlítottam össze: a mindenkori 8. osztályosok gimnáziumi kontrollcsoportja, illetve a GeoGebrát alkalmazó csoport; az általános iskola kontrollcsoportja, illetve GeoGebrás csoport eredményeit. Mindegyik 8. osztály dolgozott már ezt megelőzően, előző tanévekben a GeoGebrával, így annak kezelése, eszközrendszerének használata nem jelentett már problémát.

### GEOGEBRA A 8. OSZTÁLYBAN

Az általános iskolában vitathatatlanul fontos a megfelelő szemléltetés, reprezentálás, illetve kísérletezés. Talán ebben rejlik a GeoGebra ereje: nagymértékben hozzájárul a tanuló gondolati struktúráinak (szkémájának) saját, egyéni kialakításához.

A 2. táblázat a kiinduló állapotokat jellemzi geometriából a 8. osztályosok körében a tanév elején esedékes bemeneti mérések átlagai alapján:

2. TÁBLÁZAT: Bemeneti mérések átlagai (8. osztály, geometria)

	2008/2009-es tanév	2009/2010-es tanév	2010/2011-es tanév
8/a (gimnázium – kontrollcsoport)	3,98	3,76	3,81
8/b (gimnázium – GeoGebrás csoport)	3,89	3,91	4,02
8/a (általános iskola – kontrollcsoport)	2,68	2,73	2,65
8/b (általános iskola – GeoGebrás csoport)	2,82	2,71	2,73

A táblázatból jól kitűnik, hogy az általános iskolai osztályokban közel azonos képességű tanulók voltak. Ugyanez elmondható a gimnáziumi részre is, viszont az általános iskolához képest a gimnáziumi részben valamivel jobb képességű tanulók voltak a mérési időszakban.

A következő gondolkodási műveletek fejlesztésében használtam fel a GeoGebrát ebben a korcsoportban:

- Analízis és szintézis: háromszögek, négyszögek szerkesztése, megoldások diszkutálása.
- Általánosítás és specializálás: sokszög belső szögeire vonatkozó összefüggések, négyszögek csoportosítása.
- Fogalomalkotás: a végtelen fogalmának mélyítése.
- Ítéletalkotás: Pitagorasz tétele.

### Analízis és szintézis

Az egyik legjellemzőbb témakör a fentebb említett gondolkodási műveletek fejlesztése szempontjából a geometriai szerkesztések. A vázlat elkészítése után elemezzük az adatok közötti összefüggéseket: megvizsgáljuk az alkotóelemek tulajdonságait, ezek összefüggését, azaz analizálunk, majd az ismeretek birtokában elvégezzük a szerkesztést, azaz szintetizálunk. A kettő nem választható el élesen egymástól. A megértésnél inkább az analízis, a problémamegoldásnál pedig a szintézis dominál.

Mivel nagyon fontosnak tartom a manuális tevékenykedtetést az általános iskolában, így a GeoGebrát kizárólag akkor alkalmaztam, amikor a szerkesztések már hagyományos módon (papír, körző, vonalzó) is mentek a tanulóknak.

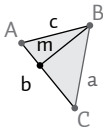
A vázlatkészítést és a szerkesztés lépéseinek megtervezését akár papíron is elvégezheték. A GeoGebra a szerkesztés végrehajtásánál igazán hasznos (1. ábra). Ezzel kapcsolatban a tanulók maguk foglalmazták meg a GeoGebra előnyeit: pontosabb szerkesztés, esztétikusabb munka, a megoldás(ok) elemzése.

Az alkotóelemek közötti összefüggések vizsgálatánál érdemes úgynevezett csúszkákkal dolgozni, ahol dinamikusan állíthatók az egyes felvett adatok. A dinamikusságból adódóan, a megoldások diszkutálása nagymértékben leegyszerűsödik, ugyanis pillanatok alatt több különböző adatfelvételhez tartozó szerkesztést tudunk megjeleníteni a munkalapon (ezek a füzetben mind egy-egy ábrát jelentenének ugyanahhoz a szerkesztési feladathoz). Ez, tapasztalataim szerint, a hagyományos szerkesztésre is kihat, ugyanis ezek után a tanulók automatikusan törekedtek arra, hogy az összes megoldást megtalálják, míg a kontrollcsoport, ha megtalált egy megoldást, abbahagyta a munkát. A GeoGebrás csoport esetében az egyszerű észlelést fokozatosan felváltotta a tudatos megfigyelés.

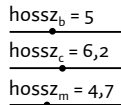
**1. ÁBRA: Háromszög szerkesztése a GeoGebrában**

Szerkesztünk háromszöget, ha adott két oldala, és ezen oldalak valamelyikéhez tartozó magasság!

1. Ábrakészítés (vázlatosan)



2. Adatok felvétele



3. Összefüggések keresése

→ m merőleges b-re  
 → az AC oldaltól m távolságra levő egyenes és a c metszéspontja kiadja a háromszög 3. csúcsát

4. Szerkesztési lépések megtervezése

1. AC oldal felvétele
2. merőleges állítása az AC oldalra
3. a merőlegesre m hosszúság felmérése (körzéssel) → D, E pontok
4. D és E pontokon keresztül merőlegesek szerkesztése → e és f egyenesek
5. A csúcsból körzünk c hosszúsággal → B csúcs

6. Diszkutálás

$hossz_c > hossz_m$ ; 4 megoldás, 2-2-egybevágó  $AB_1C = AB_3C$  és  $AB_2C = AB_4C$

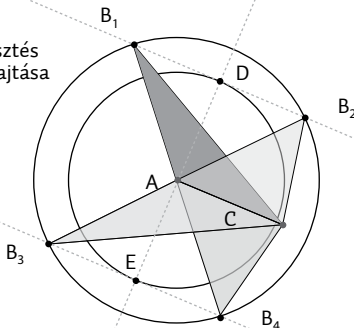
$hossz_c = hossz_m$ ; 2 megoldás, melyek egybevágóak

$hossz_c < hossz_m$ ; nincs megoldás

1. megoldás  $\cong$   3. megoldás

2. megoldás  $\cong$   4. megoldás

5. Szerkesztés végrehajtása



### Általánosítás és specializálás

Az általános és speciális között halmaz-részhalmaz viszony van.

A tanulóimnál nagy problémát okozott a négyszögek csoportosításának megtanulása, illetve a konkrét feladatokban való alkalmazás. Gondoljunk csak a következő villámkérdésekre: minden paralelogramma trapéz, vagy esetleg minden trapéz paralelogramma?

A 2. ábrán négyszögek csoportosításának gyakorlására alkalmas munkalap látható:

### 2. ÁBRA: Négyszögek csoportosítása interaktívan

Helyezd a felirat alá a neki megfelelő négyszöget!

MEGOLDÁS

általános négyszög

trapéz

deltoid

húrtrapéz

paralelogramma

téglalap

rombusz

négyzet

### 3. ÁBRA: Képletek felfedeztetése a tanulóval

$n = 3$

Általános esetben

oldalak/csúcsok száma	belső szögek összege	külső szögek összege	kegy csúcsnál lévő belső szög mértéke
3	$180^\circ$	$360^\circ$	$60^\circ$

A siker titka véleményem szerint, a már említett szemléltetés, reprezentálás, kísérletezés hármasan alapszik: a tanulók maguk alakítják ki az ábrát, a tankönyvekben lévő statikus ábrákkal ellentétben. A gyakorlat végén a Megoldás jelölőnégyzet bekapcsolásával tudják ellenőrizni a munkájukat, és tévedés esetén korrigálnak, amely korrigálási folyamat mélyebb nyomot hagy bennük az ismeret kialakítása szempontjából.

A következő példa (3. ábra) a sokszögek szögei és oldalainak száma közötti összefüggést mutatja: a hangsúly itt is a dinamikusságon van. A tanuló egyéni, saját képességeihez mérten „fejtheti meg” az ide kapcsolódó általános esetre megfogalmazott képleteket a csúszka mozgatásával.

Tapasztalataim szerint a GeoGebrás csoport a számonkérések során sokkal biztosabban használta ez irányú ismereteit, mint a kontrollcsoport.

### Fogalomalkotás

Az egyenesek, félegyenesek végtelenségével kapcsolatban merültek fel problémák 8. osztályban: a tanulók 80 százaléka nem volt tisztában a fogalommal (addig gondolta az egyenest, ameddig a tábla tart, vagy esetleg csak addig, ameddig az rajzolva volt, és így tovább). Tény, hogy nem egyszerű fogalomról van szó, de a GeoGebra erre a problémára is nyújt egyfajta reprezentációt. A feladat egyszerű: vegyünk fel egy egyenest, és keressük meg a végét. A GeoGebra munkalapja elég nagy ahhoz, hogy a tanulók előbb unják meg a keresést, minthogy a végére érnének. Ekkor jön a felismerés: „ennek tényleg nincs vége sehol”.

### Ítéletalkotás

A matematika tanításában érvényesülni kell annak, hogy inkább kevesebb feladatot oldassunk meg egy órán, de azokat alaposan beszéljük meg, keressünk hozzá hasonlókat. [4]

A matematikában a Pitagorasz-tétel az, ami a legismertebb. Nem véletlen, hiszen az összefüggést már négyezer évvel ezelőtt is ismerték elődeink. Pitagoraszról, a görög matematikusról nevezték el a tételt, mert ő adott bizonyítást az összefüggésre. A tétel használatára nagyon sok feladatban van szükség.

Tapasztalatom szerint alapvetően két dolog okoz problémát a tanulónak: a bizonyítás megértése, illetve a formalizmuson alapuló hibák előfordulása. A tanuló anélkül használja az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  jelöléseket, hogy tudná, milyen oldalakat jelentenek.

A GeoGebra segítségével előtérbe helyezhető a felfedezettő tanítás. A következő munkalap is ezt az elvet követi (4. ábra): a Pitagorasz-tétel bizonyítása területek átdarabolásával.

A tanulók a dinamikus ábra segítségével interaktívan megsejtik a Pitagorasz-tételt, majd igazolást is adnak. A bizonyítás megértése kimutathatóan hatékonyabb. A formalizmuson alapuló hibák kiküszöbölődnek, ugyanis a munkalapon a két befogóval, illetve az azokra rajzolható négyzetekkel dolgozunk mindvégig, ami a hagyományos módon (papíron) történő feladatmegoldáskor azt eredményezte, hogy a tanulók mindig igyekeztek a két befogót kiválasztani a feladatból, és így már adott volt a helyes felírás.

#### 4. ÁBRA: Pitagorasz-tétel megsejtése és igazolása felfedeztetéssel

**A Pitagorasz tétel 2. bizonyítása**

$a = 52$   
 $b = 13$

A négyzetek kerületei:  
 $a^2 = 27.04 \text{ cm}^2$   
 $b^2 = 169 \text{ cm}^2$   
 $c^2 = 196.04 \text{ cm}^2$   
 az átfogó:  $c = 14 \text{ cm}$

A csúszkák segítségével változtatható a derékszögű háromszög 2 befogója  
 A pontok segítségével lehet az átdarabolást elvégezni

Az 1. ábra:  
 A 2 befogó fölé rajzolt négyzetek területei láthatóak különböző színekkel beszínezve  
 Összesen 5 db kis rész

Az 2. ábra:  
 Az átdarabolás után ezek a részek (5 db) az átfogó fölé rajzolt négyzetbe kerültek, teljesen lefedve azt.

Tehát a tétel valóban:  
 $a^2 + b^2 = c^2$

#### Elért eredmények

A kontrollcsoport, illetve a GeoGebrás csoport a geometriai kimeneti mérések (2009. június, 2010. június, 2011. december) után a következő eredményeket produkálta (3. táblázat):

3. TÁBLÁZAT: Kimeneti mérések átlagai (8. osztály, geometria)			
	2008/2009-es tanév	2009/2010-es tanév	2010/2011-es tanév
8/a (gimnázium – kontrollcsoport)	4,03	3,82	3,94
8/b (gimnázium – GeoGebrás csoport)	4,21	4,23	4,31
8/a (általános iskola – kontrollcsoport)	2,65	2,71	2,58
8/b (általános iskola – GeoGebrás csoport)	3,11	3,13	3,09

A bemeneti méréseket tartalmazó 1. táblázattal összehasonlítva a következők figyelhetők meg:

- A Geogebra használó általános iskolai csoportnál átlagosan 8 százalékos javulás jelentkezett, ami egy közepes szint fölé emelkedést is jelentett egyúttal.
- A Geogebra használó gimnáziumi csoportnál átlagosan 12 százalékos javulás jelentkezett, azaz egy jobb képességű csoport esetében a GeoGebra használata még jobb eredményeket hozhat.
- A kontrollcsoportok eredményei számottevően nem javultak (néhány esetben még romlottak is).

A kimutatható eredményeken kívül van még azonban előnye a GeoGebra használatának: segítheti akár a nevelési feladatok hatékonyabb ellátását is. A végső cél egy kreatív személyiség kialakítása lenne, aki megállja a helyét a gyorsan változó világunkban, a munkaerőpiac bármely szegmensében. Ez azonban a gondolkodási műveletek igen erőteljes és tudatos fejlesztésén alapul, ebben a GeoGebra, véleményem szerint, egy mindenképpen felhasználható ütőkártyát jelenthet.

## IRODALOM

- [1] DR. CZEGLÉDY István – DR. OROSZ Gyuláné – DR. SZALONTAI Tibor – SZILÁK Aladárné (2000): *Matematika tantárgypedagógia I.* Bessenyei György Könyvkiadó, Nyíregyháza. Főiskolai jegyzet.
- [2] <http://www.geogebra.org/cms/> [2010.12.16].
- [3] <http://zeus.nyf.hu/~kovacs/GeoGebra/kovacs.zoltan.b.pdf> [2010.12.16].
- [4] PÓLYA György (2000): *A gondolkodás iskolája.* Akkord Kiadó, Budapest.