

TANULMÁNYOK

A matematika filozófiájáról¹

RUZSA IMRE

A logicizmus

A logicizmus alaptézise ez: *a matematika a logika része*. Ezen, pontosabban, azt értik a logicisták, hogy *a matematikai tételek logikai igazságok, tautológiák*. Hogy a logicista tézis értelme világos legyen, ahhoz először is meg kellene adni a logikai igazságot, a tautológia pontos definícióját.

A logicista iskola tézise tulajdonképpen Leibniztól származik. Leibniz kísérletet tett a logikai igazság definiálására is. Megkülönböztetett *tényigazságokat* és *észigazságokat*. A tényigazságok érvényesek ugyan a meglevő világban, de nem szükségszerű, hanem csupán véletlen jellegűek: helyettük igaz lehetne a tagadásuk is. Pl. tényigazság, hogy Franciaország fővárosa Párizs, de nem ütköznék gondolkodásunk törvényeibe az sem, ha ez nem lenne igaz. A tényigazságokkal szemben az észigazságok (ezek lennének a logikai igazságok vagy tautológiák) szükségszerűen igazak; nemcsak a meglevő, hanem minden lehetséges világban érvényesek, sőt akkor is érvényesek lennének, ha semmiféle világ nem léteznék. Ez azon múlik, hogy az észigazságok mindig *általános* jellegűek. Pl. az alternáló logikában a

Ha A és B , akkor B

tautológiaséma azt az észigazságot fejezi ki, hogy *minden* A és B kijelentésre igaz az, hogy ha A és B , akkor B ; vagy az, hogy $2 + 3 = 5$, azt az észigazságot fejezi ki, hogy *bármiféle* két dolog és *bármiféle* más három dolog együttesen öt dolog. Az ilyen *általános* jellegű kijelentések tagadása mindig *létezés* fejez ki. Az első példánkra alkalmazva: ha tagadjuk azt, hogy

minden A és B kijelentésre igaz az, hogy
ha A és B , akkor B ,

akkor azt állítjuk, hogy

van olyan A és B kijelentés, amelyre nem igaz az, hogy
ha A és B , akkor B .

Hasonlóan, ha tagadjuk azt, hogy

bármiféle két dolog és bármiféle más három dolog együttesen öt dolog,
akkor azt állítjuk, hogy

van két olyan dolog és három olyan más dolog, amely együttesen nem öt dolog.

¹ Részletek a szerző *A matematika és a filozófia határán* című sajtó alatt levő könyvéből. A könyvet a Gondolat Kiadó előreláthatóan 1968 végén jelenteti meg.

De ha semmi sem létezik, akkor ezek a létezését állító kijelentések persze hamisak. Ezek tehát nem észigazságok, mert az észigazságok függetlenek a világ létezésétől.

Leibniz szerint az észigazságok arról ismerhetők fel, hogy tagadásuk az ellentmondástalanság elvével való összeütközéshez vezet: egy észigazság tagadása önellentmondás. Helyesen jegyezte meg ezzel kapcsolatban Russell, hogy ez a kritérium nem kielégítő: „Ha be akarjuk bizonyítani, hogy egy tétel tagadása önellentmondás, akkor az ellentmondástalanság elvén kívül valószínűleg más bizonyítási elvekre is szükségünk van”. De a bizonyítási elvek is észigazságok; tehát úgy tűnik, hogy az észigazság definíciója hibás körben mozog: észigazságok az olyan tételek, amelyek logikánk szerint igazak.

Russell, észrevéve ezt a hibás kört, más úton közeledik a logikai igazság problémájához. „Már nem elégedhetünk meg azzal, hogy a logikai igazságokat úgy definiáljuk, mint amelyek az ellentmondástalanság elvéből következnek. Még mindig hozzá lehet és hozzá kell azonban tennünk, hogy ezek egészen más fajtájúak, mint azok az igazságok, amelyekhez tapasztalati úton jutunk. Valamennyiük rendelkezik azzal a jellemző tulajdonsággal, amelyet 'tautológiának' nevezhetünk”; ez az, „amit homályosan sejtettünk, és amit az ellentmondástalanság elvéből való levezethetőség állításával akartunk definiálni”. — „Pillanatnyilag nem tudom a 'tautológiát' definiálni... habár érzésem szerint a definiálandó jellegzetesség számomra tökéletesen ismert.”

Más helyen Russell azt hangsúlyozza, hogy a logikai igazság lényeges ismérve *a priori* jellege. Az *a priori* Russell felfogásában nem egészen ugyanaz, mint Kant filozófiájában. „Abszurdum volna feltenni — írja —, hogy vannak velünk született elvek olyan értelemben, hogy a kisbabák születésükkor minden olyan ismerettel rendelkeznek, amivel a meglett emberek, és ami nem vezethető le a tapasztalatból.” El kell ismerni, hogy minden ismeretünket a tapasztalat idézi elő, de ismereteink között vannak olyanok is, amelyek „*a priori* természetűek abban az értelemben, hogy a tapasztalat, amelynek folytán gondolunk rájuk, nem elegendő bizonyításukhoz, csak éppen úgy irányítja figyelmünket, hogy igazságukat minden tapasztalati bizonyíték nélkül beállhassuk”. Az ilyen *a priori* ismeretek közé tartoznak a tautológiák is. (Russell megengedi, hogy bizonyos erkölcsi elveink is *a priori*ak. Az *a priori* ismeretek közül a logikai igazságokat egyértelműen kiválasztja az, hogy sémákkal, formulákkal egzaktul kifejezhetők.)

Ha szabad egy világhírű tudós véleményének közelében egy jelentéktelen ember véleményét is megjegyezni: „érzésem szerint” egy univerzális tautológia-fogalmat soha sem fognak elfogadhatóan definiálni. A matematikai logika minden fejezetének megvan a maga tautológia-fogalma. A matematikai logika azonban nem lezárt, befejezett, hanem fejlődőben levő tudomány. Egyre-másra keletkeznek új fejezetei. Egy-egy új fejezet keletkezése rendszerint azzal függ össze, hogy bizonyos „logikai igazságok” a már meglevő fejezetekben nem tautológiák. Az új fejezetben új tautológia-fogalmat kell megalkotni — és ez nem minden esetben tartalmazza magában valamely már meglevő fejezet tautológia-fogalmát. Arra is van példa, hogy a logikusok között vita folyik arról, hogy bizonyos logikai tételek tautológiáknak tekinthetők-e, vagy sem. A felsorolt tények máris erősen valószínűtlenné teszik, hogy léteznék egy *a priori* tautológia-fogalom.

A logicizmus felfogása szerint a logikai igazságok felismerésében a tapasztalatnak csak ösztönző, mintegy pedagógiai szerepe van; annak belátása,

hogy ezek igazságok, *a priori*, a tapasztalattól független, tehát tiszta szellemi folyamat. A materialista felfogás szerint a legegyszerűbb logikai igazságokban az emberiség sok évezredes, nemzedékről nemzedékre szálló tapasztalatai jutnak kifejezésre. Kinek van igaza?

Az első vizsgálódások eredményei a logizmus igazságának kedveznek. Ha megvizsgálunk egy egyszerű tautológiásémát vagy egy egyszerű következtetési sémát, azonnal átlátjuk igazságát. Valóban, csak azzal kell tisztában lennünk, hogy milyen értelemben használjuk a „nem”, „és”, „ha... akkor”, „igaz” és „hamis” szavakat — máris elfogadjuk, a tapasztalatra való hivatkozás nélkül, hogy a tautológiáséma, ill. a következtetési séma igazságot fejez ki. Hasonló a helyzet az olyan egyszerű aritmetikai tételekkel kapcsolatban is, mint „ $2 + 3 = 5$ ”; aki egyszer megértette a bennük szereplő jelek jelentését, az nem kételkedik igazságukban sem.

A matematikai logikai vizsgálatok szabatosan kimutatták, hogy logikáknak az a „törzsanyaga”, amely pl. a matematikában használatos bizonyításokhoz és fogalomalkotásokhoz elegendő, a benne szereplő műveletek definícióin kívül kevés számú logikai alapelven nyugszik. Ezen alapelvek közé tartozik pl. az ellentmondástalanság elve és a kizárt harmadik elve. Aki elfogadja ezt a néhány alapelvet, és megérti a műveletek jelentését, az automatikusan elfogadja az egész logikát is.

A felvetett kérdést tehát annak vizsgálatára lehet szűkíteni, hogy az említett logikai alapelvek *a priori*ak avagy tapasztalati eredetűek-e.

Már foglalkoztunk azzal a kérdéssel, hogy kijelentő mondataink csak meghatározott körülmények között tekinthetők kijelentéseknek, azaz hogy az ellentmondástalanság és a kizárt harmadik elve anyagi-tapasztalati összefüggések leírásakor csak korlátozott mértékben alkalmazható. Azt, hogy egyáltalán vannak olyan körülmények, amelyek között logikánk nagy pontossággal, igen jó közelítéssel *alkalmazható*, kizárólag a tapasztalat alapján tudjuk. A tagadás logikai fogalmát úgy alkottuk meg, hogy *a priori* mondhatjuk: igaz kijelentés tagadása hamis kijelentés. Hasonlóan az ördög fogalmát a mitológia úgy alkotta meg, hogy *a priori* mondhatjuk, az ördög szenteltvízzel elűzhető. De csak a tapasztalat dönthet abban a kérdésben, hogy vannak-e igaz kijelentések, és hogy vannak-e ördögök. A tapasztalat azt mutatja, hogy logikánk meghatározott körülmények között alkalmazható, de semmiféle tapasztalat nem szól a mitológia „alkalmazhatósága”, teszem azt, az ördögök létezése mellett.

Azt is mondtuk: szabatos absztrakt fogalmakra (pl. a matematikai fogalmakra) logikánk fenntartás nélkül alkalmazható. Talán ezen a területen érvényesül a logika *a priori* jellege? Igen, érvényesül mindaddig, amíg nem alkalmazzuk a fogalmakat. *A priori* igazság pl. az, hogy a geometria axiómáiból logikailag következik Püthagorász tétele. De csak a tapasztalatból tudjuk, hogy vannak olyan anyagi összefüggések, amelyek leírására az euklideszi geometria axiómarendszere igen jó közelítéssel alkalmas, továbbá hogy ezen összefüggések körében az axiómák logikai következményeiként nyert tételek ugyancsak jó közelítéssel érvényesek.

Az a tény, hogy egyes *a priori* úton alkotott matematikai rendszerek alkalmasnak bizonyulnak különféle materiális összefüggések leírására, ugyancsak arról tanúskodik, hogy logikánk, amelyet az *a priori* rendszer felépítésekor használunk, mélyen az anyagi valóságban, a tapasztalatban gyökerezik.

Így foglalnám össze: Igaz, hogy a logika különféle fejezeteit *utólag*

felépíthetjük néhány alapelvre *a priori* úton. (Hasonló igaz a matematika fejezeteire is.) De a logika (és a matematika) egészének tényleges kialakulása és fejlődése történelmileg az emberiség gyakorlati tevékenységében gyökerezik, és a logikai alelvek „igazsága” — pontosabban: az, hogy meghatározott körülmények között *alkalmazhatók* — kizárólag tapasztalati alapon nyugszik.

Megjegyezzük, hogy a logikának az a része, amelyet a matematikai bizonyításokban felhasználunk, az ún. *alternáló logika*. A logika egyéb fejezeteinek felépítéséhez az alternáló logika alelveit szűkítik vagy bővítik, esetleg részben más alelvekkel helyettesítik. De mindig csak a tapasztalat nyújt biztosítékot arra, hogy vannak olyan körülmények, amelyek között a felvett alelvek teljesülnek. Így a „logikai igazság” fogalma attól függ, hogy milyen logikai rendszerről, a logika melyik fejezetéről van szó. Ezért valószínűtlen, hogy léteznék a logikai igazságnak, a tautológiának egy abszolút végérvényes, mindenre kiterjedő fogalma.

Ezekután visszatérhetünk a logicizmus alaptézisére. Látjuk, hogy ha az abszolút tautológia fogalmát mint (legalábbis eddig) megalapozatlant elvetjük, akkor eleve csak annyit lehet feltételezni, hogy a matematikai tételek az alternáló logika tautológiái. Egyelőre tekintsünk el attól, hogy ez a tézis igaz-e, és csupán azt vegyük szemügyre, hogy *filozófiailag* mi a mondanivalója.

Ha a logikai igazságok *a prioriak* — ahogyan Russell vallja —, akkor a tézis a matematikai tételek *a priori* voltát hirdeti. Ismeretes, hogy a matematika egyes fejezeteinek axiomatikus felépítésében a tételeket logikailag bizonyítjuk (azaz *a priori* származtatjuk) az axiómákból. De honnan vesszük az axiómákat? A russelli tézis lényege: a matematika axiómái is *a prioriak*, leszámaztathatók az *a priori* logikából.

A materialista álláspont ezzel szemben nem a logicista tézis egyszerű tagadása, vagyis pusztá visszaütése annak, hogy a matematika a logika része. Hiszen ezzel csupán azt tagadnánk, hogy a matematika *a priori*, de elismernénk a logika *a priori* voltát (vagy legalábbis nyitva hagynánk az erre vonatkozó kérdést). A materialista álláspont a logika *a priori* voltának határozott tagadása. Az idevágó érveket már láttuk.

A logicista iskola hívei nem vallják egyöntetűen a megalapítók (Frege és Russell) filozófiai nézeteit. Ami az iskola híveinek álláspontjában közös, annak lényege a következő: a formális logika és a matematika lényegében azonos jellegű tudományok.

Ha elismerjük az alternáló logika tapasztalati eredetét, akkor a logicizmus alaptézisével *filozófiailag* nincs miről vitatkozni. Ha a tézis igaz, az azt jelenti, hogy a tapasztalati származású matematikát utólag rekonstruálni lehet az ugyancsak tapasztalati alapokon nyugvó alternáló logikában. A logicista iskola célul tűzte ki e rekonstrukció lehetőségének *bizonyítását* olyan szabotossággal, amilyen a matematika bizonyításait *jellemzi*.

A feladat „klasszikus” megoldása Russell és Whitehead hatalmas háromkötetes műve, a *Principia Mathematica* (1911–1913). A megoldás azon az ötleten nyugszik, hogy a halmazelméletben a matematika minden fejezete modellezhető. Így elegendőnek látszik a halmazelméletről kimutatni, hogy a logika része. Ennek megfelelően Russellék műve egy Russell-típusú axiomatizált halmazelméletet mutat be, amelyet ők *osztályelméletnek* neveznek. A halmaz fogalmát is az osztály fogalmával helyettesítik. Az osztályt logikai fogalomnak, a rá vonatkozó axiómákat logikai igazságoknak tekintik. Ebben a keretben azután — lényegében ugyanazon az úton, ahogyan

a halmazelméletben modelleket szerkesztünk a matematika egyes fejezeteihez — sikerült az addig ismert — az ún. klasszikus — matematika túlnyomó részét reprodukálni. De pl. a Cantor-féle naiv halmazelméletből kevesebbet reprodukált ez az elmélet, mint a mai Zermelo-típusú axiomatizált halmazelméletek.

A *Principia Mathematica*ban szerepel három olyan axióma, amelyről Russell kénytelen elismerni, hogy egyikük sem logikai igazság. Az egyik a végtelen halmaz axiómája, a másik a kiválasztási axióma, a harmadik pedig az ún. reducibilitási axióma. A legutóbbinak lényegében az a szerepe, hogy részlegesen feloldja azt a korlátozást, amely szerint egy osztály elemei csak az osztályt tartalmazó típust közvetlenül megelőző típusba tartozhatnak. Így még a matematika tárgyalt részét sem sikerült a logikából levezetni.

Russell ezzel kapcsolatban eleinte azt a reményét fejezte ki, hogy a későbbi kutatásokban talán sikerül majd ezeknek a nem-logikai jellegű axiómáknak a kiküszöbölése. Mint látni fogjuk, a további kutatások rácaffoltak ezekre a reményekre. Valószínűleg ennek hatására Russell úgy módosította véleményét, hogy a matematikai tételek feltételes állítások: „A tiszta matematikát csupa olyan kijelentés alkotja, amely szerint ha ez és ez az állítás valamiről igaz, akkor ugyanarról a dologról ez és ez a másik állítás is igaz.” Az első állítás lehet pl. egy (logikai igazságra visszavezethetetlen) axióma, a második az axióma egy következménye. Egyébként ez a megállapítás igaz, csak persze nem meríti ki a matematika tartalmát: nem szól sem az útról, amely az ilyen kijelentések megalkotásához vezet, sem arról, hogy mindez mire jó.

A logicista iskola értékes és maradandó matematikai eredményét, úgy hiszem, két pontban lehet összefoglalni.

a) A logicista iskola vezető egyéniségei kimagasló szerepet játszottak a matematikai logika megalapozásában és fejlesztésében. Figyelembe véve a matematikai logika mai tudományos (nemcsak matematikai) és műszaki jelentőségét, ez már önmagában is történelmi jelentőségű eredmény.

b) A logicizmusnak nagy szerepe volt annak feltárásában, hogy az axiomatikus módszer csak a matematikai logika keretében alkalmazható szabatosan. Ennek tudható be, hogy napjainkban a matematika alapjaival foglalkozó munkák, bármilyen beállítottságúak is egyébként, a matematikai logika (vagy legalább egy töredéke) kifejtésével kezdődnek (akkor is, ha a szerzők nem ismerik el „logikának” azt, amit csinálnak, hanem pl. „evidens szabályok” felsorolásának tekintik).

Már utaltunk bizonyos későbbi eredményekre, amelyek szerint a logicista program megvalósítása reménytelen. Bebizonyosodott, hogy egyetlen axiómarendszer keretei közé semmiképp sem zárható be az egész matematika — s így biztosan nem vezethető le az alternáló logika (axiomatikusán ugyan csak felépíthető) rendszeréből sem. A logicista program ezzel tárgytalanná vált.

De lehet szó még egy „megfejtelt”, módosított logicizmusról: a matematika azért része a logikának, mert bármely matematikai axiómarendszer egy logikai rendszer, amelyben semmi mást nem vizsgálunk, mint azt, hogy bizonyos kijelentéseknek (az axiómáknak) milyen más kijelentések (a rendszer tételei) a következményei. Egy matematikai bizonyítás tiszta logikai tevékenység. (Kb. ennyi Russell módosított felfogása is.)

Ebben a megállapításban kétségtelenül benne van az igazságnak egy lényeges része. De egészében úgy tűnik, hogy a logicizmus az igazság egy

oldalát éppúgy eltúlozza, mint a platóni-cantori felfogás, amely abból, hogy a matematika minden ága modellezhető a halmazelméletben, arra következtet, hogy a matematika azonos a halmazelmélettel.

Az igazság pedig az, hogy az axiómák megadása és az axiómákból tételek bizonyítása a matematikai tevékenységnek lényeges, de nem egyetlen alkotó eleme. Sőt, ennek a tevékenységnek van egy kifejezetten *másodlagos* jellege. Az *elsődleges* matematikai tevékenység (amennyire tudom, ebben az alkotó matematikusok egyetértenek): jelenségek valamilyen körének „naiv” vizsgálata. Ez a jelenségek kör lehet az anyagi valóság egy közvetlen területe (természeti, műszaki-technikai vagy akár társadalmi vonatkozású), lehet egy más tudományág része, és lehet a matematika egy meglevő fejezete. A tanulmányozás oka lehet valamilyen közvetlen gyakorlati szükséglet, lehet valamilyen elméleti jellegű probléma, és lehet a matematikus „önzetlen” belső vonzódása is a téma iránt. Ezt az alkotó tevékenységet követheti a rendszerezés: mintegy kikísérletezése annak, hogy milyen egyszerű összefüggéseket célszerű axiómáknak tekinteni. (Persze ez az elsődleges tevékenység mindenfajta tudományos tevékenység velejárója, pl. azé is, amely a matematikai logika megalkotásához vezetett.)

A végletek könnyen át is csapnak egymásba. Ha azt bizonygatják nekem, hogy a matematika a logika része, akkor az érvek súlya alatt kezdek rájönni, hogy a matematikát tényleg nem lehet megkülönböztetni a logikától, és rádöbbenek, hogy éppen fordítva: a logika — ti. a matematikai logika — semmi más, mint a matematika egy fejezete.

Valóban, mi a különbség a matematikai logika és, mondjuk, a valószínűségszámítás között? A matematikai logika a következtetések vizsgálatára alkalmas matematikai elmélet, a valószínűségszámítás pedig a véletlen tömegjelenségek vizsgálatára alkalmas matematikai elmélet.

Hát így is lehetne látni a logika és a matematika viszonyát (sokan valóban így is látják). De próbáljunk tárgyilagosaak maradni. A valóság az, hogy a matematika minden fejezete használ logikai módszereket (ti. bizonyításaiban), és ugyanakkor a matematikai logikában a legkülönbébb matematikai módszerek felhasználásra kerülnek. Ami ebből világosan látszik, az a következő: a matematika és a formális logika közötti kapcsolat nem alá- és fölérendeltségi jellegű, hanem a sokrétű kölcsönhatás és a sok tekintetben való összefonódás, a kettejük közötti határvonal-elmosódás jellemzi kapcsolatukat.

Nem kellene ez ellen, világnézeti megfontolások alapján, tiltakozni? A logika a gondolkodás tudománya, a matematika pedig az anyagi jelenségek köréből absztrahált fogalmakkal dolgozik. Nincs-e valami olyan filozófiai törekvés ebben a határvonal-elhalványításban, hogy elmosás az anyag és a tudat közti különbséget, vagy hogy egyenesen a tudatot emeljék ki elsődlegesnek az anyaggal szemben? — Semmiféle ilyen világnézeti következménytől nem kell tartanunk, ha szilárdan kitartunk a logika tapasztalatai eredetének eszméje mellett. Hiszen az, hogy bizonyos gondolkodási folyamatok — ti. a következtetések — vizsgálatára ugyanannak a matematikának módszerei alkalmasak, mint amelyekkel ki lehet számítani pl. egy holdrakéta pályáját, teljesen világossá válik, ha tudjuk, hogy végső soron a gondolkodás is anyagi folyamat.

A matematikának is, a formális logikának is végső forrása az emberi gyakorlat és ennek közvetítésével az anyagi világ. Csakis ennek alapján magyarázható a modern matematika és a modern formális logika — a matematikai

logika — sokrétű kölcsönhatása, és még inkább csak ezen az alapon magyarázható kielégítően mindkettőnek *alkalmazhatósága anyagi folyamatokra*.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a módosított logicizmus eszméje is téves: a matematika nem része a logikának. Ezt egyszerűen a matematika és a matematikai logika eredményei cáfolják: egyik tudományt sem lehet a másikban egyértelműen elhelyezni. A logicizmus komoly tanulsága viszont az, hogy a matematika ismeretelméleti helyének materialista meghatározásában nagy figyelmet kell szentelni a matematika és a formális logika közötti kapcsolat helyes feltárásának. E kapcsolat letagadása vagy elhallgatása csak az idealista magyarázatoknak kedvez.

Az intuicionizmus

A logicizmus a matematikai tevékenység egy lényeges vonását, a formális logikának a matematikai fogalomalkotásban és bizonyításban betöltött szerepét túlozza el. A matematika intuicionista filozófiájáról viszont első közelítésben azt mondhatjuk, hogy az intuíciónak és a konstrukciónak a matematikában (a fogalmak, összefüggések, bizonyítások *felfedezésében* és megalkotásában) betöltött szerepét túlozza el egyoldalúan. Ez az eltúlzás Brouwernek, az intuicionizmus vezéregyéniségének filozófiájában sajátos miszticizmussal és szubjektív idealizmussal ötvöződik.

Brouwer először is kifejti, hogy (szerinte) mi *nem* a matematika. Szerinte a matematika független az érzéki tapasztalattól (ezzel elhatárolja magát az empirizmustól és a materializmustól), és független a nyelvi kifejezési formától és a logikától is (ezzel elhatárolja magát a logicizmustól). De az sem igaz, hogy a matematika tárgya eleve adott valami érzékfölötti világban (ezzel elhatárolja magát a platóni-cantori filozófiától is). A matematikai objektumokat maga a tudat hozza létre, *konstruálja* bizonyos, kizárólag a tudatban meglevő alapelemekből. Így a matematizálás *a priori* és nyelv nélküli tudattevékenység.

Mik lennének azok az alapelemek, amelyekből a tudat a matematikai objektumokat megkonstruálja? Ezek az alapelemek az idő múlásának érzékeléséből keletkeznek. Az idő úgy múlik, hogy egy „életmozzanat” széthasad múltra és jelenre, a múlt utat enged a jelennek, de megőrződik az emlékezetben. Így az idő múlásával minden „életmozzanat” egy „kettősséget” hoz létre. Ezek a kettősségek, megfosztva minden minőségtől, mint üres formák alkotják a matematika alapintuícóját.² Brouwer saját szavai szerint: „... az intuicionista matematika egy lényegében nyelvnélküli értelmi tevékenység, melynek eredete *az idő egy elmozdulásának* („a move of time”) érzékelése, ti. annak, hogy egy életmozzanat („a life moment”) két különböző dologra esik szét, melyek közül az egyik utat enged a másiknak, de megőrződik az emlékezetben. Ha az így megőrzött kettősséget („two-ity”) megfosztjuk minden minőségtől, marad *az összes kettősségek közös szubsztrátumának üres formája*. Ez a közös szubsztrátum, ez az üres forma *a matematika alapintuícója*.”

Hogy ebből az alapintuícóból hogyan épül föl a matematika, annak részletezésébe nem bocsátkozhatunk. A lényeg az, hogy az említett alapelemekből a tudat önevidens konstrukciókat végez, amelyek nem szorulnak

² Az „érzékelés” itt tudatfolyamatot jelent, és nem olyan információt, amelyet érzékszerveink közvetítenek agyunkba.

sem tapasztalati, sem logikai igazolásra. A konstrukciók eredményei matematikai objektumok (pl. természetes számok, törtek, véges halmazok stb.), amelyek léteznek, hiszen a tudat megalkotta őket.

De amit a tudat az alapintuíciónál meg tud konstruálni, az a matematikának csupán elenyésző töredéke (a „véges” matematikája). Hogy tovább lehessen menni, az intuicionizmus a végtelen sorozat képzését is elfogadja önévidens tudattevékenységnek. Elismeri a természetes számok halmazát mint aktuálisan végtelen halmazt, de nem ismer el nem megszámlálhatóan végtelen halmazokat mint befejezett, kész matematikai objektumokat, mert a tudat nem képes ezeket megkonstruálni. Így az intuicionista felfogásban pl. „a valós számok halmaza” mint matematikai objektum nem létezik; helyett van egy közeg, amelyben valós számok korlátlanul keletkezhetnek. Az intuicionista matematika nem is használja a „halmaz” kifejezést a szüntelen keletkezés eme közegére, hogy elhatárolja magát a hagyományos, klasszikus matematikától.

Az intuicionizmus szerint a matematikának ennyivel be kell érnie. A végtelen halmazok elmélete nem matematika, akár ellentmondásos, akár nem. Matematika csak az, amit a tudat effektíve meg tud konstruálni. Ha ehhez szigorúan ragaszkodunk, akkor biztosan nem jutunk ellentmondáshoz: amit a tudat megkonstruált, az létezik, azt semmiféle logikai okoskodás nem teheti nemlétezővé. Az intuicionista matematikában szó sem lehet ellentmondásokról, hiszen ebben a matematikában tételek és bizonyítások valójában nincsenek, csak konstrukciók. Egy ilyen konstrukcióról persze beszámolhatunk; pl. elmondhatjuk, hogy egy tetszőleges adott természetes számot hogyan bontunk törzstényezőkre, és ha ezt a konstrukciós folyamatot a formális logika nyelvén fogalmazzuk meg, akkor beszámolónkat úgy tekinthetjük, mint annak bizonyítását, hogy bármely 1-nél nagyobb természetes szám törzstényezőkre bontható. De — siet hozzáfűzni az intuicionista filozófia — ez a logikai beszámoló sohasem kimerítő (adekvát) leírása a tudatban végbemenő konstrukciós folyamatnak, mert a matematikai konstrukció nyelvnélküli tevékenység, a formális logika pedig lényegében egy nyelv.

A matematikai konstrukciónak mindig van nyelvi-logikai leírása, habár ez a leírás nem kimerítő. Jogos-e ennek a megállapításnak a megfordítása? Az intuicionizmus válasza erre az, hogy a megfordítás *általánosan* nem jogos. Ha egy matematikai tételt logikailag levezetünk, akkor nem minden esetben tudunk elvégezni egy olyan nyelvnélküli, intuitív matematikai konstrukciót, amelynek az adott levezetés (közelítően hű) leírása. A konstrukció elvégezhetetlen, ha a levezetésben szerepel a kizárt harmadik logikai elvének bizonyos speciális alkalmazása. Ezt néha úgy szokták megfogalmazni, hogy az intuicionizmus nem fogadja el korlátlanul a kizárt harmadik logikai elvét.³

Hogy a kizárt harmadik elvének milyen alkalmazása nem rekonstruálható intuitív konstrukcióval, azt egy példával kíséreljük meg illusztrálni.

Képzeljünk el egy szállodát, amelynek szobáiról kimondjuk a következő állítást: „Van olyan szoba, amelyiknek nincs külön bejárata”. Rövidítsük ezt a kijelentést A -val. „ A ” tagadása, „ $NEM A$ ”, ezt mondja: „Nem igaz, hogy van olyan szoba, amelyiknek nincs külön bejárata”; és ez természetesen ugyanazt

³ Brouwer nézeteire vonatkozóan ez a megfogalmazás pontatlan, hiszen szerinte a matematikai tevékenységben a logikának nincs szerepe. Néhány lappal később majd kiderül, hogy ez a megfogalmazás milyen vonatkozásban helytálló.

mondja, mint a következő: „Minden szoba külön bejáratú. A kizárt harmadik elve szerint, ha pl. „A” hamisnak bizonyul, akkor „NEM A” biztosan igaz, hiszen harmadik eset nincs.

Intuicionista felfogásban „A” is, „NEM A” is csak úgy értelmes, ha valamilyen feladat megoldását fejezi ki. Alkalmasak pl. a következő feladatok:

F1. Effektíve találni kell egy olyan szobát, amelynek nincs külön bejárata.

F2. Be kell mutatni, hogy minden szobának van folyosóra nyíló ajtaja.

Intuicionista felfogásban az *F1.* feladat megoldásáról szóló beszámoló az „A” kijelentés bizonyítása, az *F2.* feladat megoldásáról szóló beszámoló pedig a „NEM A” kijelentés bizonyítása.

Most képzeljük el, hogy a szálloda portása pl. az alábbi „konstrukcióról” számol be:

„Benyitottam minden folyosóra nyíló ajtón, de egyik szobában sem láttam mennyezetes ágyat. Pedig biztos, hogy néhány szobában mennyezetes ágy van.”

Ebből a beszámolóból világos, hogy mennyezetes ágyak csak olyan szobákban lehetnek, amelyek nem a folyosóról nyílnak, tehát vannak nem külön-bejáratú szobák is. Így biztos, hogy az *F2.* feladat megoldhatatlan.

De akkor a „NEM A” kijelentés hamis, így a kizárt harmadik törvénye szerint „A” igaz.

Ám ez az utolsó logikai lépés már nem konstrukcióról szóló beszámoló. Az „A” kijelentés bizonyítása csak az *F1.* feladat (vagy valamilyen más, vele egyenértékű feladat) megoldásáról szóló beszámoló lehetne. De mi csak egy olyan beszámolót kaptunk, amelyből arra lehet következtetni, hogy az *F2.* feladat megoldhatatlan. (Ezt a következtetést az intuicionista felfogás is elfogadja.) És ez egyáltalán nem azonos az *F1.* feladat megoldásával, hiszen a portás beszámolójában szó sincs arról, hogy talált akárcsak egy nem külön-bejáratú szobát is.

Mégis, úgy érezzük, hogy ha az *F1.* feladat effektív megoldására nem is került sor, de bebizonyosodott, hogy ez a feladat megoldható. Meg is tudjuk mondani, hogyan. Be kell nyitni sorba minden folyosóra nyíló szobába, és meg kell nézni, nyílik-e a szobából másik ajtó. Ha igen, be kell nyitni ezen az ajtón, és meg kell nézni, hogy annak a szobának, amelybe jutottunk, van-e folyosóra nyíló ajtaja. Ezt addig kell folytatni, amíg az első olyan szobát meg nem találjuk, amelynek nincs folyosóra nyíló ajtaja. Ilyen szobát előbb vagy utóbb kell találnunk, hiszen a portás beszámolója alapján ilyen szoba biztosan van. Mihelyt megtaláltuk ezt a szobát, megoldottuk az *F1.* feladatot.

Edmond Dantes, a későbbi gróf Monte Christo, bízvást magáénak érezhette a mesés kincset, mielőtt még ténylegesen hozzájutott, hiszen pontos és megvalósítható útmutatása volt a kincs megtalálására. Valóban, aminek megszerzésére megvalósítható receptünk van, azt máris úgy tekinthetjük, mint amit megszereztünk. Ebben az intuicionizmus is egyetért, és elfogadja az előző bekezdés érvelését az *F1.* feladat megoldásának, azaz a nem külön-bejáratú szoba effektív megtalálásának — *mindaddig, amíg a szállodában véges sok szoba van.* Mert ha a szállodában történetesen végtelen sok szoba van, akkor az előbbi bekezdés utolsó előtti mondata, ti. az, hogy „Ilyen szobát előbb vagy utóbb kell találnunk”, hitelét veszti; hiszen végtelen sok szobát nem tudunk végignézni. Ebben az esetben *F2.* megoldhatatlansága nem jelenti *F1.* tényleges megoldását. Olyan a helyzet, mintha Dantes csak annyit tudott

volna, hogy a kincs valahol az Atlanti-óceán fenekén van; ennek a tudásnak alapján valószínűleg sohasem találta volna meg a kincset. Sőt, még rosszabb a helyzet, mert az óceán ugyan nagy, de véges, elméletileg végigkutatatható; viszont ki tud végtelen sok szobát végigjárni?

De végtelen sok szobás szálloda nincs is! Ez igaz, de van végtelen sok természetes szám, és a matematika végül is nem szállodai szobákkal, hanem pl. számokkal foglalkozik. Világos, hogy csak a szemléletesebb megfogalmazás kedvéért beszéltünk matematikai objektumok helyett szobákról. A tanulást így is meg tudjuk fogalmazni: Ha egy *végtelen* halmaz elemeiről tudjuk, hogy kell lennie közöttük (legalább egy) ilyen és ilyen tulajdonságú elemnek, e tudásunkból még nem következik, hogy konkrétan be is tudunk mutatni egy ilyen tulajdonságú elemet. Másképp: a nemlétezés cáfolata még nem jelenti a létező effektív megtalálását (végtelen halmazban). Hiába tudod: lehetetlen, hogy ne legyen kincs — ettől még a kincs nem lesz a kezében.

Ez józan okoskodás. Aki már kereste a szemüvegét — határozottan emlékezve rá, hogy nemrégiben még használta, és azóta nem lépett ki a szobából —, nagyon jól tudja, mi a különbség ennek tudása: „Lehetetlen, hogy a szemüveg nincs a szobában”, és a szemüveg effektív megtalálása között — pedig hát a szobában csak véges sok polcot és zugot kell végigkutatni. No de ha a nemlétezés meg van cáfolva, akkor ezzel a létezés mégiscsak be van bizonyítva, még végtelen halmaz esetén is? Az intuicionizmus szerint ennek egyszerűen nincs értelme. Szerinte a matematizálás nem bizonyítás, hanem konstrukció. Valami létezésének bizonyítása: nem matematika, hanem metafizika. A matematika megkonstruál, előállít valamit, vagy legalábbis elvileg elvégezhető módszert ad a konstrukcióhoz. Csakis egy ilyen konstrukcióról szóló beszámolót lehet tekinteni a létezés „bizonyításának”.

Ezért ha egy tételünk azt állítja, hogy egy végtelen halmaz elemei között létezik ilyen és ilyen dolog, és el tudunk végezni egy olyan konstrukciót, amely a dolog nemlétezését megcáfolja, ezzel megcáfoltuk ugyan a tétel tagadását, de magát a tételt nem bizonyítottuk be, mert bizonyításául csak egy olyan beszámoló fogadható el, amely a szóban forgó dolog konstruálásáról szól. Ennyiben nem fogadja el az intuicionizmus korlátlanul a kizárt harmadik elvét.

Ez volna hát nagy vonalakban Brouwer filozófiája. A kiindulópont: az idő tiszta intuíciója, világosan kanti eredetű. Kant szerint a matematika alapja az idő és tér *a priori* intuíciója. Brouwer az egyik közeget, a teret, megtakarította. Ezt nyugodtan megtehetette, mert mint matematikus tudta, hogy a geometriák — akár az euklideszi, akár a nem euklidesziek — modellezhetők a valós számok elméletében. A térről mint a matematika közegéről való lemondást bizonyára az is indokolta, hogy egy *a priori* térnek csak egy *a priori* geometriája lehetne, s Brouwer mint matematikus nem akarta elvetni a geometriák sokféleségét.

Mint a logicizmushoz, a brouweri filozófiához is járul egy program: a matematika fölépítése az intuicionista alapelvek szerint. De míg a logicista programban csupán a már meglevő, klasszikus matematika rekonstrukciójáról van szó, addig az intuicionista program egy *új*, a klasszikussal élesen szembenálló matematikát követel. Így az intuicionizmus nemcsak filozófálás a matematikáról, hanem *matematikai irányzat* is. Brouwer föllépése óta kétféle matematikáról beszélhetünk: klasszikusról és intuicionistáról.

Az intuicionizmus filozófiáját és az intuicionista matematikát élesen

meg kell különböztetnünk egymástól. Az intuicionista *matematikának* meg-
lehetősen népes tábora van, elsősorban a matematika alapkérdéseivel fog-
lalkozó matematikusok körében. Ennek magyarázata bizonyára az, hogy
az intuicionista matematizálás a jelenleg legbiztosabbnak látszó módszer
mindenféle ellentmondás elkerülésére. Miután ebben a matematikában csak
konstruált (vagy legalább elvben konstruálható) objektumokról van szó, az el-
lentmondások — mint ők mondják — kizártak. Amit egyszer megkonstruál-
tunk — mondják — az létezik, és a létezőt semmiféle logikai érvelés nem teheti
nemlétezővé. Viszont alig van híve az intuicionista matematikának azoknak
a matematikusoknak körében, akik nem foglalkoznak a matematika alapkér-
déseivel (az algebra, a geometria, az analízis stb. specialistái). Ők az intuicio-
nizmus szigorú korlátait szűkebb szakterületük művelésében fölösleges bék-
lyóknak vélik.

Az intuicionizmus *filozófiáját* — legalábbis a Brouwer-félét — az intui-
cionista matematikusok túlnyomó többsége is elveti. Ami ennek ködös-misztik-
us alapjait illeti, azon nem is lehet csodálkozni. A brouweri filozófiát helyet-
tesítő megfontolások nagyon változatosak: a pozitivizmustól a dialektikus
materializmusig szinte minden árnyalatot megtalálunk. Egyes szovjet intui-
cionista matematikusok — ők *konstruktivistáknak* nevezik magukat — pl.
azt állítják, hogy a dialektikus materializmussal egyedül a konstruktivista
matematika egyeztethető össze.

Amiben az intuicionista matematikusok megegyeznek (bárhogyan
nevezzék is magukat — ti. az idők során számos alirányzata keletkezett az is-
kolának), a következő: Szigorú ragaszkodás ahhoz, hogy a matematikai te-
vékenység minden lépése *evidens konstrukció* legyen (vagy legalább módszert
nyújtson egy evidensen elvégezhető konstrukcióhoz); a nem megszámlálható
végtelen mint nem konstruálható elvetése; a kizárt harmadik elvének véges
halmazokra való korlátozása. A mai intuicionizmus nagyrészt szakított a merev
logika-ellenességgel, és ennek megfelelően kidolgoztak egy ún. intuicionista
logikát. (Ők maguk ezt feladatlogikának értelmezik, amelyben nem kijelenté-
sekkel, hanem feladatokkal végeznek műveleteket. Egy következtetés itt
nem azt jelenti, hogy a ha premisszáik igazak, akkor a konklúzió is igaz, hanem
ezt: ha a premisszáik megoldható feladatok, akkor a konklúzió is megoldható.)
Használják az intuicionisták az axiomatikus módszert is, bár mind a logika,
mind az axiomatikus módszer használata miatt mentegetőznek, mondván,
hogy mindkettőnek csak pedagógiai jelentősége van.

Milyen eredményt tud felmutatni az intuicionista matematika? A korlá-
tozott eszközök korlátozott eredményeket hoznak: ami az intuicionisták kezé-
ben a matematikából megmaradt, az bizony a klasszikus matematikának
csak töredéke. De az intuicionizmus ezért nem röstelkedik, hiszen ami eszközei
számára hozzáférhetetlen, az felfogása szerint nem is matematika. Ám az út,
amelyen az intuicionizmus eljut eredményeihez, az esetek többségében sokkal
bonyolultabb és fárasztóbb, mint a klasszikus út. Még megjegyezzük, hogy
vannak az intuicionista matematikának a klasszikussal összeegyeztethetetlen
eredményei is.

Brouwer filozófiai alapjáról most már nem szólva, az intuicionizmus
álláspontjában sok figyelemre méltó, sőt első hallásra kifejezetten szimpatikus-
nak tűnő elem van. A valós számokat mint végtelen tizedes törteket (és általá-
ban a sorozatokat) szüntelenül keletkezőben levőknek tekinteni — dialektikus
gondolat. Hogy az effektíve megkonstruált többet ér, mint az, aminek csak

a létezése bizonyított, szintén nagyon józan, szinte „materialista” gondolatnak tűnik. (Azért ne feledkezzünk meg arról, hogy az intuicionista matematikában sem anyagi dolgokat konstruálnak, hanem fogalmakat.) De több ízben rámutattunk arra, hogy különféle „kitalált” vagy „ideális” fogalmak matematikai fölhasználása milyen reális, az alkalmazások szempontjából is nagy jelentőségű eredményekhez vezet. A klasszikus matematika „evilági” voltát, életerejét cáfolhatatlanul bizonyítja, hogy alkalmazásai révén valóságos termelőerővé vált, s gyakorlati jelentősége éppen napjainkban minden eddigit felülmúló sebességgel növekszik. Dobjuk el ezt a hasznos szerszámot csak azért, mert nem konstruálható fogalmakkal is dolgozik, és mert használata nem olyan „veszélytelen”, mint az intuicionista matematikáé? Ez álradikalizmus lenne mindaddig, amíg jobb nincs helyette, vagy amíg bizonyítást nem nyer, hogy módszerei elkerülhetetlenül ellentmondásra vezetnek. De e föl-tételek egyike sincs ma még megvalósulva. Az intuicionista matematika (legalábbis ma még) nem tudja minden tekintetben helyettesíteni a klasszikus matematikát.

Az intuicionista matematika létezését, művelését persze sem filozófiai, sem matematikai alapról nem lehet kifogásolni. Ha egy kutatóorvos annak tanulmányozására szenteli életét, hogy hogyan lehet vakon élni, arra azt mondjuk: nemes és tudományos életcélja van. Ha kísérletei érdekében saját szeméit is kiszúratja, akkor a tudomány hőseként tiszteljük. De ha később azt hirdeti, hogy csak a vakok élnek igazán, a látók nem (mert az igazi ismeretszerzés a tapintás, és a látók a tapintás helyett gyakran megelégszenek a pusztá látással, pedig amit csak látni lehet, de tapintani nem, az nem is létezik igazán), akkor már az a benyomásunk, hogy megbolondult. Ha pedig agresszíven azt követeli, hogy az igazság megismerése érdekében mindnyájan tolassuk ki szemünkvilágát, akkor kénytelenek vagyunk vele szemben radikálisabb intézkedéseket alkalmazni. Sajnos, az intuicionista matematikusok nagy része ehhez az agresszív állásponthoz áll legközelebb, amennyiben bizonyos „matematikai érzékszerveikről” való indokolatlan lemondásra sürgeti a matematikusokat. Az intuicionizmusnak ezt az álláspontját, amely szerint csak a saját matematikája matematika, vissza kell utasítani.

Hogy egy hasonlattal éljünk: mondhatjuk-e, hogy az intuicionisták kocsija, ha talán kissé lassújárátú is, de legalább biztosan balesetmentes? Általános az egyetértés abban a tekintetben, hogy igen — csak ott térnek el a vélemények, hogy mekkora a megengedett (biztonságos) sebesség felső korlátja. Ez a virágnyelven (vagy inkább autós nyelven) megfogalmazott kijelentés magyarul azt jelenti, hogy nincs egyetértés az intuicionisták körében abban a kérdésben, hogy meddig tekinthető egy konstrukció *evidensnek*, magától értetődőnek. A „konstrukció”, „evidencia”, „abszurdítás” kifejezéseket „intuitíve adottaknak” tételezik föl, amelyek nem szorulnak precíz értelmezésre. Így ezekkel kapcsolatban elég tág tere nyílik az önkényes értelmezésnek. Egy-egy konkrét intuicionista elméletben persze már szabatos értelmet nyernek a fenti szavak, ti. a rendszer axiomatikus fölépítésével. De az intuicionista hozzáállás szerint az axiomatizálás nem lényeges, csupán pedagógiai jelentőségű.

Hogy hogyan, milyen szabályok megtartásával kell konstruálni, ezt az intuicionisták intuitíve világosnak tekintik, de felfogásukban burkoltan axiómák és logikai törvények rejtőznek. A szabályozatlan konstruálás, azt hiszem, semmivel sem veszélytelenebb, mint pl. a naiv halmazelmélet. Ha konstrukcióval ellentmondáshoz nem is lehet jutni (mert egyáltalán nem fogal-

mazunk meg tételeket), azért paradox eredmények nincsenek kizárva. Gondoljunk csak a Richard-féle ellentmondásra. Ennek lényegét el lehet úgy mondani, mint utasítást egy konstrukcióra: meg kell keresni azt a legkisebb természetes számot, amely nem definiálható magyar nyelven 100 jellel. Mivel magyar nyelven 100 jellel definiálható természetes szám csak véges sok van, ezeket pl. növekedő sorrendbe helyezhetjük, és így megtalálhatjuk közöttük a legnagyobbat. Most a 0-tól a talált legnagyobb számig végignézzük ezt a sorozatot: van-e benne hézag? Ha van, akkor az első hiányzó szám lesz a magyar nyelven 100 betűvel nem definiálható természetes számok legkisebbike, ha pedig nincs, akkor a sorozat utolsó tagját követő szám lesz az. Így szépen megkonstruáltuk a magyar nyelven 100 jellel nem definiálható természetes számok legkisebbikét. Mivel semmiféle tételt nem mondtunk ki, nem jutottunk ellentmondásra. De struccpolitika volna ezt az eredményt megelégedéssel tudomásul venni, hiszen az a bizonyos szám mégiscsak definiálható 100 jellel.

Mi már tudjuk — hiszen kielemeztük —, hogy ez a konstrukciós utasítás rossz, ellentmondásos. De mi a biztosíték arra, hogy más, „evidens” konstrukciós utasítások nem vezethetnek hasonló paradox eredményre? Biztosíték lehet a konstrukciós utasítások axiomatizálása és az egész rendszer ellentmondástalanságának bizonyítása. De ez már az intuicionizmus alapjának feladását jelenti.

Nem akarom azt mondani, hogy a konstruálhatóság nem fokozza a biztonságérzetet a matematikában, de azt hiszem, rá kell mutatni, hogy bizonytalan, definiálatlan fölfogásában még a konstruálhatóság sem problémamentes. A biztonságérzet fokozásához a matematika más módszereivel (axiomatizálással és más, ezután említendő módszerekkel) való kombinálása szükséges. De — mint már mondtuk — ez idő szerint nem mondhatunk le a matematika egyéb, kevésbé biztonságos módszereiről sem.

Összefoglalva: Az intuicionista matematikának nincs egységes filozófiai alapja. A konstruktivitás alapelve, amely bizonyos laza egységbe fűzi az irányzatot, különféle filozófiai alapokról indokolható. De sem a filozófiai, sem a matematikai érvelések nem adnak kellő alapot a klasszikus matematika föladására, az intuicionista matematika kizárólagosságának, egyeduralmának elismerésére.

Hilbert programja

A matematika „megmentésére” vállalkozó nagyok közül Hilbert volt az, aki a legkevesebb filozófiai előítélettel látott munkához. Nem tűzte ki céljául hogy a matematika egészéről mutasson ki valami filozófiai állítást (mint a logicisták), azt sem, hogy megszüntesse az eddigi matematikát (mint az intuicionisták). Ő valóban nem kívánt mást, mint a klasszikus matematika megtisztítását és biztosítását az antinómiák ellen.

Gondolata a következő: A matematika, elemi formájában, nem más, mint konkrét fizikai objektumok leírása és a köztük levő kapcsolatok elemzése. A pozitív egész számok aritmetikáját pl. úgy képzelhetjük el, hogy a számokat egyforma tárgyakkal, babszemekkel, kavicsokkal, vagy függőleges vonalakkal — „|” — fejezzük ki; pl. az 1, 2, 3, ... számokat sorban egy, két, három, ... függőleges vonallal ábrázoljuk: |, ||, |||, ... A „2 + 3” összeadás nem más,

mint a „||” és a „|||” jel egymás mellé helyezése: „||||”. E példához hasonlóan minden aritmetikai műveletet úgy lehet felfogni, mint vonalakkal (vagy babszemekkel, kavicsokkal) végzett *fizikai eljárásokat*. A matematika legegyszerűbb fejezetei tehát nem mások, mint *fizikai dolgokkal végzett, precízen szabályozott fizikai eljárások elméletei*. A matematikának ezen a területén nem léphetnek föl ellentmondások, mert konkrét dolgok pontosan leírt kapcsolatai mindig kölcsönösen összeférnek egymással. Ha kétszer két vonást egymás mellé teszünk, ezt kapjuk: „||||”; és kizárt dolog, hogy ne ezt kapjuk.

Ez az eszmefuttatás hasonlóan indul, mint Brouweré, azzal a nem lényegtelen filozófiai eltéréssel, hogy a konstrukció közege a tudat helyett a fizikai világ, s a konstrukció helyességéért nem a belső, intuitív evidencia, hanem egy érzéki evidencia áll jót.

De Hilbert számára nem csak ennyi a matematika. Ő nem óhajt lemondani Cantor transzfinit matematikájáról. „Senki sem űzhet ki minket abból a Paradicsomból, amelyet Cantor teremtett” — mondotta, arra utalva, hogy az antinómiák felbukkanásában egyesek a Kerub lángpallosának fölvillanását vélték látni, amint megtorolja a Tudás Fája gyümölcsének tiltott kóstolgatását.

A fizikailag nem ábrázolható transzfinit fogalmakkal kibővített matematikai elmélet ellentmondástalansága már nem magától értetődő: bizonyításra szorul. Hogyan lehetne egy ilyen ellentmondástalansági bizonyítást megvalósítani? Ez a központi problémája a Hilbert megteremtette új elméletnek, az ún. *bizonyítás-elméletnek*.

Ehhez először is a szóban forgó elmélet leírását maximálisan precízzé kell tenni. Erre szolgál az *axiomatikus módszer*. Az axiomatizált elméletet pedig „le kell fordítani” kavicsokkal, babszemekkel vagy vonalakkal végzendő eljárások rendszerébe.

Hogy a világ kavics- és babszükségletét ne veszélyeztessék, a matematikusok a vonalak, vagyis hát pontosabban a papírra írt *jelek* mellett döntöttek. A jelek és a velük való eljárások rendszerét pedig elnevezték *formális rendszernek*. Egy axiómarendszer lefordítása formális rendszerre az ún. *formalizálás*.

Ez a formalizálás nagy vonásokban így megy: Először is összeállítják a formalizálás szótárát, amelyben rögzítik, hogy az axiómarendszer melyik fogalmát milyen jellel jelölik. (Ennek előfeltétele, hogy a rendszerben csak véges sok alapfogalom szerepeljen.) Azután meg kell adni a logikai fogalmak jeleit is (láttuk, hogy véges sok logikai fogalommal ki lehet jönni). Rögzíteni kell a „nyelvtani szabályokat” is, vagyis azt, hogy hogyan kell a jeleket egymás mellé helyezni, hogy az egymás mellé írt jelek, a véges jelsorozatok egy-egy kijelentés (axióma) kifejezésére szolgáljanak. Azokat a jelsorozatokat, amelyek az axiómarendszerben megfogalmazható igaz vagy hamis állítások, továbbá nyílt mondatok lefordításai, *formuláknak* nevezik. Egy példával illusztrálva: Jelöljük az „ x eleme y -nak” nyílt mondatot így: „ $x \in y$ ”; a „nem igaz, hogy” kifejezést így: „ $\neg$ ”; a „minden x -re: „kifejezést így: „ (x) ”; az üres halmazt pedig a megszokott „ $\emptyset$ ” jellel. Akkor az alábbi jelsorozat:

$$(x) \neg x \in \emptyset$$

ezt jelenti: „Minden x -re: Nem igaz, hogy x eleme az üres halmaznak”, vagyis „Egyetlen x sem eleme az üres halmaznak”, azaz

az üres halmaznak nincs eleme.

Ha a szótár és a nyelvtan készen van, akkor az axiómarendszer fogalmai-val és logikai fogalmakkal megfogalmazható bármely kijelentést már le tudunk fordítani egy formulába. Ha nyelvtanunk elég jó, akkor egy jeleinkkel fölírt jelsorozatról föl is tudjuk ismerni, hogy kifejez-e valamit (értelmes-e), s ha igen, akkor mit.

Meg kell oldanunk a *következtetések* lefordításának problémáját is. A premisszákból is, a konklúzióból is formulák lesznek. Megfigyelve, hogy egy-egy következtetésben bizonyos jelekből álló formulákból, mint premisszákból, milyen jelekkel kifejezett konklúzióra következtetünk, összeállíthatunk olyan gépies, mondjuk a sakkjáték szabályaihoz hasonló szabályokat, amelyek segítségével a formulák körében rekonstruálni lehet a következtetéseket, *anélkül, hogy a jelek jelentésével törődnénk*. Ha ezt megoldottuk, akkor már kezünkben van a bizonyítások lefordításának kulcsa is, hiszen egy bizonyítás nem más, mint egymásba kapcsolódó következtetések láncolata. Egy bizonyítás fordításaként az adódik, hogy az adott kiinduló formulákból (ezek az axiómák fordításai) gépies eljárások sorozatával elő kell állítani egy bizonyos formulát (ez a bizonyítandó tétel fordítása). A bizonyítás fordításának megfelelő gépies eljárást (formális) *levezetésnek* nevezik.

Miután a fordítással elkészültünk, el kell felejtünk, hogy a jelek eredetileg mit jelentettek, és csak a gépies, értelem nélküli játékszabályok szerint szabad játszani: jelsorozatokat képezni, ezeket átalakítani stb. De mit játszunk, és mire való az egész játék?

Először is lássuk meg, hogy a lefordítással, a formalizálással eltűnt az eredeti rendszer a maga transzfinit fogalmaival, és helyette előttünk áll egy fizikai rendszer a maga érzékelhető objektumaival. Ennek elmélete már ugyanolyan tiszta és világos, mint a pozitív egész számokat ábrázoló vonalak elmélete.

Célunk az eredeti rendszer ellentmondástalanságának bizonyítása. Tudjuk, hogy ellentmondásos rendszerben bármi bizonyítható. Rendszerünk biztosan ellentmondástalan, ha meg tudunk benne fogalmazni akár csak egy olyan állítást is, amely nem bizonyítható benne (hiszen ha ellentmondásos lenne, akkor bármi, tehát az is bizonyítható volna benne). Ha ilyen állítás van, akkor ennek lefordítása a formális rendszerben egy formula. Ez, mivel bizonyíthatatlan állítás fordítása, nem lehet egy formális levezetés végformulája.

Így az eredeti rendszer ellentmondástalansága tükröződik a neki megfelelő formális rendszerben: ha az eredeti rendszer ellentmondástalan, akkor formális rendszerében van olyan formula, amely nem lehet egyetlen levezetésnek sem végeredménye. Ha a formális rendszer ilyen tulajdonságú — azaz ha van levezethetetlen formulája —, akkor *konzisztensnek* („összeálló”-nak) mondják. Mivel a formális rendszer fizikai objektumok rendszere, remélhető, hogy könnyebb róla eldönteni: van-e levezethetetlen formulája — azaz konzisztens-e —, mintsem az eredeti rendszer ellentmondástalanságát valami közvetlen módszerrel megvizsgálni.

Persze, ilyen vizsgálatok céljaira megfelelő módszereket kell kidolgozni. Ilyen módszerek kidolgozását Hilbert kezdte meg, munkáját tanítványai folytatták és kiszélesítették. Ezzel a matematikának egy új ága keletkezett: a matematika formalizált rendszereivel foglalkozó tudomány, magára a matematikai elméletekre alkalmazott matematika. A matematikának ezt az új, Hilbert teremtette ágát *metamatematikának*⁴ nevezték el.

A lánc tehát a következő: Először adott valamilyen „*tartalmas*” matematikai *elmélet*, pl. a valós számok elmélete, azután van az elméletnek megfelelő, őt kifejező *formális rendszer*, s végül van a formális rendszerről szóló *metaelmélet*.

A metaelmélet a formális rendszerre vonatkozó összefüggéseket vizsgál, ezekről szóló tételeket bizonyít be. A bizonyításokhoz logikai és matematikai módszereket használ. Itt azonban fölléphet a „hibás kör” veszélye. A formalizálás az ideális elemek kiküszöbölése, a nem eléggé megbízható módszerek elkerülése érdekében történt. Világos, hogy a metaelmélet csak akkor jelent előrehaladást, ha messze elkerüli az ideális fogalmakat és azokat a bizonytalan eszközöket-módszereket, amelyek megbízhatóságát épp ő óhajtja kimutatni — a formális rendszer konzisztenciájának bizonyításával. Ezért Hilbert azt a követelményt állította föl, hogy a metaelméletben csak ún. *finit* (véges) módszereket szabad használni. Hogy mik lennének azok a bizonyos finit módszerek, azt éppúgy nem definiálták egyértelműen, mint az intuicionisták a konstruálhatóság fogalmát. Valójában a finitség követelménye nagyjából azt jelenti, hogy olyan eljárásokra kell szorítkozni, amelyeket az intuicionisták is elfogadhatóaknak tartanak. Szokás úgy is fogalmazni, hogy csak „véges ésszel” felfogható meggondolásokat szabad alkalmazni, csak egyszerű emberi képességekkel elvégezhető konstrukciókra szabad hivatkozni (pl. arra a képességünkre, hogy fel tudjuk ismerni: egy véges jelsorozatban előfordul-e egy bizonyos jel, s ha igen, hányadik helyen.)

Így hát azt lehetne mondani, hogy Hilbert az intuicionizmus eszközeivel kívánta az intuicionizmust leteríteni: intuicionista eszközökkel akarta bizonyítani, hogy az intuicionizmus aggályai fölöslegesek. De Brouwert a hilberti program pillanatra sem ingatta meg. Ő így érvelt: Hiába bizonyítja be Hilbert, hogy pl. a halmazelmélet ellentmondástalan, ez nem változtat azon, hogy *értelmetlen*. Értelmes matematikai elmélet csak *konstruálható* dolgokkal foglalkozhat, márpedig a transzfinit elemek nem konstruálhatók. Azok a matematikusok viszont, akik nem fogadták el a konstruálhatóság intuicionista dogmáját, nagy várakozással tekintettek a hilberti program megvalósulása elé.

Az első eredmények hamarosan jelentkeztek, sikerült egyes töredék-axiómarendszerek ellentmondástalanságát bizonyítani. A soron következő feladat most már egy összefüggő matematikai elmélet ellentmondástalanságának bizonyítása volt. Természetes célkitűzésnek kínálkozott először a természetes számok aritmetikájának egy axiómarendszeréről kimutatni, hogy ellentmondástalan.

„Én nem vagyok levezethető” ...

Ekkor azonban váratlan esemény történt. 1931-ben Gödel olyan bizonyításelméleti eredményeket hozott nyilvánosságra, amelyek majdnem olyan hatásúak voltak, mint a halmazelméleti antinómiák. És köztük szerepelt egy olyan eredmény is, amely az egész hilberti program megvalósíthatóságát kérdésessé tette. Lássuk ezeket az eredményeket.

⁴ Az olvasó bizonyára nem gondolja, hogy a metamatematika valamiféle rokonságban van a metafizikával, mint ahogyan arra sem gondol, hogy a parabola rokon a paranoiával.

Gödel abból az észrevételből indult ki, hogy minden formális rendszer véges sok jelet használ. Ennek megfelelően egy formális rendszer összes lehetséges jelsorozatai megszámlálható halmazt alkotnak. Ez azt jelenti, hogy a rendszer formuláit egy kis ügyeskedéssel meg lehetne *számozni*. Gödel kidolgozott egy olyan eljárást, amellyel egy formális rendszer minden formulájához és minden levezetéséhez egyértelműen lehet rendelni egy természetes számot — ezt a formula, ill. a levezetés *Gödel-számának* nevezték el —, méghozzá úgy, hogy a hozzárendelt számból a formula, ill. a levezetés egyértelműen fölismerhető, rekonstruálható. Ehhez nem is kell minden természetes számot felhasználni. Egyszerű „finit” számtani módszerrel bármely természetes számról eldönthető, hogy Gödel-szám-e, az is, hogy ha igen, akkor formulának vagy levezetésnek Gödel-száma-e. Egy levezetés Gödel-számáról tiszta számtani eszközökkel (tehát anélkül, hogy magát a levezetést leírnánk) még az is eldönthető, hogy a levezetés végformulájának mi a Gödel-száma: a levezetés Gödel-számából a végformula Gödel-száma egyszerűen kiszámítható. A továbbiak megértése kedvéért vezessük be a következő rövidítéseket. Azt, hogy egy *a* természetes szám egy *formula* Gödel-száma, rövidítsük így: „*a* egy *kis* Gödel-szám”, azt pedig, hogy egy *b* természetes szám egy *levezetés* Gödel-száma, így: „*b* egy *nagy* Gödel-szám”. Végül azt, hogy egy *b* Gödel-számú levezetés *végformulájának* Gödel-száma *a*, így rövidítsük: „*b*-nek a vége *a*”. Mivel azt, hogy egy szám Gödel-szám-e, *s* ha igen, akkor formula vagy levezetés Gödel-száma-e, az adott számból *ki lehet számítani*, és mivel egy levezetés Gödel-számából végformulájának Gödel-számát is *ki lehet számítani*, azért — adott *a* és *b* természetes számokra — az alábbi kijelentések tulajdonképpen tiszta számtani, aritmetikai kijelentések:

(1) „*a* egy *kis* Gödel-szám”, „*b* egy *nagy* Gödel-szám”, „*b*-nek a vége *a*”.

Ezzel a kulccsal azonban egy formula *levezethetősége* átfogalmazható aritmetikai kérdéssé. Mert ha a kérdéses formula Gödel-száma *a*, akkor levezethetősége azon múlik, hogy a

(2) „Van olyan *b*, hogy *b* egy *nagy* Gödel-szám, és *b*-nek a vége *a*”

aritmetikai kijelentés igaz-e. Mert ha ez igaz, azaz ha létezik egy olyan *nagy* Gödel-szám, amelynek a vége *a*, akkor ez a szám egy levezetés Gödel-száma, amelynek végformulája a kérdéses (*a* Gödel-számú) formula, és e végformulának ennél fogva van levezetése. Ha viszont ez a kijelentés hamis, akkor ilyen *b* nincs, a formulának nincs levezetése, tehát levezethetetlen. Így a bizonyításelmélet problémáját lefordítottuk természetes számokra vonatkozó problémára — ahogyan mondják: *aritmetizáltuk a metamatematikát*.

Ezzel viszont a következő érdekes helyzet áll elő. Ha olyan elméletet formalizálunk, amelyben szerepelnek vagy legalább modellezhetők a természetes számok és a rájuk vonatkozó műveletek, akkor az (1) és (2) alatti kijelentések — amelyek metamatematikai kijelentések aritmetikai lefordításai — az eredeti elmélet fogalmaival kifejezhetők, és így a vizsgált formális rendszerben formalizálhatók. Az őket kifejező formulák kétértelműek: van egy aritmetikai jelentésük és van egy metamatematikai jelentésük. (Olyanok, mint pl. ez a jelsorozat: „Tor”. Magyarul is van értelme, németül is, de a két értelem különböző; németül „kaput”-t jelent.) Egy „valamirevaló” formális rendszer-

ben, ahol a „valamirevaló” pontos értelmére nem térhetek ki, az (1) és (2) alatti és más hasonló kijelentések formalizálhatók; egy értelmes, valamirevaló matematikai elmélet formális rendszere többnyire ilyen tulajdonságú.

Mármost Gödel kimutatta, hogy minden ilyen „valamirevaló” rendszer kétértelmű formulái között van olyan, amelynek egyik értelme egy ilyesféle jámbor aritmetikai állítás:

(3) „Nincs olyan nagy Gödel-szám, amelyiknek . . . volna a vége” —

és a *kipontozott helyen magának a formulának a Gödel-száma szerepel*. De akkor ez a formula másik értelmével azt mondja, hogy az ő Gödel-számát viselő formula — vagyis ő maga — nem vezethető le, vagyis metamatematikai értelme a következő:

Én nem vagyok levezethető.

Kérdés: levezethető-e ez a formula? Ha igen, akkor hamisat állít, hiszen azt állítja, hogy ő maga nem vezethető le. De nemcsak metamatematikai értelmével állít hamisat, hanem *aritmetikai értelmével is*. Gondoljuk meg jól: ha formulánk levezethető, akkor van (legalább egy) levezetése, egy ilyen levezetésnek van Gödel-száma; ez — mint levezetés Gödel-száma — ún. nagy Gödel-szám, ennek ún. vége pedig nem más, mint formulánk Gödel-száma. Tehát *van* olyan nagy Gödel-szám, amelyiknek vége a mi formulánk Gödel-száma. Pedig formulánk aritmetikai értelme éppen azt állítja, hogy *nincs* ilyen (figyelembe véve, hogy (3)-ban a kipontozott helyen éppen formulánk Gödel-száma szerepel). Valóban, formulánk — ha levezethető — hamis aritmetikai állítást fejez ki. Mit jelent ez? Azt jelenti, hogy axiómarendszerünk *rossz*, hiszen hamis állítást is lehet benne bizonyítani. Következésképp ha axiómarendszerünk nem rossz ilyen értelemben — azaz ha nem lehet benne hamis állítást bizonyítani —, akkor ez a furcsa formula nem lehet levezethető.

De ha formulánk nem vezethető le, akkor — mindkét értelmével — igazat mond. Hiszen metamatematikai értelemben azt mondja, hogy ő maga nem vezethető le. És aritmetikai értelme is igazság, hiszen ha nem vezethető le, akkor nincs is levezetése, ha nincs levezetése, akkor nincs levezetésének Gödel-száma se, tehát tényleg nincs olyan nagy Gödel-szám, amelynek formulánk Gödel-száma volna a vége. Következmény: ha rendszerünkben hamis állítás nem bizonyítható, akkor van olyan (rendszerünkben megfogalmazható) igazság, amely rendszerünkben bizonyíthatatlan.

Összefoglalva így fogalmazhatjuk meg Gödel ezen eredményét: *Minden olyan „valamirevaló” formális rendszerben, amelyben hamis állítást kifejező formulát nem lehet levezetni, létezik olyan formula, amelyet — bár igazságot fejez ki — nem lehet levezetni.*

De ez, más szóval, azt jelenti, hogy axiómarendszerünk, amelyet formalizáltunk, nem írja le kimerítően tárgyát: vannak bizonyíthatatlan igazságai is.

Gödel eredményétől tartalmában nem sokban különbözik az alábbi, *Rossertől* származó tétel (1936):

Konzisztens és „valamirevaló” formális rendszerben mindig van olyan formula, hogy sem ő maga, sem a negációja nem vezethető le a rendszerben.

Visszafordítva ezt az eredményt a formális rendszerről az axiomatizált elméletre, ezt kapjuk: Egy „valamirevaló” axiómarendszerben, ha ellentmon-

dástalan, mindig meg lehet fogalmazni egy eldönthetetlen állítást, vagyis olyan állítást, amelyet az axiómákból sem bizonyítani, sem cáfolni (azaz a tagadását bizonyítani) nem lehet. Másképp: „valamirevaló” és ellentmondástalan axiómarendszerből mindig lehet olyat „kérdezni”, amit a rendszer ugyan „ért”, de nem tud rá „válaszolni”. Tehát lényegében ez az eredmény is azt mondja, amit Gödel tétele: vannak olyan axiómarendszerek, amelyek nem írják le kimerítően tárgyukat; minden „valamirevaló” ellentmondástalan rendszer ilyen.

Egy formális rendszert *komplettnek* mondanak, ha benne bármely formula és negációja közül legalább az egyik levezethető. (Ez a meghatározás persze csak olyan formális rendszerekre értelmes, amelyekben a negációnak megfelelő jel egyáltalán szerepel. Vannak olyan formális rendszerek is, amelyekben logikai jelek egyáltalán nem szerepelnek.) Vannak bizonyítottan komplett és egyben konzisztens formális rendszerek is, persze ezek nem „valamirevalók”, összhangban Gödel eredményével. De ez nem jelenti azt, hogy az ilyen rendszerek „sem mire se valók”, haszontalanok; ezek között is akadnak hasznosak. — Gödel eredményét így is megfogalmazhatjuk: ha egy formális rendszer „valamirevaló” és konzisztens, akkor biztosan inkomplett.

És most lássuk ennek az eredménynek ismeretelméleti jelentőségét. A nyugati filozófiai irodalomban Gödel eredményét rendszerint úgy értékelik, mint az agnoszticizmusnak, a soha-meg-nem-ismerhetőség filozófiájának matematikai igazolását: Gödel bebizonyította — mondják —, hogy a matematikának vannak eldönthetetlen kérdései.

Ez a beállítás bizony *hamisítás*, vagy legalábbis (jóindulatot föltételezve) súlyos félreértés. Gödel nem azt bizonyította be, hogy vannak eldönthetetlen *matematikai* kérdések, hanem azt, hogy bizonyos típusú axiómarendszerekben vannak olyan kérdések, amelyek *azon az axiómarendszeren belül* eldönthetetlenek. Nem az emberi tudás, nem is a matematika korlátairól szól a tétel, hanem az *axiomatikus módszer korlátairól*.

De Gödel eredménye helyes értékelés mellett is óriási jelentőségű. Korábban a matematikusok körében eléggé elterjedt volt az a nézet, hogy egy alkalmasan választott axiómarendszerben nem lehetnek eldönthetetlen problémák. Az igaz, hogy voltak és vannak a matematikának évszázadok óta eldöntetlen kérdései, de úgy remélték, hogy előbb vagy utóbb minden kérdés eldönthető. (Hilbert is ezen az állásponton volt.) Gödel tétele megmutatta, hogy ez a remény — az axiómarendszerek egy széles osztályára vonatkozóan — csalfa. Az is lehet, hogy a nagy eldöntetlen kérdések egyike-másika eldönthetetlen (abban az axiómarendszerben, amelyben eddig vizsgálták). Az axiomatikus módszer e korlátainak fölismerése nagyjelentőségű.

Nem kisebb jelentőségű az sem, hogy a matematika saját erejéből, saját eszközeivel jutott erre az eredményre. Társadalmi tapasztalatainkból tudjuk, milyen ritka dolog az, amikor egy ember saját képességeinek korlátait képes fölismerni, amikor „önkritikája” van. Nos, a matematikának van önkritikája: saját eszközeivel föltárta egyik legfontosabb módszerének korlátait. Ezt kevés tudomány mondhatja el magáról.

Lássuk még világosabban, hogy Gödel tételében szó sincs az agnoszticizmus igazolásáról. A tétel azt bizonyítja, hogy a (3) alatti állítás a formális rendszerben *eldönthetetlen*. És hogyan megy a tétel bizonyítása? Úgy, hogy kiderül: a (3) állítás *igaz*. Egyszerre kapjuk az állítás igazságának és a formális rendszerben való eldönthetetlenségének bizonyítását. És hadd fűzzük hozzá: ez a bizonyítás (amelyet itt nem ismertettünk) annyira szigorú, hogy még intuicionista alapon sem lehet benne kivetni valót találni.

De akkor rögtön lehet alkotni olyan formális rendszert, amelyben már eldönthető a (3)-nak megfelelő formula. Nem kell egyebet tenni, mint ezt a formulát hozzáfűzni a rendszer axiómáihoz. Mivel az axiómák levezethetőknek számítanak, a bővített rendszerben ez a formula levezethető lett. A formula kifejezte aritmetikai állításból axióma lett, ezt azonban most már nem lehet az eredeti formában megfogalmazni, mert a bővített rendszerben a „nagy Gödel-szám” stb. kifejezések — a (1) alatti nyílt mondatok — értelme módosult. De a rendszer *alapfogalmaival* való kifejezésük változatlanul helyes maradt. Módosult az axiómává lett formula metamatematikai értelme is, az eredeti „Én nem vagyok levezethető” helyett most ezt jelenti:

Én nem vagyok levezethető a többi axiómából.

Gödel (és Rosser) tétele tehát úgy mutat példát (az adott axiómarendszerben) megoldhatatlan problémára, hogy mindjárt meg is oldja a problémát, és mindjárt lehetővé teszi olyan axiómarendszer összeállítását is, amelyben már az a probléma is megoldható. De persze az *így keletkezett axiómarendszernek is megvan a maga megoldhatatlan problémája*.

Hogy ezt az észrevételt teljes mélységében kiaknázzuk, vegyük konkrét példának a természetes számok elméletét. Gondoljunk el egy „valamirevaló” és ellentmondástalan *A1.* axiómarendszert, amely leírja ezt az elméletet. Akkor Gödel tétele szerint *A1.*-nek van eldönthetetlen problémája. Fűzzük ezt hozzá az axiómákhoz. Így egy új *A2.* axiómarendszert kapunk. Bizonyítható, hogy ez is ellentmondástalan; „valamirevalósága” a bővítéssel nyilván nem módosul. De akkor *A2.*-nek is van eldönthetetlen problémája; ezért az előbbi eljárást ismét tudjuk alkalmazni, s így eljutunk egy *A3.* axiómarendszerhez. Eljárásunk minden korlátozás nélkül újra meg újra alkalmazható, azaz megalkotható ilyen axiómarendszereknek egy

A1, A2, A3, A4, ...

végtelen sorozata. Ezek a rendszerek egyre többet és többet ragadnak meg a természetes számok elméletéből, bár soha sem merítik ki teljesen. Így tükröződik Gödel tételében — persze csak bizonyos formális korlátozottsággal — a dialektikus materializmusnak a megismerési folyamat végtelenségéről szóló tanítása.

Most ismertetett tételét Gödel eredetileg a *Principia Mathematica* (I. 624. o.) axiómarendszerére alkalmazta. Mivel ez a rendszer a „valamirevaló” rendszerek osztályába tartozik, van eldönthetetlen problémája — hacsak nem ellentmondásos. Ettől eltekintve, Gödel eredménye mutatja az eredeti logicista program megvalósíthatatlanságát is; hiszen eszerint nemhogy az egész matematikát, de még egy „valamirevaló” fejezetét sem lehet mindörökre egyetlen formális rendszer keretei közé bezárni.

Egy pesszimista tétel

Gödel eredménye, bár nagy meglepődést okozott, nem rendített meg semmit, legföljebb egy illúziót. Az axiomatikus módszer a korlátainak fölismerése után sem vált sem haszontalanná, sem nélkülözhetővé.

De van Gödel eredményének egy következménye, amelyről első látásra úgy tűnt, hogy illuzórikussá teszi az egész hilberti programot. Lássuk most ezt a következményt.

Egy „valamirevaló” formális rendszerben mindig lehet formalizálni pl. az „ $1 = 0$ ” hamis állítást. Ki lehet számítani a neki megfelelő Gödel-számot is; álljuk ezt g -vel. Akkor az az aritmetikai állítás, hogy

(4) „Nincs olyan nagy Gödel-szám, amelynek vége g ”,

metamatematikai értelmével azt fejezi ki, hogy az „ $1 = 0$ ” állítást leíró formula nem vezethető le. Ez azonban semmi mást nem jelent, mint azt, hogy a rendszer konzisztens, hiszen van levezethetetlen formulája (l. 635. o.). Tehát (4) metamatematikai értelme ez:

(5) „Az én rendszerem ellentmondástalan.”

A (4) kijelentés „valamirevaló” rendszerben formalizálható, az őt kifejező formula kétértelmű, aritmetikai jelentése mellett metamatematikai jelentése is van, ez az (5) alatti kijelentés.

Látjuk tehát, hogy egy „valamirevaló” formális rendszerben ki lehet fejezni saját ellentmondástalanságát is. A kifejezés ismertetett módja nem az egyetlen lehetséges (nyilván „ $1 = 0$ ” helyett más hamis állításból is kiindulhatunk). A továbbiakban csak az lesz a lényeges, hogy egy „valamirevaló” formális rendszerben mindig van — nem is egy — olyan kétértelmű formula, amelynek metamatematikai értelme az (5) állítás. A kérdés mármost az, hogy levezethető-e a rendszerben egy ilyen formula, azaz hogy *bizonyítható-e egy axiómarendszerben a saját ellentmondástalansága?*

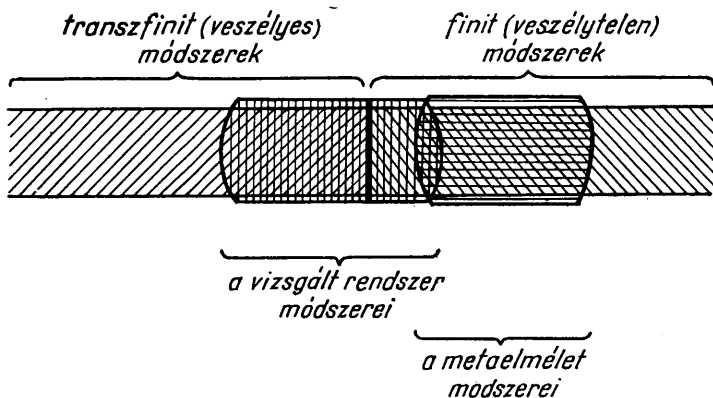
Gödel kimutatta, hogy „valamirevaló” és ellentmondástalan formális rendszerben egy ilyen formula levezethetősége maga után vonná egy levezethetetlen formula (pl. a (3) alatti állítást kifejező formula) levezethetőségét is. Mivel a levezethetetlen formulát nem lehet levezetni, azért az ellentmondástalanságot kifejező formulák egyike sem lehet levezethető. Így nyerjük Gödel híres második tételét:

Ha egy „valamirevaló” formális rendszer konzisztens, akkor benne a konzisztenciáját kifejező formulák egyike sem lehet levezethető.

Ez azt jelenti, hogy egy „valamirevaló” és ellentmondástalan axiómarendszer ellentmondástalanságát nem lehet bizonyítani olyan eszközökkel, amelyekkel magában a rendszerben végezzük a bizonyításokat. Mert ha lehetne, akkor a bizonyítás formalizálása egy olyan levezetés lenne, amelynek végformulája a rendszer konzisztenciáját fejezné ki. De Gödel második tétele szerint ilyen formulát lehetetlen levezetni.

Ez volt az az eredmény, amelyet első hallásra úgy értékelték (illetve egyesek ma is úgy értékelnek), mint amely a hilberti program kudarcát jelenti. Hiszen Hilbert szerint a metamatematika csak *finit* módszerekkel dolgozhat, Gödel eredménye viszont azt mutatja, hogy az ellentmondástalanság bizonyításához még a vizsgált rendszer *transzfinit* eszközei sem elegendőek.

Ám a kudarcot jóslók nem gondoltak arra, hogy a vizsgált rendszer eszközei és az ellentmondástalanság bizonyításához szükséges eszközök között ilyen összefüggés is lehetséges:



1. ábra

— azaz hogy a vizsgált rendszerből kizorult (az ellentmondástalanság bizonyításához szükséges) metaelméleti módszerek még mindig veszélytelen, finit módszerek.

De szerencsére voltak olyan matematikusok is, akiket Gödel tétele sem tett pesszimistává. A kutató munka tovább folyt, és 1936-ban újabb jelentős állomáshoz érkezett: *Gentzen* bebizonyította a természetes számok aritmetikája egy axiómarendszerének ellentmondástalanságát.

Ez a bizonyítás — Gödel második tételének megfelelően — olyan eszközöket is fölhasznál, amelyek nem férnek el a vizsgált axiómarendszer keretében. De ezek az eszközök még mindig finiteknek, veszélyteleneknek tekinthetők: *Gentzen* bizonyítását az intuicionisták is elfogadják (eltekintve egyes ultra-radikálisoktól).

Gentzen bizonyításában a kritikus lépés — amely már nem fér el a természetes számok elméletében — lényegében nem más, mint a *teljes indukció* kiterjesztése bizonyos *transzfinit sorozatokra*. A szóban forgó transzfinit sorozatok tulajdonképpen a természetes számok halmazának átrendezéséből keletkeznek. Amit *Gentzen* fölhasznál, az lényegében nem több, mint hogy képesek vagyunk a természetes számokat pl. ilyen, három egymás mögé fűzött közös sorozatból álló transzfinit sorozatba rendezni:

$$0, 3, 6, 9, 12, \dots \quad 1, 4, 7, 10, 13, \dots \quad 2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

— és még jóval bonyolultabb, de „véges ésszel” megérthető rendezésekre is hivatkozik. Egyébként a bizonyítás lényege egy hibamegtaláló eljárás leírása. Ha valaki bemutat nekünk egy olyan levezetést, amelynek végformulája pl. az, hogy „ $2 \cdot 2 = 5$ ”, akkor a *Gentzen*-féle hibamegtaláló eljárással a végformulából kiindulva addig göngyölíthetjük visszafelé a levezetést, amíg a hibás lépést meg nem találjuk benne. De a további részletekkel már nem foglalkozhatunk.

Gentzen bizonyításából — modell-módszerrel — meg lehetett kapni a racionális számok aritmetikája, valamint az euklideszi geometria egy része ellentmondástalanságának bizonyítását is. Egyéb axiómarendszerek és rendszer-törédek ellentmondástalanságát is sikerült bizonyítani. Viszont mos-

tanáig megoldatlan feladat a matematika „veszélyes” (sok transzfinit elemet fölhasználó) fejezetei ellentmondástalanságának bizonyítása; pl. a valós számok, a teljes euklideszi geometria, a halmazelmélet axiómarendszerei még keményen állják a bizonyításelmélet ostromát, és őszintén be kell vallanunk, hogy ezeknek az erődöknek a meghódítása mai eszközeinkkel meglehetősen reménytelennek látszik.

О ФИЛОСОФИИ МАТЕМАТИКИ

И. Ружа

Статья содержит часть находящейся в печати книги автора «На границе математики и философии». Темы публикуемой части: логицистская философия математики; критика логицистского понимания тавтологии; интуиционистско-конструктивистское понимание математики и его критика; программа Гильберта в теории доказательства; относящиеся к последней результаты Гёделя, их философская интерпретация.

FROM THE PHILOSOPHY OF MATHEMATICS

I. Ruzsa

The present paper is a selection from the author's book *On the boundary of mathematics and philosophy* now be in print (in Hungarian). The topics of the article: The logicism as a philosophy of mathematics; a criticism on the logicist notion of the tautology. The intuitionistic—constructivistic view of mathematics, and its criticism. The metamathematical programme of Hilbert; the connected results of Gödel, and their philosophical interpretations.