Kikrõl van szó és milyen felfedezésükért kaptak Nobel-díjat 1903-ban?

A rejtvényt:
Szõcs Domokos tanár készítette.

VOLTA
AMPÉRE
TOMONAGA
APPLETON
OHM
PIERRE
WATT
THOMSON
COMPTON
NEWTON
NEUMANN
ROHRER
MEER

A	G	A	N	O	M	O	T
T	M	P	C	H	R	C	H
L	N	P	O	U	O	P	O
O	E	L	É	M	H	I	M
V	W	E	P	R	R	E	S
R	T	T	A	W	E	R	O
I	O	O	E	R	R	R	N
N	N	N	A	M	U	E	N

10. Írj dolgozatot „*Az állati elektromosság*“ címmel egy fél ívlapnyi terjedelemben!

A kérdéseket összeállította a verseny szervezõje: **Balogh Deák Anikó** tanárnõ,
Mikes Kelemen Líceum, Sepsiszentgyörgy

feladatmegoldok rovata

Kémia

K. 354. Tekintsük az alumíniumot egyizotópos ($^{27}_{13}Al$) elemnek, a klórnak viszont két izotópja van: 75%-ban $^{35}_{17}Cl$ és 25%-ban $^{37}_{17}Cl$. Hány neutron található 4 mólnyi alumínium–kloridban?

K. 355. Egy tojás héjának 93 tömegszázaléka kalcium-karbonát. Tíz egyforma tömegû tojáshéjat a sztochiometrikus aránynak megfelelõ mennyiségû 36,5%-os sósav oldattal kezelnek, miközben az elegy tömege 44 g-al csökken. Határozzuk meg:

– egy tojashéj tömegét;
– a tojáshéj százalékos kalcium tartalmát
– annak a 0,18 g/ml $CaCl_2$ tartalmú oldatnak a térfogatát, amelyet a fenti reakció során nyertek.

K. 356. Azonos tömegû oldott nátrium–kloridot és kalcium–jodidot tartalmazó oldathoz fölös mennyiségû ezüstnitrát oldatot töltenek. A kiváló csapadékban mekkora a sók mólaránya, hát a tömegaránya?

K. 357. 12 g tömegû, vasat, alumíniumot és ezüstöt tartalmazó ötvözetet 1 M-os NaOH oldattal kezelve 6,72 dm^3 normál állapotú H_2 fejlõdött. Az elõzõvel azonos tömegû ötvözet mintát 2M-os sósavoldattal kezelve a keletkezett H_2 normál térfogata 8,96 dm^3 volt. Határozd meg az ötvözet tömegszázalékos Ag tartalmát és a szükséges 2M-os sósavoldat térfogatát!

K. 358. FeO, MgO és CuO-ból álló oxidkeverékben a vas, magnézium, réz tömegaránya 14 : 9: 8. Mekkora a három oxid mólaránya az oxidkeverékben?

K. 359. 100 g 5%-os réz-szulfát oldathoz mennyi kristályos rézszulfátot ($CuSO_4 \cdot 5 H_2O$) kell adagolni ahhoz, hogy a töménysége megkétszereződjön? A töményebb oldatban mekkora a víz tömege?

K. 360. Egy vasrúd 56 %-ban elrozsdásodik. A rozsdásodás után tömege 266 g. A rozsda összetételét tekintsük FeO(OH) képlettel leírhatónak. Mekkora volt az eredeti vasrúd tömege, s mekkora tömegû rozsda képzõdött?

K. 361. Adottak a következõ kémiai átalakulások termodinamikai reakcióegyenletei:

$C_{(sz)} + O_{2\,(g)} \rightarrow CO_{2\,(g)}$ ΔH = - 94,4 kcal / mol

$H_{2\,(g)} + ½\, O_{2\,(g)} \rightarrow H_2O_{\,(f)}$ ΔH = - 68,3 kcal/mol

$CH_3COCH_{3\,(f)} + 4O_{2\,(g)} \rightarrow 3CO_{2\,(g)} + 3H_2O_{\,(f)}$ ΔH = - 427 kcal / mol

Számítsd ki az aceton ($CH_3COCH_{3\,(f)}$) standard képzõdéshõjét kJ/mol egységben.

K. 362. Benzolt szulfonálnak 196 kg oleummal, amely 20 % szabad SO_3-ot tartalmaz. A szulfonálást addig végzik, míg a kénsav töménysége 90,7 %-ra nem csökken. Mekkora tömegû benzol-szulfonsav keletkezett? Mekkora a szulfonáló elegy víztartalma a reakció leállításakor?

(354–362. feladatok a 2002. Kémiai Olimpia megyei szakaszán adottak alapján)

K. 363. Desztillált vízzel készített 0,1 M-os HF , illetve HCOOH oldatokban a molekulák hány százaléka van nem disszociált állapotban, ha a savállandók értéke: $K_{HF}=7{,}2\cdot10^{-4}$ és $K_{HCOOH} = 1{,}77\cdot10^{-4}$?

Fizika

F. 264. *A Babeº-Bolyai Tudományegyetem Fizika Karán minden év márciusának utolsó szombatján megrendezik az Augustin Maior fizikus nevét viselõ fizikaversenyt. Azok a tanulók, akik a maximális pontszám legalább 70%-át elérik, az érettségi jegyektõl függetlenül 10-es átlaggal jutnak be a kar elsõ évére. Az ilyen módon felvett diákoknak elõnyük van az elsõ félévben az ösztöndíjak és a bentlakási helyek kiosztásánál is. E számban közöljük a 2001. március 31-én megtartott versenyen a XI-es tanulók számára összeállított kérdéseket. A versennyel kapcsolatos információk a* http://phys.ubbcluj.ro/concurs_AM/concurs.htm *oldalon találhatóak.*

XI. osztály

1. Egy m = 100g tömegû testet függõlegesen felfelé hajítunk v_o = 200 m/s kezdõsebességgel. A test pályájának legmagasabb pontjában egy robbanás következik be, melynek következtében két olyan m_1 és m_2 tömegû darab keletkezik, amelyek a függõleges mentén ellentétes irányba fognak mozogni. A két darab tömegaránya $m_1/m_2 = 2/3$, az E = 750 J robbanási energia teljesen átalakul a keletkezett darabok mozgási energiájává.

Számítsuk ki:

a) azt a *t* idõt amely alatt a test pályájának legmagasabb pontjába ér;

b) a darabok v_1 és v_2 sebességét mindjárt a robbanás után;

c) az idõintervallumot, amely a két test Földre érkezésének pillanatait választja el.

2. Egyatomos ideális gáz, melynek tömege m és hõmérséklete T_1 a következõ állapot-változásokon megy át: 1-2 izobár ($V_2=2V_1$), 2-3 $p=aV$ ($V_3=0,25\ V_2$), 3-4 izobár ($V_4=V_1$) és 4-1 izochor.

a) Ábrázoljuk grafikusan (p,V) koordinátákban a fent említett állapotváltozásokat;

b) Számítsuk ki a gáz nyomását a 3 és 4 állapotokban, illetve a T_4 hõmérsékletet;

c) Határozzuk meg a gázmolekulák számat és az egyatomos ideális gáz mólhõjét állandó térfogat mellett;

d) Számítsuk ki a 2-3 változás során végzett munkát és a cserélt hõt.

3. Adott két egyenáramú áramforrás, melyeknek elektromotoros feszültsége egyenként E=10V és belsõ ellenállásuk pedig $r_1=3\ \Omega$, illetve $r_2=2\ \Omega$. A külsõ áramkör ellenállása $R=15\ \Omega$.

Számítsuk ki:

a) az áramerõsséget az áramkörben akkor, amikor a két áramforrást sorosan kapcsoljuk;

b) az áramforrások kapcsai közötti potenciálkülönbséget az a) pont feltételei mellett;

c) az áramerõsségeket az áramkörben akkor, amikor az áramforrásokat párhuzamosan kapcsoljuk;

d) mekkora kellene legyen a külsõ áramkör ellenállása, az áramforrások soros kapcsolása esetén ahhoz, hogy az elsõ áramforrás kapcsain, mért feszültség nulla legyen.

4. m = 100g tömegû testet felfüggesztünk egy rugóra. A rugó a test súlya alatt Δl = 1cm-t nyúlik. Ebbõl a helyzetbõl lehúzzuk a testet A = 14 cm távolságra található pontba, majd szabadon engedjük.

a) adjuk meg a test mozgásegyenletét;

b) a kinetikus és potenciális energiákat az $y_1=7$ cm pontban;

c) azt az idõt amely alatt a test megteszi az $y_1=7$ cm és $y_2=7\sqrt{3}$ cm pontok közötti távolságot;

d) a rugó rugalmassági ereje által végzett mechanikai munkát az $y_1=7$ cm és $y_2=7\sqrt{3}$ cm pontok között.

5. Írjuk fel egy ideális soros LC rezgõkör szabad rezgéseinek kifejezését és a *C* kondenzátor elektromos terében elraktározódott elektromos energia pillanatnyi kifejezését.

Munkaidõ: 3 óra.

Pontozás: 10 pont hivatalból; 1 - 4 feladatok egyenként 20 pont; 5. feladat 10 pont

Informatika

2002. január 19-én zajlott le Kolozsváron a Nemes Tihamér Számítástechnikai Verseny Erdélyi fordulója. Itt közöljük a II. kategória (IX-X. osztály) feladatait:

1. feladat: Tipp

Egy szerencsejátékban a résztvevõk sorban egymás után egy-egy 1 és M közötti számot tippelnek. Az nyer, aki elsõként tippelt arra a számra, amelyre a résztvevõk közül a legtöbben tippeltek. Ha több ilyen szám is van, akkor az összes ilyen szám elsõ tippelõje nyer.

Írj programot (TIPP.PAS, TIPP.C vagy TIPP.CPP néven), amely fogadja és feldolgozza a tippeket, majd megadja a nyertes játékos sorszámát, a nyertes számot, és azt, hogy hányan választották ezt a számot!

A TIPP.BE állomány elsõ sorában a versenyzõk száma (1≤N≤5000) és a tipp maximális értéke (1≤M≤1000000) van, egyetlen szóközzel elválasztva. A következõ N sorban van az egyes versenyzõk tippje.

A TIPP.KI állományba annyi sort kell írni, ahány gyõztes van (tippjük szerint növekvõ sorrendben). Minden sorban három szám legyen egy-egy szóközzel elválasztva: a gyõztes sorszáma, a tippje, valamint az, hogy hányan tippelték ezt a számot!

Példa:

TIPP.BE	TIPP.KI
6 100	3 15 2
25	2 20 2
20	
15	
15	
30	
20	

2. feladat: Ütemezés

Mekk Elek ezermester népszerû vállalkozó, sokan keresik fel megrendelésekkel. Minden munkája pontosan egy napig tart. Minden megrendelés határidõs, és amit elvállal, határidõre el is végzi. A mester a következõ évre beérkezett megrendelések közül a lehetõ legtöbbet akarja elvállalni, de egyszerre csak egy munkán tud dolgozni.

Írj programot (UTEMEZ.PAS, UTEMEZ.C vagy UTEMEZ.CPP néven) a következõ évi megrendelések egy lehetõ legnagyobb elemszámú részhalmazának a kiválasztására és ütemezésére annak érdekében, hogy a mester a lehetõ legtöbb munkát határidõre el tudja végezni. A programnak egy ilyen ütemezést kell eredményül adnia.

Az UTEMEZ.BE állomány elsõ sora a megrendelések N számát (1≤N≤10000) tartalmazza. A következõ N sor mindegyikében egy-egy H pozitív egész szám, az adott megrendelés határideje áll (1≤H≤365), tehát a J-edik munkát az állomány J+1-edik sora írja le.

Az UTEMEZ.KI állomány elsõ sorában a kiválasztott munkák M száma legyen. A következõ M sor mindegyikébe két számot kell írni egy-egy szóközzel elválasztva. Az elsõ szám a kiválasztott munka száma legyen, a második pedig annak a napnak a sorszáma, amelyiken az adott munkát el kell végezni. Ha több megoldás is van, közülük egy tetszõlegeset kell kiírni az állományba!

Példa:	UTEMEZ.BE	UTEMEZ.KI	Megjegyzés:
	6	5	5 1 helyett pl. a 6 1,
	3	5 1	3 7 helyett a 3 5 vagy a
	2	1 3	3 6 válasz is jó.
	7	2 2	
	4	4 4	
	2	3 7	

3. feladat: Üvegválogatás

Egy palackozó üzembe N db ládában érkeznek be az üvegek. Alakjuk szerint K fajta üveget különböztetnek meg. Ismert, hogy az egyes ládákban hány darab üveg van az egyes fajtákból. A palackozáshoz az üvegeket a fajtájuk szerint szét kell válogatni. Minden üvegfajta számára kijelölnek egy ládát (a meglévõ N közül), és a többi ládából az adott fajta üveget ebbe a ládába rakják át. A cél az, hogy a lehetõ legkevesebb üveget kelljen átrakni a válogatás során.

Írj programot (VALOGAT.PAS, VALOGAT.C vagy VALOGAT.CPP néven), amely kiszámítja, hogy legkevesebb hány üveget kell átrakni, és ez mely ládák kijelölésével érhetõ el!

A VALOGAT.BE állomány elsõ sorában a ládák (2≤N≤10) és a fajták (2≤K≤N) száma van. A következõ N sor mindegyike egy-egy láda tartalmát írja le. Minden sor pontosan K db nemnegatív egész számot tartalmaz, ahol a J-edik szám a ládában található J-edik üvegfajta darabszáma (1≤J≤K). (A ládák elég nagyok ahhoz, hogy mindegyikbe tetszõleges számú üveg beleférjen.)

A VALOGAT.KI állományba két sort kell írni. Az elsõ sorban a válogatáshoz minimálisan szükséges átrakások száma legyen. A második sor pontosan K számot tartalmazzon egy-egy szóközzel elválasztva, ahol a J-edik szám annak a ládának a sorszáma legyen, amelyiket a J-edik üvegfajta számára kijelöltünk. Ha több megoldás is van, közülük egy tetszõlegeset kell kiírni.

Példa:	VALOGAT.BE	VALOGAT.KI
	4	58
	7 2 6	5 1 3 4
	1 2 4	
	1 5 6	
	4 7 8	
	7 1 4	

4. feladat: Tükörszó

Egy szót tükörszónak nevezünk, ha balról és jobbról kiolvasva betûrõl betûre megegyezik. (Tehát minden egybetûs szó tükörszó.) Minden szó felbontható részekre úgy, hogy minden rész tükörszó legyen. Minimálisnak nevezzük az olyan felbontást, amely egy szót a lehetõ legkevesebb tükörszóra szed szét.

Írj programot (TUKOR.PAS, TUKOR.C vagy TUKOR.CPP néven), amely kiszámítja, hogy egy adott szó minimális felbontása hány tükörszóból áll!

A TUKOR.BE állomány egyetlen sorában egy legfeljebb 100 karakterbõl álló ***S*** szó van.

A TUKOR.KI állományba egyetlen számot kell írni: az ***S*** szó minimális felbontásához szükséges tükörszavak számát.

Példa:	TUKOR.BE	TUKOR.KI
	bbakabadara	5

Megoldott feladatok

Kémia (Firka 4/2001-2002)

K. 351. Két, sorbakapcsolt elektrolizáló cella egyikében vas(II)-klorid, a másikban vas(III)-klorid oldat található. Az áramkör zárása után elektrolizálnak. Állapítsuk meg, hogy hogyan aránylanak egymáshoz a két cella elektródjain leváló vas, illetve klór mennyiségek!

Megoldás: Soros kapcsolás esetén a cellákon azonos töltésmennyiség (Q) áramlik.
Az elektród folyamatok:
Katód: 1 cella: $Fe^{3+} + 3e^- \rightarrow Fe$ 2 cella: $Fe^{2+} + 2e^- \rightarrow Fe$
Anód 1 $2Cl^- - 2e^- \rightarrow Cl_2$ $2Cl^- - 2e^- \rightarrow Cl_2$
3F............M_{Fe} 2F............M_{Fe}
Q.............$m_1 = Q \cdot M_{Fe} / 3F$ Q.............$m_2 = Q \cdot M_{Fe} / 2F$
2F............M_{Cl2}
m_{Cl2}.........Q $m_1/m_2 = 2/3$
Mind a két cella esetében , az anódon leváló Cl_2 mennyiségek aránya 1.

K. 352. Metán és oxigén tartalmú fûtõgázból standard állapotban mért $1{,}2 m^3$t elégetve 8911,5 kJ hõt nyertek. Határozzuk meg a fûtõgáz térfogat%-os metántartalmát ismerve a CH_4, CO_2, H_2O_l képzõdési hõit :-74,8 ; -393; -286kJ/mol

Megoldás. $CH_4 + 2O_2 = CO_2 + 2H_2O$
ΔH = -393 + 2(-286) -(-74,8) kJ/mol = 890,2 kJ/mol Q=8911,5 kJ
$Q/\Delta H = \nu_{CH4}$ mol = 8911,5/890,2 = 10,01 mol
1000 mol térfogata .... 24,5 m^3
10,01 .... V=0,245m^3
1,2 m^3 gázkev. .... 0,245 m^3 CH_4
100 .... x=20,4 m^3 A fûtõgáz 20,4 tf% CH_4-t tartalmaz.

Fizika (Firka 5/2000-2001)

F. 238. Az ábrán látható ABCD homogén, trapéz alakú lemez esetén határozzuk meg a tömegközéppont $\vec{r}_0$ vektorát az A ponthoz képest; $\vec{a}$, $\vec{b}$ és ë függvényében.

Megoldás Homogén, állandó vastagságú, síklap tömege arányos felületének nagyságával. Közismert, hogy a háromszög alakú síklap tömegközéppontja az oldalfelezõk közös metszéspontjában található és azzal a tulajdonsággal bír, hogy az oldalfelezõket a csúcstól 2/3, a szembenfekvõ oldaltól 1/3 arányban osztja.

Ha egy síklapot képzeletben háromszögekre bontunk, akkor a lap tömegközéppontját meghatározhatjuk a háromszögek tömegközéppontjainak ($\vec{r}_i$) és felületeik (Fi) nagyságának segítségével, a következõképpen:

$$\vec{r}_0 = \frac{F_1 \cdot \vec{r}_1 + F_2 \cdot \vec{r}_2 + ... + F_n \cdot \vec{r}_n}{F_1 + F_2 + ... F_n}$$

Esetünkben a trapézt két háromszögre bonthatjuk (kétféle képpen). Legyen például az ABC és ACD . Ezek felületei F_{ABC} illetve F_{ACD}, és mivel magasságaik megegyeznek, fennáll, hogy $F_{ACD} / F_{ABC} = \lambda$.

Ha a megfelelõ háromszögek tömegközéppontján $\vec{r}_{ABC}$ ill. $\vec{r}_{ACD}$, a trapéz középpontja:

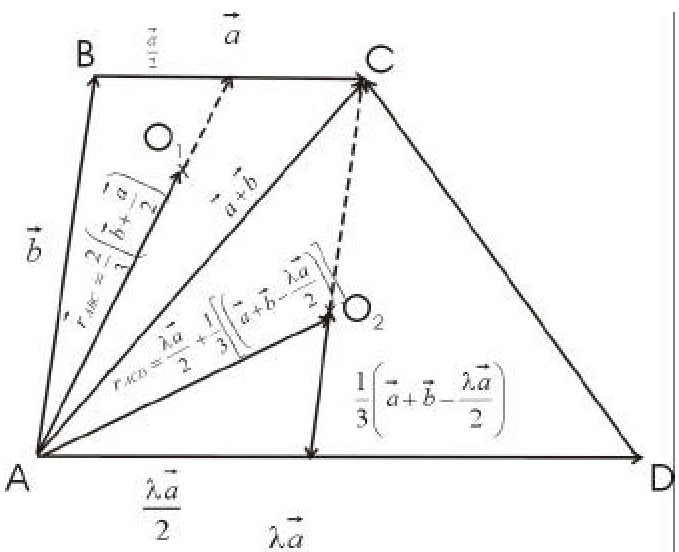
$$\vec{r}_0 = \frac{F_{ABC} \cdot \vec{r}_{ABC} + F_{ACD} \cdot \vec{r}_{ACD}}{F_{ABC} + F_{ACD}} = \frac{\vec{r}_{ABC} + \lambda \vec{r}_{ACD}}{1 + \lambda} \tag{1}$$

ahol az ABC_{Δ} oldalfelezõi metszéspontjának helyzetvektora az A csúcshoz képest:

$$\vec{r}_{ABC} = \frac{2}{3}\left(\vec{b} + \frac{\vec{a}}{2}\right) \tag{2}$$

míg az ACD_{Δ} esetén:

$$\vec{r}_{ACD} = \frac{\lambda \vec{a}}{2} + \frac{1}{3}\left[\left(\vec{a} + \vec{b} - \frac{\lambda \vec{a}}{2}\right)\right] \tag{3}$$



Behelyettesítve a (2) és (3) kifejezéseket az (1) egyenletbe, összevonások és csoportosítások után kapjuk, hogy:

$$\vec{r}_0 = \frac{(\lambda^2 + \lambda + 1)\vec{a} + (2 + \lambda)\vec{b}}{3(1 + \lambda)} \tag{4}$$

Javasoljuk, hogy az olvasó az elõbbi módszert alkalmazza az ABD_{Δ} és BCD_{Δ} háromszögekre való bontás esetén. Ha pontosan dolgozik, akkor ismét az elõbbi (4) eredményt kapja.

F. 239 Becsüljük meg, hogy a h=20m hosszú, homogén, állandó keresztmetszetû, függõleges helyzetû rúd esetén mekkora a tömegközéppont és a súlypont közötti távolság! A Föld sugara R ≈ 6400 km.

Megoldás: Megszoktuk, hogy egy rendszer tömegközéppontját azonosnak tekintjük a rendszer súlypontjával. Ez azonban csak homogén gravitációs erõtér esetén igaz. A Föld felületének közelében, annak R sugarához képest, kisméretû testek, elsõ megközelítésben homogénnek tekinthetõ erõtérben vannak.

Azonban nem nehéz belátni, hogy a Föld felületétõl távolodva a testek „fajlagos súlya" csökken és a súlypont a tömegközéppont alatt helyezkedik el.

Vizsgáljuk meg részletesen ezt a kérdést, egy a Föld R sugarához képest kis h magasságú, homogén, állandó keresztmetszetû, függõleges rúd esetén. A rúd legyen a függõleges O_y tengely mentén, melynek kezdõpontja legyen a Föld felszínén. A rúd tömegközéppontja természetesen annak közepén található.

$$y_M = \frac{h}{2} \qquad (1)$$

Az O_y tengely mentén elhelyezkedõ tömegközéppontok súlypontjának koordinátáját az

$$y_G = \frac{y_1 G_1 + y_2 G_2 + \ldots + y_n G_n}{G_1 + G_2 + \ldots + G_n} \qquad (2)$$

kifejezés adja.

A mi esetünkben a rudat felbontjuk egyenletesen az y tengely mentén n számú azonos tömegpontra, melyek tömege m/n, ha a rúd tömegét m-el jelöltük. A tömegpontok függõleges koordinátája (magassága) $Y_k = \frac{h}{n}k$, $k \in \overline{1,n}$. A k-adik tömegpont súlya:

$$G_k = K\frac{M \cdot m/n}{(R + y_k)^2}$$

és ezért (2) kifejezés alapján

$$y_G = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{KMm}{(R+y_k)^2} y_k}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{KMm}{(R+y_k)^2}} \qquad (3)$$

ahol K az egyetemes gravitációs állandó, M ill. R pedig a Föld tömege, ill. közepes sugara. Elvégezve (3)-ban az egyszerûsítéseket

$$y_G = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{(R+y_k)^2}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(R+y_k)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(R+y_k)}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(R+y_k)^2}} - R \qquad (4)$$

Kiemelve a számlálóban és a nevezõben R-t és behelyettesítve a fennebb megadott y_k kifejezését (4)-bõl következik, hogy:

$$y_G = R\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1+\dfrac{h}{R}\dfrac{k}{n}}}{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{h}{R}\dfrac{k}{n}\right)^2}}-1\right] \tag{5}$$

Esetünkben h/R<<1, tehát $\frac{h}{R}\frac{k}{n} << 1$ és ezért felhasználhatjuk a matematikából ismert alábbi megközelítést:

$$(1+x)^a = 1 + a\,x + \frac{a\,(a-1)}{2}x^2 + 0\,(x^3)\text{, ha } |x| << 1 \tag{6}$$

A fenti (5) képletben $x = \frac{h}{R}\frac{k}{n} << 1$ a számlálóban α=-1, a nevezõben α=-2. Tehát

$$y_G = R\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{h}{R}\dfrac{k}{n}+\left(\dfrac{h}{R}\right)^2\dfrac{k^2}{n^2}\right)}{\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-2\dfrac{h}{R}\dfrac{k}{n}+3\left(\dfrac{h}{R}\right)^2\dfrac{k^2}{n^2}\right)}-1\right] \tag{7}$$

Ugyancsak az elemi matematikából ismert, hogy

$$\sum_{k=1}^{n}1 = n;\ \sum_{k=1}^{n}k = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right);\ \sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{n\,(n+1)2\,(n+1)}{6} = \frac{n^3}{3}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{8}$$

Megjegyezzük, hogy a fenti (8)-as képletek az általános

$$\sum_{k=1}^{n}k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

képletnek sajátos esetei.

Alkalmazva a (8) képleteket a (7) kifejezésekben, a határérték.

$$y_G \approx R\left[\frac{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{h}{R}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h}{R}\right)^2}{1-\dfrac{h}{R}+\left(\dfrac{h}{R}\right)^2}-1\right] \approx R\frac{\dfrac{h}{2R}-2\left(\dfrac{h}{R}\right)^2}{1-\dfrac{h}{R}} \approx$$

$$\approx R\left[\frac{h}{2R}-\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R}\right)^2\right]\cdot\left(1+\frac{h}{R}\right) \approx R\left[\frac{h}{2R}-\frac{1}{6}\left(\frac{h}{R}\right)^2+O\left(\frac{h^3}{R^3}\right)\right]$$

Tehát

$$y_G = \frac{h}{2} - \frac{1}{6}\frac{h^2}{R} \tag{9}$$

és felhasználva (1)-et.

$$y_m - y_G = \frac{1}{6}\frac{h^2}{R} \approx 10^{-5}m = 0{,}01\ mm \tag{10}$$

Ez nagyon kicsi érték. Ezért nem túl nagy testek esetében a két különbözõ középpont gyakorlatilag egybeesik.

A szerzõ megoldásai