A Maple és a határozott integrál alkalmazásai

A *Maple* programcsomag egy nagyon jól kidolgozott algebrai és vizuális megjelenítésre alkalmas rendszer. A gondosan megszerkesztett súgók köszönhetõen könnyen elsajátítható. Tökéletes környezetet biztosít szimbolikus formula manipulációhoz, algebrai kifejezésekkel való operáláshoz, gyakorlatilag tetszõleges pontosságú számoláshoz, két- és háromdimenziós ábrák elkészítéséhez, differenciál- és integrálszámításokhoz. A *Maplelel C* vagy *Fortran* program is generálható, ezenkívül saját programnyelvvel is rendelkezik. Egyik fõ ereje, hogy a rendszer lehetõségeit és „tudását" szinte korlátlanul lehet bõvíteni. Így széles körben alkalmazható a matematika legkülönbözõbb ágaiban, az oktatásban, ezen kívül a statisztikában, a mérnöki, üzleti és gazdasági életben egyaránt.

Lássuk, hogyan alkalmazható a *Maple* az oktatás területén, konkrétan az integrálszámításban. Az alaputasítás integrálok meghatározására az `int` parancs. Ha például ki akarjuk számítani a következõ kifejezés integrálját, akkor gépeljük be az alábbi parancssorokat:

```
> f:=x*exp(5*x^2+1);
```

$$f := xe^{(5x^2+1)}$$

```
> int(f,x);
```

$$\frac{1}{10}\mathbf{e}^{(5x^2+1)}$$

Amint látható, a *Maple* az aktuális parancssor alá írja ki a válaszait (számítási eredményeit, hibaüzeneteit, stb.). Ha a parancssort kettõsponttal zárjuk le, akkor a válasz nem jelenik meg a képernyõn.

Most nézzük, mit kell tennünk határozott integrál esetén:

```
> int(f,x=0..1);
```

$$\frac{1}{10}\mathbf{e}^{6} - \frac{1}{10}\mathbf{e}$$

Meg kellett adnunk a változási intervallumot. Megtörténhet, hogy egy kifejezés integrálját nem találja meg a *Maple*. Nézzük az alábbi esetet:

```
> h:=sin(x^2*sqrt(1+x));
```

$$h := \sin(x^2\sqrt{1+x})$$

$$x^3\left(\sum_{\_k2=0}^{\infty}\frac{(\text{-}1)^{\_k2}\,2^{(-2\,\_k2)}\,x^{(4\,\_k2)}\,\mathrm{hypergeom}\left(\left[-\frac{1}{2}-\_k2,\,3+4\,\_k2\right],[4+4\,\_k2],-x\right)2^{(2\,\_k2)}}{(3+4\,\_k2)\,\Gamma(2+2\,\_k2)}\right)$$

```
> 
int(h,x);
```

Megközelíthetjük ezt az integrált például $x = 0$ és $x = 3$ közötti értékekre a következõképpen:

```
> evalf(int(h,t=0..3));
```

$$3.\,\sin(x^2\sqrt{1.+x})$$

Határozott integrál esetén figyelnünk kell a megadott változási intervallumra, hogy minden pontjában értelmezett legyen a kifejezés, különben a következõ eset fog fennállni:

```
> z:=1/(x^2-1);
```

$$z := \frac{1}{x^2-1}$$

```
>.int(z, x=0..2);
```

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2-1}\,dx$$

A *Maple* praktikus lehetõségeket ad területszámítási problémák tárgyalására, térfogat-, felszín-, és ívhossz számolására, átlagok és súlypontok meghatározására. Egyszerûségének és szemléletességének köszönhetõen azokon a XII-es diákokon is segít, akik nehezebben boldogulnak az ábrázolásokkal, komplexebb függvények integráljainak kiszámításával. Sikerélményt nyújt a diákoknak, segítségével rövid idõ alatt elvégezhetõk a számítások, így a határozott integrál felhasználásának lehetõségei teret nyernek. Éppen ezért ajánlanám a használatát a határozott integrál alkalmazásai tanulásánál. Kiragadnék egy pár paragrafust a XII-es analízis tankönyv ezen fejezetének *Maple*vel való bemutatására (feladatokon keresztül).

1. Pozitív függvények határozott integráljának mértani értelmezése

a) Határozzuk meg az $f(x) = x\sin(x)$ függvény grafikus képe és az $0x$ tengely közötti rész területét a $[0, p]$intervallumon.

```
> f:=x->x*sin(x);
```

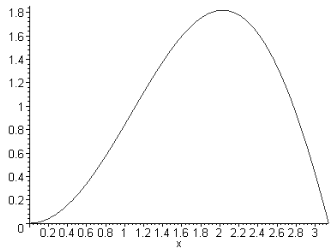
$f := x \to x \sin(x)$

```
> int(f(x),x=0..Pi);
```

π

Ki is lehet rajzoltatni a függvény grafikonját alkalmazva a `plot` parancsot.

```
> plot(f(x),x=0..Pi);
```

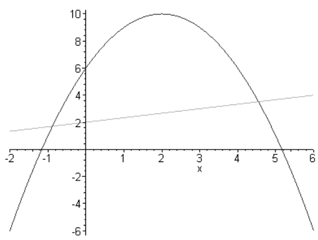


b) Adva van két függvény:

$f(x) = -x^2 + 4x + 6$

$g(x) = \frac{x}{3} + 2$

Számítsuk ki az $f(x)$ és $g(x)$ függvények grafikus képe által közrezárt halmaz területét. A következõképpen járunk el: ábrázoljuk a függvényeket ugyanabban a koordináta rendszerben, meghatározzuk a metszéspontjaikat (az `fsolve` paranccsal), ezután kiszámítjuk a határozott integrált. Ez *Mapleben* a következõképpen mutat:




```
> a:=fsolve(f(x)=g(x),x=-2..0);
```

$a := -.8798034327$

```
> b:=fsolve(f(x)=g(x),x=4..6);
```

$b := 4.546470099$

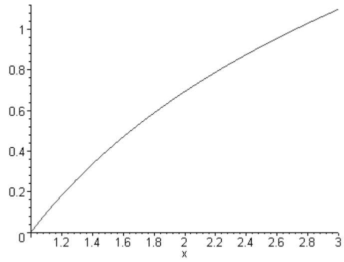
```
> int(f(x)-g(x),x=a..b);
```

26.62893493

2. Forgástestek térfogata

a.) Számítsuk ki az $y = ln(x)$ egyenletû görbe által meghatározott forgástest térfogatát, ha x 0-tól 3-ig változik.

```
> plot(ln(x),x=1..3);
> V:=int(Pi*ln(x)^2,x=1..3);
```



$$V := 3\,\pi\,\ln(3)^2 - 6\,\pi\,\ln(3) + 4\,\pi$$

Megközelítõ értéket is kaphatunk az `evalf` parancs segítségével.

```
> evalf(%);
```

3.23324282

A `rotxplot` és a `rotyplot` eljárások alkalmazásával megrajzolhatóak a forgástestek az $0x$, illetve $0y$ tengelyek körül. Az eljárások beszerezhetõk az Internetrõl, az alábbi címrõl:

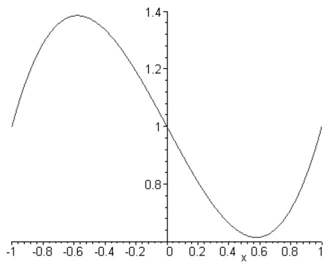
http://www.csc.vill.edu/math/archives/maple/calcplot.txt

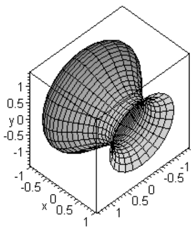
b.) Határozzuk meg az $f(x) = x^3-x+1$ egyenletû parabola $0x$ tengely körüli forgatásából származó test térfogatát, tudva, hogy x -1 és 1 között változik.

```
> f:=x->x^3-x+1;
```

$$f := x \rightarrow x^3 - x + 1$$

```
> plot(f(x),x=-1..1);
> rotxplot(f(x),
              x=-1..1,y=0);
```





```
> Int(Pi*f(x)^2,
x=-1..1)=int(Pi*f(x)^2,
x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1} \pi\,(x^3 - x + 1)^2\,dx = \frac{226}{105}\,\pi$$

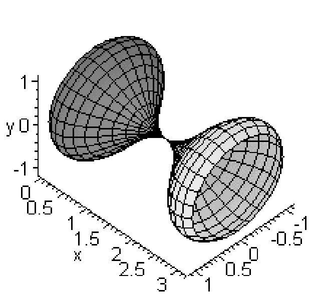
3. Forgásfelületek felszíne

Feladat: Számítsuk ki az $f(x) = sin(x) + cos(2x)$ függvény által meghatározott forgásfelület felszínét a $[0, p]$ intervallumon.

```
> f:=x->sin(x)+cos(2*x);
```

$$f := x \rightarrow \sin(x) + \cos(2\,x)$$

```
> rotxplot(f(x),x=0..Pi,y=0);
```



Szimmetria okokból elég kiszámítanunk a $[0, p/2]$ intervallumon meghatározott felület felszínét, majd az eredményt szorozzuk 2-vel.

```
> felszin:=4*Pi*Int(f(x)*sqrt(1+(D(f)(x))^2),x=0..Pi/2);
```

$$felszin := 4\,\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} (\sin(x)+\cos(2\,x))\sqrt{1+(\cos(x)-2\sin(2\,x))^2}\,dx$$

```
> evalf(felszin);
```

16.39619284

4. Súlypont

Mapleben egyszerû megszerkeszteni a súlypontokat is, ha ismerjük a koordinátákat megadó képleteket. Végül ábrázolni is tudjuk a síklemezt a súlypontjával együtt.

a.) Adva van a *q(x)* függvény.

$$q(x) = -3\,x^2 + 3\,x + 36$$

Határozzuk meg a függvény grafikus képe és az *0x* tengely *-3* és *4* pontja közötti síkidom súlypontjának koordinátáit *(xs, ys)*.

```
> q:=x->-3*x^2+3*x+36;
```

$$q := x \to -3\,x^2 + 3\,x + 36$$

```
> terulet:=int(q(x),x=-3..4);
```

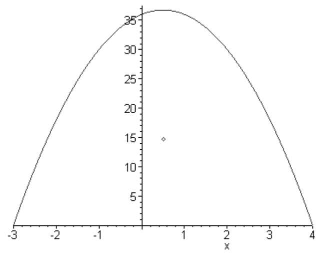
$$terulet := \frac{343}{2}$$

```
> xs:=int(x*q(x),x=-3..4)/terulet;
```

$$xs := \frac{1}{2}$$

```
> ys:=int(q(x)^2,x=-3..4)/(2*terulet);
```

$$ys := \frac{147}{10}$$



Ábrázolni fogjuk, hogy lássuk az eredményt. Hívnunk kell a `plots` csomagot, mivel ugyanabban a koordináta rendszerben szeretnénk kirajzoltatni a függvény grafikus képét és a kiszámított súlypontot.

```
> with(plots):
> display({plot(q,x=-3..4,style=line),
     plot([[xs,ys]],style=point)});
```

b.) Adva van két függvény:

Határozzuk meg az alábbi *f(x)* és *g(x)* egyenletû parabolák által közrezárt síkrész súlypontjának koordinátáit.

```
> f:=x->2*sqrt(1-x^2)+x;
```

$$f := x \to 2\sqrt{1-x^2} + x$$

```
> g:=x->3*x^2;
```

$$g := x \to 3\,x^2$$

```
> a:=fsolve(f(x)=g(x),x=-1..0);
```

$a := -.5867432305$

```
> b:=fsolve(f(x)=g(x),x=0.5..1);
```

$b := .8121927385$

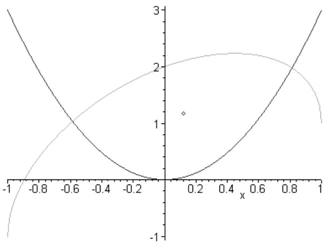
```
> xs:=int(x*(f(x)-g(x)),x=a..b)/int(f(x)-g(x),x=a..b);
```

$xs := .1183648637$

```
> ys:=(1/2)*int(f(x)^2-g(x)^2,x=a..b)/int(f(x)-g(x),x=a..b);
```

$ys := 1.167780625$

```
> display({plot({f(x),g(x)},x = -1..1,style=line),
plot([[xs,ys]], style = point)});
```



5. A határozott integrálok közelítõ kiszámítása

a) Írjunk eljárást a határozott integrál téglalap-módszerrel való megközelítésére. A `sum` paranccsal számítjuk a sor összegét, a `limit` segítségével pedig határértéket határozunk meg.

```
> tegl:=proc(f,a,b)
> deltax:=(b-a)/n;
> s:=sum(subs(x=a+i*deltax,f)*deltax,i=1..n);
> limit(s,n=infinity);
> end;
```

Warning, `deltax` is implicitly declared local
Warning, `s` is implicitly declared local

tegl := **proc**(*f*, *a*, *b*)

local *deltax*, *s*;

$deltax := (b-a)/n;\ s := \mathrm{sum}(\mathrm{subs}(x = a + i*deltax, f)*deltax, i = 1\,..\,n);\ \mathrm{limit}(s, n = \infty)$

end

```
>
   tegl(x^2+3*x,-1,3);
```

$$\frac{64}{3}$$

A *Maple* egyébként a `student` programcsomagban tartalmaz olyan utasításokat, amelyek segítségével határozott integrálokat közelíthetünk meg, sõt szemléltethetünk is.

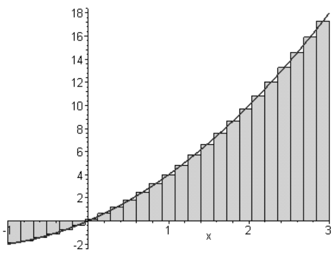
```
> with(student):
> t:=middlesum(x^2+3*x,
       x=-1..3);
```

$$t := \sum_{i=0}^{3} \left(\left(-\frac{1}{2} + i \right)^2 - \frac{3}{2} + 3\,i \right)$$

```
> evalf(t);
```

21.00000000

```
> middlebox(x^2+3*x,
       x=-1..3,25);
```



Egy kis ízelítõt próbáltam adni e pár példán keresztül a *Maple* használatához. Akit érdekel ez a téma, még sok csodálatos dolgot fedezhet fel és próbálhat ki és tapasztalni fogja, hogy megéri idõt szánni rá.

Egri Edit