

sai során felfedezte azok interferenciáját kristályokban. Elméletet állított fel a kristályok növekedésére. 1956-ban halt meg.

1888. január 27-én született Zürichben Victor Moritz GOLDSCHMIDT. Oszlóban és Bécsben tanult, majd az Oszlói Egyetem tanára volt. Geokémiával, ásványtannal foglalkozott. A modern geokémia és kristálykémia megalapítójának tekintik. 1947-ben halt meg.

110 éve, 1893. január 20-án Oroszországban született Ilja-Ilics CSERNYÁJEV. Szentpéterváron tanult, majd ugyanott és Moszkvában egyetemi tanár volt. Komplexvegyületek kutatásával foglalkozott. Vizsgálta a platina-komplexek optikai aktivitását. Kidolgozva a tranzshatás elvét, lehetővé tette számos új komplex vegyület szintézisét. 1966-ban halt meg.

M. E.



Geodetikus vonalak megszerkesztése különböző felületeken a Maple segítségével

Ismeros a kijelentés, miszerint két pont között a legrövidebb út az egyenes. Ez természetesen igaz a síkban, de mit mondhatunk egy tetszőleges felület esetén?

Tételezzük fel, hogy a Föld gömb alakú. Rajta a két város, New York City és Madrid körülbelül a 40. szélességi fokon fekszik. Ahhoz, hogy egy repülőgép a legkisebb távolságot tegye meg e két város között, nem a 40. szélességi körrel párhuzamos útvonalat kell választania. Északnak kell repülnie, követve a fokkört (amelynek középpontja megegyezik a gömb középpontjával) a két város között.

Mit is értünk felület alatt?

A felület a három-dimenziós euklideszi térben olyan pontok halmaza R^3 -ból, amely helyileg olyan mint egy sík, azaz bármely pontja esetén, létezik az illeto pontnak egy kis környezete, amely síknak tunik. Erre ismét jó példa a Föld gömb alakja. Éppen ezért van, hogy felületi görbéi sem látszanak görbéknek, mert az a földfelszín amit a szem átfog, egy elég kis környezetet a Föld egész felületéből, amely síknak tunik. Tehát a gömb egy felület R^3 -ból. A szakkifejezéssel élve, a felületet a következőképpen értelmezhetjük:

Értelmezés:

$M \subset R^3$ felület, ha bármely $x \in M$ esetén létezik egy $U \subset R^3$ nyílt környezete x -nek, egy $W \subset R^2$ nyílt környezet, és egy $x: W \rightarrow U \subset M$ leképezés, amely differenciálható, és az inverze is differenciálható. Ekkor x -et az adott felület *parametizálásának* nevezzük és felírhatjuk: $x(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$.

Például egy r sugarú, origó középpontú gömb parametizálása (parametrikus egyenlete): $x(u, v) = (r \cdot \cos(u) \cdot \cos(v), r \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), r \cdot \sin(v))$.

Továbbá azt mondjuk, hogy x *ortogonális*, ha első rendű deriváltjaira fennáll: $x_u \cdot x_v = 0$.

Egy felülethez szorosan kapcsolódó fogalom egy adott P pontjához tartozó *érintosík* fogalma, amely, mint tudjuk, az illeto ponton átmeno valamennyi felületi görbe P-hez tartozó érintőjét tartalmazza.

Ha adott a felület paraméteres alakja, $x(u, v)$, és feltételezzük, hogy egy tetszoleges P pontban fennáll az $x(u_0, v_0)$ p összefüggés, akkor a P felületi ponthoz tartozó érintosík, melyet $T_p M$ -mel jelölünk, egy két-dimenziós vektortér, amelyet $\{x_u(u_0, v_0), x_v(u_0, v_0)\}$ -val mérünk. Ez a vektortér olyan v vektorokból áll, amelyekre fennáll: $v \cdot \gamma'(t_0) = 0$, ahol γ egy görbe az M felületen és teljesíti: $\gamma(t_0) = p$. Lévén, hogy $T_p M$ vektortér, értelmezhető rajta egy belső szorzat. Ha a skaláris szorzat M minden érintosíkjában értelmezett, akkor azt mondjuk, hogy M *mértani felület*.

A felület jellegzetes görbéi a geodetikus vonalak., amelyek kiterjesztései egy M felületre a síkbeli egyeneseknek. Ezek a görbék egy eljárást adnak a felület két pontja közötti távolság meghatározására, mivel olyan felületi görbékrol van szó, amelyek bármely két pontja közötti darabja a legrövidebb az illeto pontot összekötő összes felületi görbék közül. Tulajdonképpen metrikát származtatnak. A kör geodetikus vonalai például a fokörök ívei (amint már fent is említettük).

Értelmezés:

A három-dimenziós euklideszi térben egy M felület *geodetikus vonala* egy $\gamma: [0,1] \rightarrow M$ görbe, amelyre $\gamma'(t)$ bármely esetben normális M-nek.

Ha egy M mértani felületet parametrikus formában adunk meg, akkor a geodetikus vonalat jellemezhetjük az ún. geodetikus egyenletekkel.

Legyen γ egy M-beli görbe, a következő egyenlettel: $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$.

Ekkor

$$\gamma'(t) = \frac{\partial x}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial x}{\partial v} v'(t) = x_u u' + x_v v', \text{ és}$$

$$\gamma'(t) \cdot \gamma'(t) = x_u x_u u'^2 + 2x_u x_v u'v' + x_v x_v v'^2 = 0.$$

Tekintsük az $E_1 = x_u / \|x_u\|$, $E_2 = x_v / \|x_v\|$ és $E_3 = E_1 \wedge E_2$ ortogonális egy-dimenziós egységvektorból álló rendszert. Nyilvánvalóan E_3 normális M-nek.

Egy γ görbe akkor és csak akkor lesz geodetikus vonal, ha teljesíti az $\gamma'(t) \cdot E_3 = 0$ és $\gamma''(t) \cdot E_3 = 0$ feltételeket. Ezeket felhasználva és figyelembe véve, hogy a rendszer ortogonális $(x_u, x_v = 0)$, a következő differenciál egyenletrendszerrel kapjuk, amelyet teljesítenie kell a görbének, ahhoz, hogy geodetikus vonal legyen:

$$x_u^2 u'' + u^2 x_{uu} x_u + 2u v x_{uv} x_u + v^2 x_{vv} x_u = 0$$

$$x_v^2 v'' + v^2 x_{vv} x_v + 2u v x_{uv} x_v + u^2 x_{uu} x_v = 0$$

Ezen differenciál egyenletrendszer azonnali következménye az alábbi tétel:

Tétel:

Ha adott egy reguláris M felület, egy $p \in M$ pont és egy $v \in T_p M$ vektor, akkor létezik egy és csakis egy γ geodetikus vonal, amelyre $\gamma(0) = p$ és $\gamma'(0) = v$.

Bizonyítás:

Legyen $\gamma(t) = x(u(t), v(t))$. Ekkor a $\gamma(0) = p$ kikötés kezdeti feltételt ad $u(0)$ -ra és $v(0)$ -ra, míg a $\gamma'(0) = v$ kezdeti feltételt ad $u'(0)$ -ra és $v'(0)$ -ra. Felhasználva a közönsé-

ges differenciálegyenletek alapvető tételét, a létezési és egyértelműségi tételt, következik, hogy ? létezik és egyértelmű.

Megjegyzés: Egy parametrikusan megadott felület esetén a geodetikus vonalat tetszőleges ívhossz minimizálásából is megkaphatjuk.

A felületek és geodetikus vonalaik ábrázolására használhatjuk a Maple programcsomagot. Ez azért is ajánlatos, mert a Maple differenciálegyenlet csomagjában megtalálhatjuk a numerikus megoldásmódokat, tehát megközelítéseket kapunk a geodetikus egyenletekre, amelyek néha igen bonyolultak. A három-dimenziós grafika segítségével pillanatok alatt szemléltethetjük a felületeken a geodetikus vonalakat.

Az ábrázoláshoz szükségünk van egy metrikára, amelyet E, F, és G szolgáltató (ezek a geodetikus vonal paraméterei). A továbbiakban a skalar nevű eljárás kiszámítja két három-dimenziós vektor skaláris szorzatát, míg az EFG eljárás megadja E, F, G értékeit, amelyek a geodetikus egyenletrendszerben szerepelni fognak.

```
> with(plots): with(linalg):
> skalar:=proc(X,Y)
> simplify(X[1]*Y[1]+X[2]*Y[2]+X[3]*Y[3]);
> end:
>
> EFG := proc(X)
>   local E,F,G,Xu,Xv;
>   Xu :=[diff(X[1],u),diff(X[2],u),diff(X[3],u)];
>   Xv := [diff(X[1],v),diff(X[2],v),diff(X[3],v)];
>   E := skalar(Xu,Xu);
>   F := skalar(Xu,Xv);
>   G := skalar(Xv,Xv);
>   simplify([E,F,G]);
> end:
```

A geodetikus egyenleteket a következőképpen fogjuk megadni:

$$u''(x_u^2) - \frac{1}{2x_u^2} u'^2 - (x_u^2)_v \frac{1}{x_u^2} u'v' - (x_v^2)_u \frac{1}{2x_u^2} v'^2 = 0$$

$$v''(x_v^2) - \frac{1}{2x_v^2} v'^2 - (x_v^2)_u \frac{1}{x_v^2} u'v' - (x_u^2)_v \frac{1}{2x_v^2} u'^2 = 0.$$

A geodetikus vonal differenciálegyenletei E, F és G segítségével a következőképpen alakulnak:

$$u'' - E_u \frac{1}{2E} u'^2 - E_v \frac{1}{E} u'v' - G_u \frac{1}{2E} v'^2 = 0$$

$$v'' - E_v \frac{1}{2G} u'^2 - G_u \frac{1}{G} u'v' - G_v \frac{1}{2G} v'^2 = 0.$$

Ezt felhasználva az eljárás a következő lesz:

```
> geodiff:=proc(X)
>   local M,de1,de2;
>   M:=EFG(X);
>   de1:=diff(u(t),t$2)+subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[1],u)/(2*M[1]))*diff(u(t),t)^2
>     +subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[1],v)/(M[1]))*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)
>     - subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[3],u)/(2*M[1]))*diff(v(t),t)^2=0;
>
>   de2:=diff(v(t),t$2)-subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[1],v)/(2*M[3]))*diff(u(t),t)^2
>     +subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[3],u)/(M[3]))*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)
```

```

> + subs({u=u(t),v=v(t)},diff(M[3],v)/(2*M[3]))*diff(v(t),t)^2=0;
> de1,de2;
> end:

```

Az alábbi eljárás megrajzolja a felületen a geodetikus vonalat. A paraméterek jelentései a következők: X a felület parametrikus alakja u-ban és v-ben, ukezd, uvég, vkezd, vvég a felületi paraméterek változási intervalluma, u0, v0 a geodetikus vonal kezdőpontja (1. kezdeti feltétel), Du0, Dv0 a kezdeti sebesség (2. kezdeti feltétel), T a t független változó felső határértéke, N arra utal, hogy mennyire egyenletes rajzot szeretnénk, gr = [d,e] megadja a rácsvonalak számát u, illetve v esetén, a két szög (teta és fi) pedig az ábra orientációját állítja be.

A kezdeti feltételekre megoldatjuk a differenciál egyenletrendszer numerikusan, a *spacecurve* parancssal megrajzoltatjuk a térgörbét, a *plot3d* segítségével a felületet, melyeket a *display* utasítás egy közös koordináta rendszerben ábrázol.

```

> plotgeo:=proc(X,ukezd,uvég,vkezd,vvég,u0,v0,Du0,Dv0,T,N,gr,teta,fi)
> local rendsz,megold,u1,v1,geo,plotX;
> rendsz:=geodiff(X);
> megold:=dsolve({rendsz,u(0)=u0,v(0)=v0,D(u)(0)=Du0,D(v)(0)=Dv0},{u(t),v(t)},
> type=numeric, output=listprocedure);
> u1:=subs(megold,u(t)); v1:=subs(megold,v(t));
> geo:=spacecurve(subs(u='u1'(t),v='v1'(t),X),t=0..T,
> color=black,thickness=2,numpoints=N);
> plotX:=plot3d(X,u=ukezd..uvég,v=vkezd..vvég,grid=[gr[1],gr[2]],shading=XY);
> display({geo,plotX},style=wireframe,scaling=constrained,orientation=[teta,fi]);
> end:

```

Lássunk néhány példát a geodetikus vonalak megrajzolására különböző felületeken. Minden esetben parametrikusan kell megadnunk a felületeket.

A gömb esetén leteszteltük az EFG, illetve *geoeq* eljárásokat. A továbbiakban csak megrajzoltattuk a „híres-neves” geodetikusokat.

```

> gomb:=[cos(u)*cos(v),sin(u)*cos(v),sin(v)];
> EFG(gomb);
[cos(v)^2, 0, 1]
> geoeq(gomb); (1. ábra)
diff(u(t),`$(t,2))-2/cos(v(t))*sin(v(t))*diff(u(t),t)*diff(v(t),t)=0
diff(v(t),`$(t,2))+cos(v(t))*sin(v(t))*diff(u(t),t)^2=0
> plotgeo(gomb,0,2*Pi,0,2*Pi,10,10,4,1,2,100,[20,30],100,98);

```

Az ellipszoid parametrikus alakja $x(u, v) = (a \cdot \cos(u) \cdot \cos(v), b \cdot \sin(u) \cdot \cos(v), c \cdot \sin(v))$. $a \neq b \neq c \neq \sqrt{2}$ -re kaptuk a lenti ábrát (2. ábra):

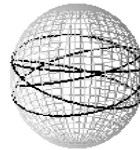
```

> ellipszoid:=[cos(u)*cos(v),sin(u)*cos(v),sqrt(2)*sin(v)];
> plotgeo(ellipszoid,0,2*Pi,0,2*Pi,0,0,4,1,5,100,[20,30],60,68);

```



1. ábra



2. ábra

A kúpon és a hengeren egyszerü „próbára tenni” a geodetikus vonalakat. Ha például tintával rajzolunk rájuk geodetikusokat, és utána meghengergetjük egy síkon, akkor a

tinta nyoma egyenes kell, hogy legyen az illeto síkon. Természetesen fordítva is működik a dolog. (Úgy meg könnyebb is a dolgunk.)

Az alábbi „kúpos” példák három különböző esetet ábrázolnak a geodetikusokra. (3. ábra)

```
> kup1:=[ u*cos(v),u*sin(v),2*u];
> kup2 :=:[ u*cos(v),u*sin(v),u];
> kup3 :=:[ u*cos(v),u*sin(v),10*u];
> plotgeo(kup1,0,3,0,2*Pi,0.1,3,2,0,1.5,50,[8,30],10,250);
> plotgeo(kup2,0,1.3,0,2*Pi,1,0,-1,1,1.2,50,[8,30],100,80);
> plotgeo(kup3,0,15,0,2*Pi,2,-1,0,1,75,50,[8,30],100,260);
```



3. ábra

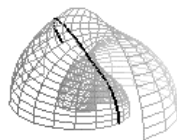
Itt megjegyezhetjük, hogy ha a két pont z koordinátája megegyezik, akkor az oket összekötő geodetikus vonal nem követi azt a körívet, amelyet úgy kapunk meg, hogy a két ponton keresztül fektetünk egy xy -nal párhuzamos síkot. (Lásd: a középső rajz.)

Egy ismeretlen felület esetén a rajzunk így néz ki: (4. ábra)

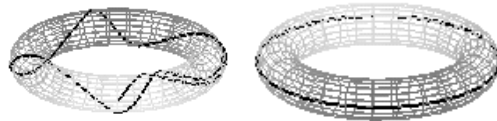
```
> felulet:=[ u*sin(u)*cos(v),u*cos(u)*cos(v),u*sin(v)];
> plotgeo(felulet,0,2*Pi,0,0,0,0,3,1.5,75,[20,30],240,68);
```

Két példa tóruszon fekvő geodetikus vonalra: (5. ábra)

```
> torusz:=[(5+cos(u))*cos(v),(5+cos(u))*sin(v),sin(u)];
> plotgeo(torusz,0,2*Pi,0,2*Pi,0,0,8,1,5,100,[20,30],0,68);
```



4. ábra



5. ábra

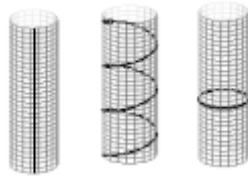
```
> plotgeo(torusz,0,2*Pi,0,2*Pi,0,0,0,1,15,75,[20,30],177,68);
```

A henger geodetikus vonalait csavarvonalaknak nevezzük, amelynek egyenlete egy r sugarú hengeren $(r \cos(t), r \sin(t), mt)$, ahol m az irányítéyezo. A lenti rajzok az elfajult eseteket is ábrázolják. ($m = 0$ esetben a geodetikus vonal egy kör, $m \neq 0$ -re pedig egy egyenes.)

A henger felületén tehát két pont között a távolságot a rajtuk átmenő csavarvonal-rész adja meg. Így például az egységnyi sugarú hengeren az $(1,0,0)$ és $(0,1,1)$ pontok $\sqrt{1 + (1/2)^2}$ távolságra vannak egymástól. (Le lehet ellenőrizni.) (6. ábra)

```
> henger:=[ cos(u),sin(u),v];
> plotgeo(henger,0,2*Pi,0,2*Pi,0,0,1,2*Pi,75,[20,30],177,68);
> plotgeo(henger,0,2*Pi,0,2*Pi,0,0,0,0,1,2*Pi,75,[20,30],177,68);
```

> plotgeo2(henger,0,2*Pi,0,2*Pi,Pi,0.8*Pi,Pi,0,2,75,[20,30],177,68);

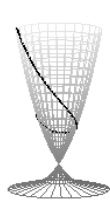


6. ábra

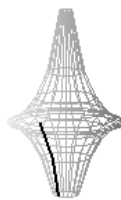
Egy forgásfelület esetén, amelyet az $y = g(x)$ egyenletű görbe Ox tengely körüli forgatásából nyerünk, a felület egyenlete $y^2 + z^2 = g^2(x)$, amely a következőképpen parametrizálható: $x(u, v) = (u, g(u) \cdot \cos(v), g(u) \cdot \sin(v))$.

Érdekes tetszőleges forgásfelületeken is kiszámolni a geodetikusokat. Itt érvényesül Clairaut-tétele, miszerint egy geodetikusra $r \cdot \cos(\varphi) = \text{konstans}$, ahol φ a geodetikus vonal tetszőleges pontjába húzott r érintővektor és az illető pontban az Oz tengellyel párhuzamos vektor által bezárt szöveget jelöli. (7. ábra)

```
> forgastest:=[u,(u^(1/3)-1)*2*cos(v),(u^(1/3)-1)*2*sin(v)];
> plotgeo(forgastest,0,2*Pi,0,2*Pi,3,0.1,-Pi/2,-2*Pi,75,[20,30],180,10);
> pszeudo:=[cos(u)*sin(v),sin(u)*sin(v),cos(v)+ln(tan(v/2))];
> plotgeo(pszeudo,0,2*Pi,0,2*Pi,1,0.2,0.2,5,2,75,[20,30],95,102); (8 ábra)
> plotgeo(pszeudo,0,2*Pi,0,2*Pi,Pi,0.1*Pi,Pi,0,4,75,[20,30],-24,82); (9. ábra)
```



7. ábra



8. ábra



9. ábra

A vonal fogalma nagyon intuitív és elemi fogalom a mindennapi életünkben. Ennek általánosítása egyéb felületekre pedig érdekes matematikai kihívás, bár használva a geodetikus vonal differenciál egyenleteit és a Maple segítségével híva már elérhetőnek bizonyul, hogy megtudjuk hogy is viselkednek a felületek „egyenesei”.

Egri Edit

Görgey Artúr a vegyész és a hadvezér



18. január 30-án született a Szepes megyei Toporcon, nemesi családban. Már középiskolás korában megkedvelte a természettudományokat, és később is ezekkel szeretett foglalkozni. Apja desapja tiszti pályára kényszerítette. Tulajdonképpen vérségi akadémiát, s tiszti szolgálatot teljesített apja mellett. Később kilépett az egyháznak tiszti szolgálatából, és követve Prágába ment, ahol kora egyik híres kémiai tanára, Redtenbacher (Justus von Liebig tanítványa) tanított a német nyelvű egyetemén.