Érdekes informatika feladatok

II. rész

A π kiszámítása

A matematika történetében igen nagy jelentőséggel bír egy szám története. Már az ókori világ tudósai is ismerték azt a tényt, hogy *ha egy tetszőleges kör kerületét elosztjuk a kör átmérőjével, akkor mindig ugyanazt a számot kapjuk.* Az időszámításunk előtt 2000 körül keletkezett legrégebbi egyiptomi írásos matematikai emlék, a *Rhind-papirusz*, is tartalmaz erre a számra vonatkozó utalásokat.

Vajon melyik lehet ez a szám? Természetesen a π-ről van szó.

A Rhind-papirusz a kör területének kiszámítását is képlettel rögzíti. A papirusz szerint egy kör területét a $T = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2$ képlettel lehet kiszámítani, ahol d a kör átmérője. Egységnyi sugarú kört véve, ebből a képletből vissza is fejthetjük a π értékét: $\pi = \frac{256}{81} \approx 3{,}1605$. Ezzel az értékkel dolgoztak tehát az ókori egyiptomiak. Mezopotámiában kezdetben egyszerűen 3-nak vették a π-t, de később a 3,125 közelítő értéket használták. Indiában, a fennmaradt Szulvaszutra szerint (i.e. 500), a π értékére a 3,09 közelítést használták, később pedig egyszerűen $\sqrt{10}$ -nek, azaz 3,1622, vették.

A matematika történetében egyedülálló eset, hogy Kínában, a Han-dinasztia uralkodása alatt (i.e. 206-i.sz. 25) egységesítették a mértékegységeket, és ekkor a π értékét állami törvény szabta meg. Ez az érték a 3,1547 volt. A Perzsák 16 tizedes jegyig számították ki a π értékét.

A π egy közelítő értékének kiszámítására szolgál a következő fejtörő is. *Egyetlen gyufaszál elmozdításával tedd igazzá az egyenlőséget:*

$\frac{XXIII}{VII} = II$. A megoldáshoz azt kell tudni, hogy $\frac{22}{7} \approx 3{,}1429 \approx \pi$, vagyis: $\frac{XXII}{VII} = \pi$.

Arkhimédész (i.e. 287-212) volt az első, aki rekurzív algoritmust konstruált meg a π értékének kiszámítására, amelyet egészen az újkor kezdetéig alkalmaztak (mint ahogy a brit Admiralitás is Arkhimédész módszereivel vizsgálta a vitorlások stabilitását még a XVIII. században is). Arkhimédész felismerte, hogy a kör kerülete közelíthető a bele és köré írt szabályos sokszögek kerületével. Kiindulásnak a hatszöget tekintette: az egységsugarú körbe írt hatszög kerülete 3, a körülírt hatszögé pedig $2\sqrt{3}$. Ezek szerint a π értéke 3 és 3,4641 között mozog, de Arkhimédész nem állt meg itt, hanem megduplázta a két sokszög oldalszámát, a tizenkétszögek kerületét vette, majd így tovább rekurzíven eljutott a 96 oldalú szabályos sokszögekig. A módszer tehát meghatározott egy olyan sorozatot, amelynek tagjai fokozatosan, tetszőleges pontossággal megközelítik a π értékét, azonban ezt soha el nem érik. 96 oldalú sokszögre már $3{,}1408 < \pi < 3{,}1428$-at kapunk, Arkhimédész pedig e két szám számtani középarányosát, 3,1418-at vette a π értékének.

Kétségkívül a π a leghíresebb irracionális szám, és Arkhimédész módszerének jelentősége azért óriási, mert rámutatott arra, hogy az irracionális számok csak végtelen információ segítségével, végtelen idő alatt azonosíthatóak pontosan.

A π egyre nagyobb pontossággal történő kiszámítása Arkhimédész után is sokat izgatta a nagy elméket. Viète (1540-1603) francia matematikus a $\frac{2}{\pi} = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{16}\ldots$ végtelen szorzat segítségével kiszámította a π értékét 10 tizedesig. Ludolph van Ceulen (1540-1610) holland matematikus először húsz majd harmincöt tizedesig számította ki a π értékét.

Azóta a számot Ludolph-féle számnak is nevezik. Newton (1643-1727) csak 15 tizedesig haladt, és erre nem is volt büszke. Leibniz (1646-1716) a $\pi = 4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \frac{4}{9} - \ldots$ sorban látta a π egyre több tizedesjeggyel történő meghatározását. Machin 1706-ban már 100 tizedesig ismerte a π-t.

A tulajdonképpeni π (pi) görög betűt 1739-ben javasolta Euler svájci matematikus a szám jelölésére, ez a periféria (kerület) görög szó kezdőbetője.

A π irracionalitását először Lambert (1728-1777) német és Legendre (1752-1833) francia matematikusok bizonyították be.

Rendkívül érdekes Buffon gróf története is. A legenda szerint felesége rendszeresen kötögetett, és gyakran kiesett a kezéből a kötőtű. Padlójukat párhuzamosan lefektetett deszkalapok borították, ezért a leeső tű néha metszette, néha pedig nem metszette, a padlólapok illesztéseinél látható vonalakat. Állítólag ez késztette Buffon grófot arra, hogy 1777-ben, elsőként bevezesse a geometriai valószínűség fogalmát. Mi a valószínűsége annak, hogy a leeső tű metszi a padló vonalát? Rudolf Wolf svájci matematikus 1850-ben ezt a képletet felhasználta a π valószínűségi alapon történő kiszámítására. A vonalak távolsága 45 mm volt, 35 mm-es tűt használt, amit 5000-szer dobott fel, és számolta, hogy hányszor metszi a vonalak egyikét. A kapott értéket behelyettesítette a képletbe és 3,1596 jött ki neki. Közel a π értéke. Természetesen végtelen számú feldobás hozna pontos közelítést.

1784-ben Shancks angol matematikus 707 tizedesjegyig számította ki a π értékét.

1882-ben Lindemann (1852-1939) német matematikus bebizonyította, hogy a π transzcendens szám, azaz nem lehet racionális együtthatójú algebrai egyenlet gyöke, nem szerkeszthető meg euklideszi módon.

Az elektronikus számítógépek megjelenésével az emberi kíváncsiság tovább és tovább fokozódott, egyre több tizedesnyi pontossággal számították ki a π értékét.

A 100 éve született Neumann János, a XX. század egyik legnagyobb elméje, az ENIAC elkészülése után, annak egyik első feladatául a π első 2037 jegyének meghatározását tűzte ki. Az ENIAC 70 óra alatt végzett a munkával, ez tizedesjegyenként mintegy 2 percnek felel meg.

1987-ben a japán Tomojori Hideaki 17 óra 21 perc alatt a π első negyvenezer tizedesjegyét számította ki. 1995-ben a 21 éves japán Goto Hirojuki kevesebb mint 8 óra alatt számította ki a π első 42 194 tizedesét. A tokiói egyetemen azóta már 113 óra alatt kiszámították a π első 6,4 milliárd tizedesét. Az 1999-ben Y. Kanada által felállított világcsúcs pedig 206 158 430 000 tizedesjegy.

Joggal vetődhet fel az a kérdés, hogy az emberi kíváncsiságon túl mi motiválhatja a π egyre több tizedessel történő kiszámítását, hisz már 59 tizedesjegy ismeretében a világegyetem átmérőjét egy hidrogénatom méretének megfelelő hibával tudjuk meghatározni?

A válasz talán az irracionális, transzcendens számok tulajdonságainak felfedezése, kiismerése lenne. Matematikai szempontból a π-ről ma is vajmi keveset tudunk. Nem ismert például a tizedesjegyek eloszlása sem, bár azt sejtik, hogy minden jegy azonos gyakorisággal fordul elő.

A másik válasz tulajdonképpen az lenne, hogy matematikailag az irracionális szám fogalma elég problémás. Mint neve is jelzi, bizonyos tulajdonságai ellentmondanak a józan észnek, és ezért igyekszünk száműzni a természeti folyamatok leírásából, ahol csak lehet, racionális számokkal dolgozunk. Ez a gondolkodásmód már a pitagoreusoktól kezdve ráütötte bélyegét a matematikára. Az általuk meghatározott világképben a világmindenség tökéletesen leírható a természetes számok (vagy ezek hányadosaiból képzett racionális számok) segítségével, az irracionális számoktól pedig iszonyodtak, az *alogon* (kimondhatatlan) jelzővel illették őket. Irracionális, sőt transzcendens számok márpedig vannak, s mint láthattuk π nélkül még egy egyszerű kör kerületét vagy területét sem tudjuk meghatározni...

Informatikai szempontból a π kiszámítási algoritmusát gyakran alkalmazzák új számítógépek tesztelésére, mert az eljárás rendkívül érzékeny. Ilyen módszerrel sikerült a Cray szuperszámítógépek egyik első változatában hardverhibát találni.

Példa. Egy egyszerű meghatározása a π-nek a UNIX alatti **bc** program segítségével történik. A **bc** program egy olyan nyelvet kínál, amelyen könnyen megfogalmazhatjuk a kívánt pontosságú számábrázolás mellett végezett matematikai műveleteket. A standard matematikai könyvtárat a **-l** parancssori opció megadásával tölthetjük be. A **scale** nevű változó értéke szabja meg, hogy hány tizedes pontossággal történjen a műveletek végzése.

A π értékére pl. a $\pi = 4arctg(1)$ összefüggést használhatjuk fel. A program a következő:

- elindítjuk a **bc** programot: **bc -l**
- beállítjuk a pontosságot: **scale=1000**
- kiadjuk a számítási utasítást: **4*a(1)**
- 5-6 másodperc után 1000 tizedesnyi pontossággal megkapjuk a π értékét:

3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944592307
81640628620899862803482534211706798214808651328230664709384460955058
22317253594081284811174502841027019385211055596446229489549303819644
28810975665933446128475648233786783165271201909145648566923460348610
45432664821339360726024914127372458700660631558817488152092096282925
40917153643678925903600113305305488204665213841469519415116094330572
70365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885
75272489122793818301194912983367336244065664308602139494639522473719
07021798609437027705392171762931767523846748184676694051320005681271
45263560827785771342757789609173637178721468440901224953430146549585
37105079227968925892354201995611212902196086403441815981362977477130
99605187072113499999983729780499510597317328160963185950244594553469
08302642522308253344685035261931188171010003137838752886587533208381
42061717766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778
18577805321712268066130019278766111959092164201988

Kovács Lehel István

feladatmegoldók rovata

Kémia

A 2003. évi érettségi vizsga számítási feladatai

K. 411.

1. Mekkora a tömegszázalékos koncentrációja annak az elegynek, amelyet két tömegrész oldandó anyag és nyolc tömegrész oldószer keverésével nyertek ?

2. Mekkora tömegű vízmennyiséget kell elpárologtatni 200g 20 tömegszázalékos só oldatból, ha 40 tömegszázalékos oldatot akarunk nyerni?

3. Határozd meg a 62,973 tömegszázalék vizet tartalmazó kristályszóda (hidratált nátrium-karbonát) vegyi képletét!