

3. A  $N$ ,  $Ne$ ,  $Na$ ,  $Al$  atomok közül legkisebb az atomsugara:  
 a) Na                      b) Ne                      c) N                      d) Al
4. A közönséges körülmények között gázállapotú elemi anyagok közül legkisebb sűrűsége van:  
 a) hélium                      b) hidrogén                      c) oxigén                      d) nitrogén
5. Ki fedezte fel a hafniumot?  
 a) Hevessy György    b) Irinyi János    c) Müller Ferenc    d) Szent-Györgyi Albert
6. A tellur felfedezője:  
 a) Kitaibel Pál                      b) Müller Ferenc                      c) Hevessy György    d) M.Klaproth
7. Melyik elem atomjaiból épül fel a legkeményebb természetes anyag?  
 a) króm                      b) volfram                      c) szén                      d) szilícium
8. Milyen kémiai kötések kapcsolják össze a vízmolekulát alkotó atomokat?  
 a) elektrovalens    b) nempoláros kovalens    c) koordinatív    d) poláros kovalens
9. A hétköznapi gyakorlatban vitriol a neve:  
 a) salétromsav                      b) kénsav                      c) sósav                      d) kálium-hidroxid
10. Milyen kémiai kötés nem található a szalmiáksóként ismert ammónium-kloridban?  
 a) apoláros kovalens    b) poláros kovalens    c) elektrovalens    d) koordinatív

**Barabás Attila** tanár

## Érdekes informatika feladatok

### III. rész

#### Az $e$ kiszámítása

A másik érdekes, a matematika történetében nagy jelentőséggel bíró szám az  $e$  szám.

A matematika történetét is befolyásolja a világ alakulása, így amikor a XV. század Európájában egyre fontosabb lett a hajózás, a csillagászat, az ipar, a kereskedelem, matematikai modelleket kellett keresni a felmerülő új problémák megoldására. Ilyen volt például a kamatos kamat kiszámítása, vagy a különféle mozgásokat leíró egyenletek.

A matematikusok ezeket a problémákat az *exponenciális* és a *logaritmus* függvények segítségével írták le és oldották meg.

Az  $f(x) = a^x$  előírással értelmezett  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$  függvényt exponenciális függvénynek nevezzük, ahol  $a \neq 1$  és  $a > 0$ .

Ha  $a \neq 1$  és  $a > 0$  egy pozitív szám, és  $x$  egy tetszőleges valós szám, akkor létezik egyetlen  $y$  valós szám, amelyre  $a^x = y$ . Az  $y$  számot az  $x$  szám  $a$  alapú logaritmusának nevezzük és  $\log_a x$ -szel jelöljük. A logaritmus függvény tehát az exponenciális függvény inverz függvénye.

A logaritmus elnevezést John Napier (1550-1617) skót tudós, matematikus vezette be a görög *logosz* (arány) és *arithmosz* (szám) szavak összevágásából, és ő készítette el az első logaritmus táblákat is.

#### Példa

A következő táblázat a 0-10 számok tízes alapú logaritmusának *mantisszáját* tartalmazza öttizedesnyi pontossággal:

$n$	0	1	2	3	4	5
$\log_{10}n$	$-\infty$	00000	30103	47712	60206	69897
$n$		6	7	8	9	10
$\log_{10}n$		77815	84510	90309	95424	00000

Általában elegendő csak a törtrészeket (*mantisszákat*) beírni a táblázatba, hisz az egész részek (*karakterisztikák*) könnyen kiszámíthatók. A karakterisztika tíznek az a maximális hatványa, amelynél nagyobb vagy egyenlő a szám. Például, ha kíváncsiak vagyunk a  $\log_{10}1$ -re, akkor a karakterisztika:  $10^0 \leq 1$ , tehát 0, a táblázatból kikeressük a mantisszát: 00000, tehát a logaritmus 0,00000. Ha  $\log_{10}6$ -ot szeretnénk kiszámítani, akkor a karakterisztika:  $10^0 \leq 6$ , tehát 0, a táblázatból kikeressük a mantisszát: 77815, tehát a logaritmus 0,77815.

Napier táblázatai 1614-ben látta meg a napvilágot, így 6 évvel megelőzték a svájci Joost Bürgi (1552-1632) táblázatait, amelyek a pénzügyi szakemberek számára tároltak fontos információkat a kamatos kamat kiszámítására és egyéb banki műveletek elvégzésére.

### Példák

- 1.) Egy  $A$  összeg  $p$  kamatláb mellett  $n$  hónap múlva  $B = A \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$  összeg lesz.
- 2.) Ha  $n$  hónap múlva  $B$  összeget szeretnénk elérni  $p$  kamatláb mellett, akkor most az  $A = \frac{B}{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n}$  összeget kell betegyünk a bankba.
- 3.) Ha minden hónap elején  $a$  fix összeggel növeljük a betétet, akkor  $p$  kamatláb mellett,  $n$  hónap múlva  $B = a \frac{\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n \left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right]}{1 + \frac{p}{100}}$  összegünk lesz.

Ezekhez és hasonló képletekhez szerkesztett táblázatokat Bürgi, így megkönnyítette az exponenciális függvények kiszámítását.

Napier munkáját Henry Briggs (1561-1630), az Oxfordi Egyetem mértantanára fejlesztette tovább. Ő vezette be a  $\log_{10}1 = 0$ , és a  $\log_{10}10=1$  jelöléseket. Így megszületett a tízes alapú logaritmus. Most már meg lehetett fogalmazni a logaritmus alapjának értelmezését is: ha egy szám  $a$ -nak az  $l$ -edik hatványa, akkor a szám  $a$  alapú logaritmus  $l$ . Ha  $a^l = s$ , akkor  $l = \log_a s$ .

Az  $e$  szám, mint 2,71828 először Napier *Descriptio* című műve angol fordításának függelékében fordul elő (1618), amelyet valószínűleg William Oughtred (1574-1660) írt:  $\log_a 10 = 2,302585$ , ahol  $a = 2,71828$ .

Gregory of Saint-Vincent (1584-1667) 1647-ben kiszámította a derékszögű hiperbola alatti területet. Megállapítása szerint az  $[1, e]$  intervallumban az  $x$  tengely és az  $xy = 1$  egyenletű hiperbola egységnyi területet zár be.

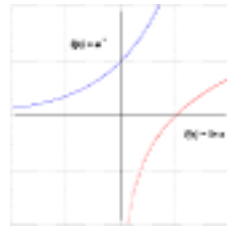
1661-ben Christiaan Hygens (1629-1695) már a logaritmus segítségével jellemezte a derékszögű hiperbolát. Ugyancsak ő szerkesztette meg először azt a görbét, amelyet ma exponenciális görbének hívunk:  $y = ka^x$ . Hygens az  $e$  számot 17 tizedesnyi pontossággal számította ki.

1668-ban jelent meg Nicolaus Mercator (1620-1687) híres műve, a *Logarithmotechnia*, ebben a könyvben jelent meg először a *természetes logaritmus* kifejezés az  $e$  alapú logaritmusra.

Az  $e$  alapú logaritmust *természetes logaritmusnak* szoktuk mondani, az  $e$  azért természetes, mert olyan különleges tulajdonságai vannak, amelyek matematikai vizsgálatokban sokkal fontosabbak, mint a kiszámíthatóság, és azért is természetes, mert sok természeti törvény megfogalmazásában is fontos szerepet játszik.

Például az egyik ilyen tulajdonság az, hogy  $e^{x'} = e^x$ , vagyis az  $e^x$  függvény akárhányszor deriválható, nem változik meg.

A tízes alapú logaritmust  $\lg$ -vel szokás jelölni, az  $e$  alapút pedig  $\ln$ -nel.



A természetes alapú exponenciális és logaritmus függvények

1683-ban Jacob Bernoulli (1654-1705) az  $e$  számot az  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  sorozat határértéké-

ként, tehát egy  $1^\infty$  alakú határértékként definiálta. Bernoulli fedezte fel először, hogy az exponenciális függvény a logaritmus függvény inverze. Ezt azonban James Gregory (1683-1675) publikálta 1684-ben.

1690-ben Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) a  $b$  jelölést javasolta az addig el nem nevezett  $e$  számra.

1697-ben jelent meg Johann Bernoulli (1667-1748) könyve, a *Principia calculi exponentialium seu percurrentium*, amelyben számos exponenciális és logaritmus függvényre szerkeszt meg számítási vagy közelítő képletet. Az  $e$  szám kiszámításával is foglalkozik.

Az  $e$  elnevezés először Leonhard Euler (1707-1783) Christian Goldbachhoz (1690-1764) írt 1731-beli levelében jelenik meg. Euler ezt az elnevezést úgy magyarázta, hogy az  $e$  az *exponential* elnevezés első betűje, de a „rossz-szajak” szerint Euler a saját nevének kezdőbetűjéről nevezte el a számot.

Euler közelítő képletet konstruált az  $e$  kiszámítására:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \dots$$

Euler megmutatta, hogy az  $e$  szám irracionális és 18 tizedesnyi pontossággal számította ki.

Még két lánc törtet is megszerkesztett az  $e$  kiszámítására:

$$\frac{e-1}{2} = \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \frac{1}{10 + \frac{1}{14 + \frac{1}{18 + \dots}}}}}$$

illetve:

$$e-1 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4 + \frac{1}{1 + \frac{1}{6 + \dots}}}}}}}$$

1844-ben Joseph Liouville (1809-1882) bebizonyította, hogy egyetlen egész együtt-hatós másodfokú polinomnak sem gyöke.

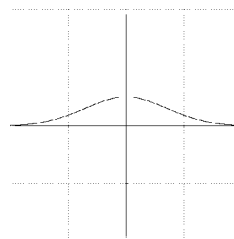
1854-ben William Shanks (1812-1882) először 137 majd 205 tizedesnyi pontossággal számította ki az  $e$ -t.

Charles Hermite (1822-1901) francia matematikus, a párizsi tudományos akadémiának tagja, a magyar tudományos akadémiának külső tagja, 1873-ban bebizonyította, hogy az  $e$  szám transzcendens, azaz nem tehet oly algebrai egyenletnek eleget, melyben az együtthatók egész számok.

Hermite neve azért is híres, mert neki sikerült először az ötödfokú egyenletet az elliptikus függvények elméletének segítségével megoldani.

Ma is nyitott kérdés viszont az  $e$  milyensége!

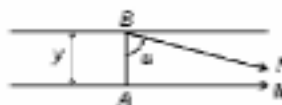
A híres Gauss-görbe is használja az  $e$  számot:  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .



A Gauss-görbe

A Bolyai-féle geometria alapképlete is tartalmazza az  $e$ -t. Bolyai János (1802-1860) híres levele, melyet édesapjának, Bolyai Farkasnak írt Temesvárról 1823. november 3-án, és amely végén olvasható az oly sokat idézett „*semmből egy új, más világot teremtettem*” sor, tartalmazza azt a képletet, amely alapköve a tér abszolút igaz tudományának, vagyis azt az összefüggést, amely a párhuzamosok távolsága ( $y$ ) és a nekik megfelelő párhuzamossági szög ( $u$ ) között fennáll a nevezetes Bolyai-féle paraméter ( $k$ ) függvényében:

$$\operatorname{ctg} \frac{1}{2} u = e^{\frac{y}{k}}$$



Bolyai egyenlete

Az  $u$  természetesen  $\pi$  függvénye, így a Bolyai-féle képletet átrendezhetjük:

$$\operatorname{ctg} \frac{\pi(x)}{2} = e^{\frac{x}{k}}$$

A *pseudoszféra*, amely állandó negatív görbületű és egy véges darabján érvényes a Bolyai-féle geometria, a *traktrix görbének* aszimptotája körüli forgatáskor keletkező forgásfelület. A traktrix görbe egyenletében is szerepel az  $e$  szám, mint a természetes logaritmus alapja:

$$x = a \ln \left| \frac{a \pm \sqrt{a^2 + y^2}}{y} \right| \mp \sqrt{a^2 + y^2}$$

ahol  $a$  egy tetszőleges pozitív szám.



A pseudoszféra

A komplex számok és a komplex függvénytan területén is jelentős szerep jut az  $e$  számnak.

A  $z = a + ib$  komplex számot az Euler-féle összefüggés alapján (a  $z$  exponenciális alakja) a  $z = r e^{i\alpha}$  alakban is fel lehet írni, ahol  $r$  a  $z$  modulusa, az  $\alpha$  pedig a  $z$  argumentuma.

A komplex függvénytan mutatott rá arra, hogy az  $e^z$  függvény nagyon szoros kapcsolatban áll a trigonometrikus függvényekkel, vagyis rokona a  $\pi$ -nek:

$$i^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \text{ vagy } i^{-i} = \sqrt{e^\pi}.$$

A számítástechnika fejlődésével az  $e$ -nek egyre több számjegyét sikerült kiszámolni. Versenyt is hirdettek ezzel a témával. 1999-ig az  $e$   $10^9$  nagyságrendű tizedes jegyet sikerült megállapítani.

**Példa.** Egy egyszerű meghatározása az  $e$ -nek a UNIX alatti **bc** program segítségével történik. A **bc** program egy olyan nyelvet kínál, amelyen könnyen megfogalmazhatjuk a kívánt pontosságú számbázis mellett végzett matematikai műveleteket. A standard matematikai könyvtárat a **-l** parancssori opció megadásával tölthetjük be. A **scale** nevű változó értéke szabja meg, hogy hány tizedes pontossággal történjen a műveletek végzése.

Az  $e$  értékére az  $e = \exp(1)$  összefüggést használhatjuk fel. A program a következő:

- elindítjuk a **bc** programot: **bc -l**
- beállítjuk a pontosságot: **scale=1000**
- kiadjuk a számítási utasítást: **e(1)**
- 5-6 másodperc után 1000 tizedesnyi pontossággal megkapjuk az  $e$  értékét:

2.718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967627724  
 07663035354759457138217852516642742746639193200305992181741359662904  
 35729003342952605956307381323286279434907632338298807531952510190115  
 73834187930702154089149934884167509244761460668082264800168477411853  
 74234544243710753907774499206955170276183860626133138458300075204493  
 38265602976067371132007093287091274437470472306969772093101416928368  
 19025515108657463772111252389784425056953696770785449969967946864454  
 90598793163688923009879312773617821542499922957635148220826989519366  
 80331825288693984964651058209392398294887933203625094431173012381970  
 68416140397019837679320683282376464804295311802328782509819455815301  
 75671736133206981125099618188159304169035159888851934580727386673858  
 94228792284998920868058257492796104841984443634632449684875602336248  
 27041978623209002160990235304369941849146314093431738143640546253152  
 09618369088870701676839642437814059271456354906130310720851038375051  
 01157477041718986106873969655212671546889570350354

Kovács Lehel István



## Kémia

**K. 413.** Hányszor nehezebb egy jód molekula, mint egy fluor molekula?

**K. 414.** Mekkora mólarányban tartalmaz etánt és butánt az a gázminta, amelyben mennyiségi elemzéskor 81,36 tömeg % szenet találtak?

**K. 415.** Milyen tömegarányban keverték össze konyhasót mosósózával, ha a kapott elegy 22,64 tömeg % oxigént tartalmazott, s az összekevert anyagokat vegytisztának tekinthetjük ?