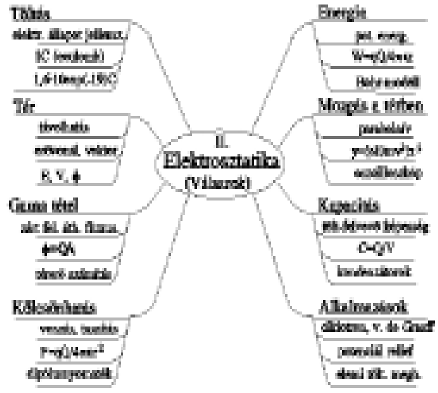
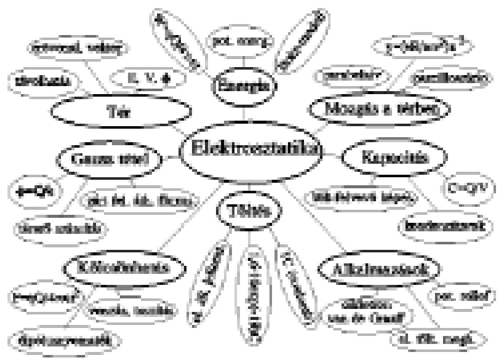



**3. Fürt-ábra (Ötletháló)**

A tanulók az ötletbörze módszerével gyűjtik össze ismereteiket egy megadott témával kapcsolatban. A bemutatott példa az előbbi fogalomtérkép ismereteit foglalja össze.

**Könyvészet**

1] Leisen, J. (Szerk. 1999): *Methoden-Handbuch DFU*. Varus Verlag, Bonn
2] Kovács Zoltán (2002/2003) *Aktív és csoportos oktatási eljárások*. Firka (1, 2, 3, 4, 5, 6)
3] Peterßen, W.H. (2001.): Kleines Methoden-Lexikon. Oldenbourg, Schulverlag. München
4] Kovács Zoltán, Rend Erzsébet (2002, kézirat) *Aktív oktatási módszerek példatára*

**Kovács Zoltán**

# A fényvisszaverődés és a fénytörés törvénye vektorosan

II. rész

**2. A fényvisszaverődés és fénytörés törvényének vektoros alakjai**

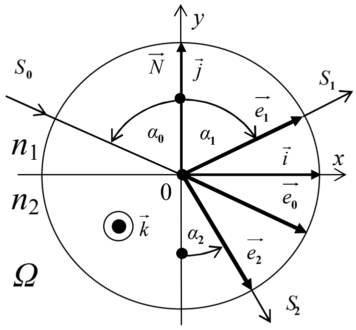
A beeső, a visszavert, és a megtört sugarakra, a sugarak irányítottságának megfelelően, helyezzünk egységvektorokat! Ezek sorra $\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2$. Továbbá jelölje $\vec{N}$, a beesési merőlegesen, a második közegtől az első felé mutató egységvektort (lásd a 2. ábrán).

$$|\vec{e}_0| = |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{N}| = 1$$

Feltételezzük, hogy a két közeg törésmutatója, valamint az elválasztófelület normálisvektora ismertek, és célul tűzzük ki a fénysugarakhoz rendelt egységvektorok közötti összefüggések – a törvények – felírását!

*a) A törvények explicit-vektoros alakja*

Fejezzük ki az $\vec{N}, \vec{e_0}, \vec{e_1}, \vec{e_2}$ egységvektorokat a fénysugár beesési pontjába helyezett derékszögű koordináta-rendszer $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ egységvektoraival! Ezután számítsuk ki a felírt egységvektorok skalárösszetevőit, igazodva a 2. ábra elrendezéséhez, alkalmazva a fényvisszaverődés és a fénytörés (1) valamint (2) törvényét.




2. ábra

$$\vec{N} = \mathbf{0}\vec{i} + \mathbf{1}\vec{j} + \mathbf{0}\vec{k} = \vec{j}$$

$$\vec{e_0} = e_{0x}\vec{i} + e_{0y}\vec{j} + e_{0z}\vec{k} = (\sin\alpha_0)\vec{i} - (\cos\alpha_0)\vec{j} + \mathbf{0}\vec{k}$$

$$\vec{e_1} = e_{1x}\vec{i} + e_{1y}\vec{j} + e_{1z}\vec{k} = [\sin(-\alpha_1)]\vec{i} + [\cos(-\alpha_1)]\vec{j} + \mathbf{0}\vec{k} = (\sin\alpha_0)\vec{i} + (\cos\alpha_0)\vec{j}$$

$$\vec{e_2} = e_{2x}\vec{i} + e_{2y}\vec{j} + e_{2z}\vec{k} = (\sin\alpha_2)\vec{i} - (\cos\alpha_2)\vec{j} + \mathbf{0}\vec{k} =$$

$$= (n_1/n_2)(\sin\alpha_0)\vec{i} - \left[\sqrt{\mathbf{1} - (n_1/n_2)^2(\sin\alpha_0)^2}\right]\vec{j}$$

Mivel $\vec{j} = \vec{N}$, és a beeső sugár – normálishoz viszonyított – irányát meghatározó $\cos\alpha_0$ kifejezhető a nekik megfelelő egységvekorok skaláris szorzatával,

$$\cos\alpha_0 = -\left(\vec{e_0} \cdot \vec{N}\right),$$

írhatjuk, hogy:

$$\vec{e_0} = \left[\sqrt{\mathbf{1} - \left(\vec{e_0} \cdot \vec{N}\right)^2}\right]\vec{i} + \left(\vec{e_0} \cdot \vec{N}\right)\vec{N} \tag{3}$$

$$\vec{e_1} = \left[\sqrt{\mathbf{1} - \left(\vec{e_0} \cdot \vec{N}\right)^2}\right]\vec{i} - \left(\vec{e_0} \cdot \vec{N}\right)\vec{N} \tag{4}$$

$$\vec{e_2} = \left[(n_1/n_2)\sqrt{\mathbf{1} - \left(\vec{e_0} \cdot \vec{N}\right)^2}\right]\vec{i} - \left\{\sqrt{\mathbf{1} - (n_1/n_2)^2\left[\mathbf{1} - \left(\vec{e_0} \cdot \vec{N}\right)^2\right]}\right\}\vec{N} \tag{5}$$

Azonnal látható, hogy a beeső, a normális, valamint a továbbhaladó fénysugarak egységvektorai közötti összefüggéseket az $\vec{i}$ kiejtésével kapjuk meg.

► *A fényvisszaverődés törvénye:*

Az $\vec{i}$ kiejthető ha a (4) egyenletből kivonjuk a (3) egyenletet:

$$\vec{e_1} - \vec{e_0} = -\mathbf{2}\left(\vec{e_0} \cdot \vec{N}\right)\vec{N}$$

$$\boxed{\vec{e_1} = \vec{e_0} - \mathbf{2}\left(\vec{e_0} \cdot \vec{N}\right)\vec{N}} \tag{6}$$

► *A fénytörés törvénye:*

Az $\vec{i}$ kiküszöbölhető még, ha a (5) egyenletből a (3) egyenlet $n_1/n_2$ -szeresét kivonjuk:

$$\overrightarrow{e_2} - (n_1/n_2)\overrightarrow{e_0} = -\left\{\sqrt{1-(n_1/n_2)^2\left[1-\left(\overrightarrow{e_0}\cdot\vec{N}\right)^2\right]}\right\}\vec{N} - (n_1/n_2)\left(\overrightarrow{e_0}\cdot\vec{N}\right)\vec{N}$$

$$\boxed{\overrightarrow{e_2} = (n_1/n_2)\overrightarrow{e_0} - (n_1/n_2)\left[\sqrt{(n_2/n_1)^2 - 1 + \left(\overrightarrow{e_0}\cdot\vec{N}\right)^2} + \left(\overrightarrow{e_0}\cdot\vec{N}\right)\right]\vec{N}} \qquad (7)$$

**Megjegyzés:**

- Mind a két vektoregyenlet, a keresett egységvektorokat, *explicit* alakban adja meg.
- Mindkettőjükben csak a *skaláris szorzat* vektorművelet használatos.

*b) A törvények implicit-vektoros alakja*

Mi sem természetesebb annál, hogy egy vektoregyenlet felírásánál használjuk a *vektori szorzás* műveletét is! Ezért keressünk ilyen összefüggéseket az $\overrightarrow{e_0}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \vec{N}$ egységvektorok között!

► *A fényvisszaverődés törvénye:*

Azonnal látható, hogy az $\overrightarrow{e_1}$ kielégíti az

$$\left(\overrightarrow{e_1}\times\vec{N}\right) = \left(\overrightarrow{e_0}\times\vec{N}\right)$$

vektoregyenletet. Mind a két oldal szorzatvektora $\vec{k}$ irányú, és nagyságuk egyenlő (2. ábra):

$$\left|\overrightarrow{e_1}\times\vec{N}\right| = 1\cdot1\cdot\sin(-\alpha_1) = \sin\alpha_0 \quad , \text{ és}$$

$$\left|\overrightarrow{e_0}\times\vec{N}\right| = 1\cdot1\cdot\sin\left(180^0-\alpha_0\right) = \sin\alpha_0 \ .$$

Vektoregyenletünknek, az $\overrightarrow{e_1}$ vektoron kívül, nyilvánvalóan megoldása még az $\overrightarrow{e_0}$ is! Továbbá még észrevesszük azt is, hogy az

$$\left(\overrightarrow{e_1}\cdot\vec{N}\right) = -\left(\overrightarrow{e_0}\cdot\vec{N}\right)$$

egyenletet az $\overrightarrow{e_1}$ kielégíti, viszont az $\overrightarrow{e_0}$ nem! Tényleg:

$$\left(\overrightarrow{e_1}\cdot\vec{N}\right) = \mathbf{1}\cdot\mathbf{1}\cdot\cos(-\alpha_1) = \cos\alpha_0 \quad \text{és}$$

$$\left(\overrightarrow{e_0}\cdot\vec{N}\right) = \mathbf{1}\cdot\mathbf{1}\cdot\cos\left(\mathbf{180^0}-\alpha_0\right) = -\cos\alpha_0$$

Mivel mindkét egyenletnek az $\overrightarrow{e_1}$ megoldása a fényvisszaverődés törvénye vektorosan egy egyenletrendszerrel is megadható:

$$\boxed{\begin{aligned}\left(\overrightarrow{e_1}\times\vec{N}\right) &= \left(\overrightarrow{e_0}\times\vec{N}\right) \quad (8a)\\ \left(\overrightarrow{e_1}\cdot\vec{N}\right) &= -\left(\overrightarrow{e_0}\cdot\vec{N}\right) \quad (8b)\end{aligned}}$$

► *A fénytörés törvénye:*

Járjunk el az előző esethez hasonlóan, és vizsgáljuk meg az $\left(\overrightarrow{e_2}\times\vec{N}\right)$, valamint az $\left(\overrightarrow{e_0}\times\vec{N}\right)$ szorzatvektorokat! Mindkettő iránya a $\vec{k}$ irányával azonos, moduluszuk:

$$\left|\overrightarrow{e_2}\times\vec{N}\right| = \mathbf{1}\cdot\mathbf{1}\cdot\sin\left(\mathbf{180^0}-\alpha_2\right) = \sin\alpha_2$$

$$\left|\overrightarrow{e_0}\times\vec{N}\right| = \mathbf{1}\cdot\mathbf{1}\cdot\sin\left(\mathbf{180^0}-\alpha_0\right) = \sin\alpha_0$$

A fénytörés törvénye a (2) szerint pedig:

$$n_2\sin\alpha_2 = n_1\sin\alpha_0 \ ,$$

amely alapján rögtön felírhatjuk, hogy:

$$n_2\left(\vec{e_2}\times\vec{N}\right)=n_1\left(\vec{e_0}\times\vec{N}\right).$$

Tehát a megtört fénysugár egységvektora kielégíti ezt a vektoregyenletet. Azonban ezt az egyenletet még az $\vec{e_2}$ -nek az Ox tengelyre vonatkoztatott szimmetrikus vektora is kielégíti! Ezt a megoldást kizárhatjuk, ha megadjuk az $\left(\vec{e_2}\cdot\vec{N}\right)$ kifejezését $\left(\vec{e_0}\cdot\vec{N}\right)$ segítségével:

$$\left(\vec{e_2}\cdot\vec{N}\right)=\mathbf{1}\cdot\mathbf{1}\cdot\cos\left(\mathbf{180^0}-\alpha_2\right)=-\cos\alpha_2=-\sqrt{\mathbf{1}-\left(\sin\alpha_2\right)^2}=-\sqrt{\mathbf{1}-\left(n_1/n_2\right)^2\left(\sin\alpha_0\right)^2}=$$

$$=-\sqrt{\mathbf{1}-\left(n_1/n_2\right)^2\left[\mathbf{1}-\left(\cos\alpha_0\right)^2\right]}=-\sqrt{\mathbf{1}-\left(n_1/n_2\right)^2\left[\mathbf{1}-\left(\vec{e_0}\cdot\vec{N}\right)^2\right]}$$

amely még az $n_2\left(\vec{e_2}\cdot N\right)=-n_1\sqrt{\left(n_2/n_1\right)^2-\mathbf{1}+\left(\vec{e_0}\cdot N\right)^2}$ alakra hozható.

Tehát a fénytörés törvényét vektorosan, szintén egy egyenletrendszer adja meg:

$$n_2\left(\vec{e_2}\times\vec{N}\right)=n_1\left(\vec{e_0}\times\vec{N}\right) \tag{9a}$$

$$\boxed{n_2\left(\vec{e_2}\cdot\vec{N}\right)=-n_1\sqrt{\left(n_2/n_1\right)^2-\mathbf{1}+\left(\vec{e_0}\cdot\vec{N}\right)^2}} \tag{9b}$$

**Megjegyzés:**

Mind a két törvény vektoregyenlet-rendszere a keresett $\vec{e_1}$ és $\vec{e_2}$ egységvektorokat *implicit* alakban tartalmazza!

**Bíró Tibor**

firkácska

## Alfa-fizikusok versenye

2001-2002

**VII. osztály** – III. forduló

**1.** Gondolkozz és válaszolj! *(8 pont)*

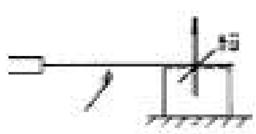
a). Miért nem találja el a fegyvergolyó azt az embert, aki hallja a repülő lövedék hangját?

b). Miért úgy vágunk kenyeret vagy húst, hogy a kést előre-hátra mozgatjuk? Miért úgy vágunk sajtot, hogy a kést egyszerűen rányomjuk, s nem mozgatjuk előre-hátra?

c). Miért káros a természetben a vizek olajszennyezése?

d). Miért kötelezik a bukósisak viselésére a motorkerékpáron utazókat?

**2.** Kísérlet: *(3 pont)*



*Eszközök:* 2 különböző anyagú merev fémhuzal, üveglap, 2 varrótű, 2 szívószál, 2 állvány, gyufa, borszeszégő.