

# FIJKA

2003

5

2004



Fizika  
Informatika  
Kémia

ΕΛΙΝΤ

# FIJKA

**Fizika  
InfoRmatika  
Kémia  
Alapok**

Az Erdélyi Magyar  
Műszaki Tudományos  
Társaság kiadványa

Megjelenik kéthavonta  
(tanévenként  
6 szám)

**13. évfolyam  
5. szám**

**Főszerkesztő  
DR. PUSKÁS FERENC**

**Felelős szerkesztő  
TIBÁD ZOLTÁN**

**Felelős kiadó  
ÉGLY JÁNOS**

**Számítógépes tördelés  
PROKOP ZOLTÁN**

**EMT**

Erdélyi Magyar Műszaki Tudományos Társaság  
Kolozsvár, 1989. december 21. sugárút (Magyar u.) 116. sz.  
Levélcím: RO-400750 Cluj, C.P 1-140  
Telefon: 40-264-590825, Tel./fax: 40-264-594042  
E-mail: [emt@emt.ro](mailto:emt@emt.ro); Web-oldal: <http://www.emt.ro>  
Bankszámlaszám: Societatea Maghiară Tehnico-  
Științifică din Transilvania  
2511.1-815.1/ROL  
SV 7971871300/ROL

## Szerkesztőbizottság

Bíró Tibor, Farkas Anna, dr. Gábos Zoltán,  
dr. Karácsony János, dr. Kaucsár Márton,  
dr. Kása Zoltán, Kovács Lehel, dr. Kovács  
Zoltán, dr. Máthé Enikő, dr. Neda Árpád,  
dr. Szenkovits Ferenc, dr. Vargha Jenő

## Levélcím

400750 Cluj, C. P. 1/140

• • •

Megjelenik a

Nemzeti  
Kulturális  
Örökség  
Minisztériuma;



Nemzeti  
Kulturális  
Alapprogram;



Communitas  
Alapítvány;



Illyés  
Közalapítvány;



Ministerul Educației și Cercetării

támogatásával.

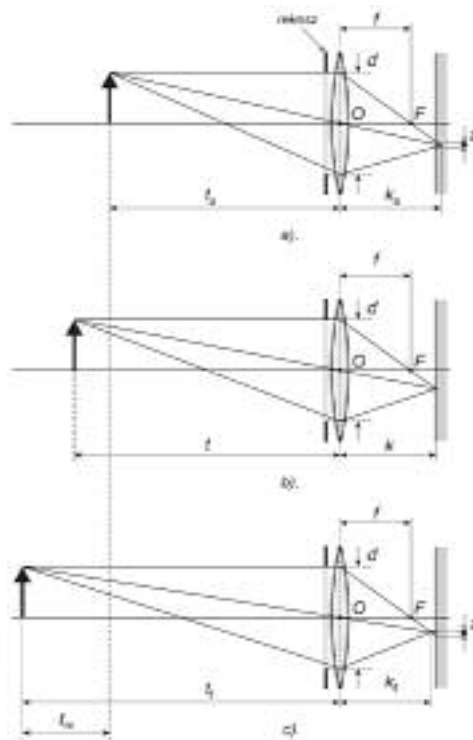
## A digitális fényképezőgép

VII. rész

### 3.5.3. Mélységélesség

A képérzékelő síkjában keletkező kép szigorúan véve csakis a beállított távolságra fekvő tárgynál éles. Az ennél közelebb és távolabb levő tárgyak képe az eltéréstől függően egyre életlenebb, mivel a szigorúan éles kép a sík háta mögött illetve előtte keletkezik. Ezért annak a pontnak a képe, amely nem a beállított távolságra van, elhomályosodik, ún. szóródási körként jelentkezik (4. ábra). A képet felfogó film vagy képérzékelő, valamint a szemünk is véges felbontóképességű, így a kellően kis  $\xi$  átmérőjű szóródási kör tulajdonképpen pontnak látszik. Gyakorlati szempontból még élesnek tekinthető az a kép, amelynél a szóródási kör mérete  $\xi = 1/20 \dots 1/80$  mm-nél nem nagyobb. Abban az esetben, ha a képről kismértékű nagyítást készítünk, akkor a nagyobb átmérőjű szóródási kör nem hat zavarólag. Ebben az esetben  $\xi$  megközelítheti az 1/20 mm-es felső határt. A nagyítás méretével a szóródási kör átmérőjét csökkenteni kell, 1/80 mm-es érték felé. Azt a távolságtartományt, amelynek határain belül lévő pontokról a fenti meghatározások szerint az objektív a képfelvévőre még éles képet rajzol, az *élességi határ*nak nevezzük.

Az *élességi határ*okat a 4. ábrán látható szerkesztés alapján könnyen meghatározhatjuk. Jelölje  $t$  a beállított tárgytávolságot,  $f$  az objektív gyújtótávolságát,  $R = f/d$  a



4. ábra

*A pont képének éleetlenedése a mélységélesség meghatározása*

- szóródási kör az alsó mélységélességi határnál –  $t_a$
- éles kép
- szóródási kör a felső mélységélességi határnál –  $t_f$

rekeszszámot és  $\xi$  a szóródási kör átmérőjét, ekkor az alsó és a felső mélységelességi határ:

$$t_a = \frac{t}{1 + \frac{(t-f)R\xi}{f^2}} \quad (10)$$

illetve:

$$t_f = \frac{t}{1 - \frac{(t-f)R\xi}{f^2}} \quad (11)$$

A teljes mélységelesség:

$$t_m = t_f - t_a \quad (12)$$

A mélységelesség felénk eső  $t - t_a$  szakasza mindig kisebb, mint a tárgy távolság mögötti  $t - t_f$  szakasz. A két szakasz aránya a beállított jellemzők függvényében változik, de néhány méteres tárgy távolság esetében ez 1/3 - 2/3 aránnyal közelíthető meg.

A  $d$  rekesznyílás csökkentésével az objektíven áthaladó fénynyaláb átmérője is csökken, ez pedig a szóródási kör méretének is a csökkenését eredményezi, így nagyobb mélységelességgel számolhatunk. Ezt a mélységelességi határok fenti kifejezéseiből is megállapíthatjuk: ha növeljük az  $R$  rekeszszámot (a rekesznyílást szűkítjük), akkor ennek eredményeként  $t_a$  csökken és  $t_f$  növekszik.

A  $t$  tárgy távolság csökkentésével a fényképezési arány növekszik, vagyis a tárgy képe nagyobb lesz, így annak szóródási körei is nagyobbak lesznek. A nagyobb szóródási körök következtében a tárgy távolsághoz közeli pontok képe átlépheti a még élesnek elfogadott méretet, így a mélységelesség csökken. Nagyobb gyújtótávolságú objektív használatakor a leképezendő tárgy képe szintén megnövekszik, ezért a mélységelesség ebben az esetben is csökken. Tehát a tárgy távolság csökkentésével, ill. a gyújtótávolság növelésével a mélységelesség csökken. Mindezek alapján kimondható, hogy a fényképezési arány növelésével a mélységelesség csökken.

A jó minőségű objektívek foglalatán, a távolságállító gyűrű mellett mélységelességi skálát is találhatunk. Innen a beállított rekeszérték és tárgy távolság függvényében leolvashatjuk a mélységelesség alsó és felső határát. Egyes tükröreflexes fényképezőgépeknél lehetőség van a rekesz „beugrasztására” és ezzel a mélységelességet vizuálisan is ellenőrizhetjük. Amennyiben semmiféle segédeszköz, ill. módszer nem áll rendelkezésünkre, akkor a mélységelesség meghatározására felhasználhatjuk a (10) és (11) kifejezéseket.

Gyakorlati szempontból egy adott tárgy távolságnál a rekesznyílást addig érdemes csökkenteni, amíg a mélységelesség felső határa a végtelenbe kerül. Láthatjuk a felső mélységelességi határt kifejező (11) összefüggésben, hogy az  $R$  rekeszszám növelésével  $t_f \rightarrow \infty$ , amikor a tört nevezője nulla felé közeledik. Tehát amikor:

$$\frac{(t-f)R\xi}{f^2} = 1 \quad (13)$$

a mélységelesség felső határa a végtelenbe nyúlik. Azt a  $t_h$  tárgy távolságot, amelynél a mélységelesség felső határa végtelenbe kerül az *hiperfokális távolságnak* nevezzük. A hiperfokális távolság kifejezését a fenti összefüggésből kapjuk, amelyben ha figyelembe vesszük, hogy  $t \gg f$ , akkor:

$$t_h = \frac{f^2}{R\zeta} \quad (14)$$

A hiperfokális távolságnál a mélységelesség alsó határa (10) szerint:

$$t_a = \frac{t_h}{2} \quad (15)$$

A fenti (15) és (14) összefüggésekből láthatjuk, hogy a mélységelesség alsó határa a hiperfokális távolság felénél van, rekeszeléssel a hiperfokális távolság csökken.

A nagyon olcsó fényképezőgépeknél, amelyeknél az élesség nem állítható, az objektívet a képsíktól a hiperfokális távolságnak megfelelő képtávolságra rögzítik. A viszonylag kis rekesznyílás következtében a kép néhány métertől a végtelenig éles.

#### Irodalom

- 1] *Holló D., Kun M., Vásárhelyi I.* – Amatőrfilmes Zsebkönyv; Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1972
- 2] *Kunz A., Samplawsky D.* – Fotobastelbuch, VEB Fotokinoverlag Leipzig, 1970
- 3] *Szalay B.*: Fizika; Műszaki Könyvkiadó, Budapest 1982
- 4] *Szita P.* : A mélységelesség. FOTO-LISTA KÉPTÁR, <http://stargate.eik.bme.hu/foto/kisokos/dof/index.htm>
- 5] *Szita P.* : Hiperfokális távolság. FOTO-LISTA KÉPTÁR, <http://stargate.eik.bme.hu/foto/kisokos/hiperfokalis/index.html>
- 6] *Vas A.*: Fotográfia távoktatási modul fejlesztése: III. Modultankönyv, 2000, Dunaujvárosi Főiskola; <http://indy.poliod.hu/program/fotografia/tankonyv.htm>

Kaucsár Márton

## Az Univerzum gyorsulva tágul

II. rész

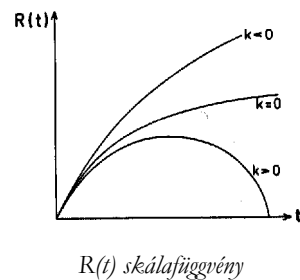
### 4. Az Univerzum tágulásának korszakai

A Friedmann egyenletekben három ismeretlen függvény szerepel: az  $R(t)$  skálafüggvény, a  $\rho(t)$  energiasűrűség és a  $p(t)$  nyomás. Mindhárom mennyiség a  $t$  idő függvénye, helykoordinátáktól nem függenek, mert az ellentétes lenne a homogenitás és az izotrópia követelményével.

Az Univerzum korai szakaszában a globális görbület még irreleváns, azaz a  $k = 0, +1, -1$  paraméterekkel jellemzett görbék még együtt futnak, ahogy ez az 1. ábrán jól látható. Ebben a korai szakaszban, a  $T$  hőmérséklet olyan nagy, hogy a részecskék kinetikus energiája mellett a nyugalmi energia elhanyagolható, ezért minden részecske úgy viselkedik mint a nyugalmi tömeget nem hordozó foton. Az anyag tehát tiszta sugárzásnak tekinthető. Ebben az esetben az állapot-egyenlet igen egyszerű alakot ölt:

$$p = \rho / 3.$$

Ezen ún. sugárzási korszakban a  $\rho_r$  energiasűrűség:



$$\rho_r \sim \epsilon_r / R^3 \sim h \nu / R^3 \sim h c / (R^3 \lambda) \sim 1/R^4,$$

minthogy a  $\lambda$  hullámhossz ugyanolyan ütemben növekszik, mint amilyenben az Univerzum tágul. Ebből az összefüggésből következik, hogy

$$(d\rho_r / dt) / \rho_r \sim -4 (dR/dt) / R$$

Ezt behelyettesítve az első Friedmann egyenletbe, kapjuk, hogy

$$(d\rho_r / dt) = -4 ((8 \pi G_N / 3))^{1/2} \rho_r^{3/2}$$

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$\rho_r(t) \sim 1/t^2$$

Később, amikor a hőmérséklet már nagyon lecsökkent, a kinetikus energia elhanyagolható a nyugalmi energia mellett, és a nyomás értéke is zérusnak tekinthető.

Ekkor az energiasűrűség:

$$\rho_m \sim \epsilon_m / R^3 \sim 1 / R^3,$$

minthogy  $\epsilon_m$  csak a nyugalmi energiát tartalmazza, ami a tágulás során állandó marad. Innen következik, hogy

$$\rho_m \sim 1 / t^{3/2}$$

Ezek szerint  $\rho_r$  és  $\rho_m$  különböző ütemben csökken. A táguló Világegyetem modellje szerint a tágulás során rohamosan csökken a hőmérséklet is. Az anyagot alkotó részecskék között változatos reakciók mennek végbe, aminek eredményeként eddig nem létező, összetett részecskék jönnek létre (például nukleonok és atommagok, stb.), illetve eddig jelenlévő részecskék tűnnek el (például kvarkok és gluonok, stb.).

Az Ősrobbanás után 1 mikro-másodperccel a hőmérséklet még kb. 100 GeV-nak felelt meg. (Ez annyit jelent, hogy a kaotikus hőmozgást végző részecskék átlagosan 100 GeV energiával rendelkeztek.) Ekkor még nem voltak sem protonok, sem neutronok, sem mezonok, mert az anyag még kvark-gluon plazma állapotban volt. A kvark-gluon plazma 100 GeV hőmérséklet táján alakult át hadronikus anyaggá. Ennek az átalakulásnak a során a kvarkok hármásával kötődtek egymáshoz és létrejöttek a fermion típusú barionok, azaz olyan feles spinű részecskék, mint amilyen a proton és a neutron, amelyek barion töltése 1. Nagyjából ugyanekkor kezdtek kialakulni a kötött kvark-antikvark párok is, amelyek spinje egész szám, tehát bozon jellegűek, és amelyek barion töltése zérus, tömegük pedig általában kisebb, mint a barionoké: ezek a mezonok. A Világegyetem további tágulása során a hőmérséklet tovább csökkent és elérte a  $T=1$  MeV hőmérsékletet. Az 1 MeV-től a 0.01 MeV-ig terjedő intervallum az a tartomány, ahol összetett atommagok jöhettek létre. Ezek a nehéz hidrogén ( ${}^2_1\text{H}_1$ ), a hélium két stabil izotópja a ( ${}^3_2\text{He}_1$ ) és a ( ${}^4_2\text{He}_2$ ), illetve a lítium ( ${}^7_3\text{Li}_4$ ). A nehezebb atommagok már csak a galaxisok, illetve a csillagok kialakulása után jöhettek létre. A legutolsó átalakulás, amelyben még a mikrofizikai részecskék játszották a fő szerepet, az volt, amikor az atommagokból, elektronokból és fotonokból álló plazma átalakult és helyébe egy semleges atomokból álló gáz és egy foton gáz keveréke jött létre. A foton gáz, ami eddig intenzív kölcsönhatásban volt az elektromosan töltött részecskéikkel az átalakulás után gyakorlatilag függetlenné vált, mert a semleges atomok csak igen kis mértékben szórják a fotonokat. Ez a foton gáz az, amit kozmikus háttérsugárzásnak hívunk, és ami itt van velünk 3 K fokos rádiósugárzássá szelődülve. Ezután lépett a színre a gravitáció, mint kölcsönhatás, ami előidézte a galaxisok és csillagok kialakulását.

### 5. Az Univerzum gyorsulva tágul

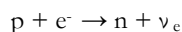
Az utóbbi néhány évben a Hubble-féle törvénytől eltéréseket tapasztaltak. Azok a galaxisok, amelyek igen-igen távol vannak, halványabbnak tűnnek, mint amilyenek

kellene lenniük a Hubble törvény szerint. Ennek két oka lehet. Vagy fényelnyelődés következett be az Univerzumot kitöltő híg anyagban, vagy nagyobb a távolságuk annál, mint amit a sebességük, azaz a vörös-eltolódás alapján várnánk. Az első lehetőséget a csillagászok pontos mérésekkel kizárták. Marad a második lehetőség, ami azt jelenti, hogy az igen távoli galaxisok gyorsulva távolodnak. A következőkben előbb megbeszéljük, hogy miképpen lehet nagyon nagy távolságokat mérni, azután pedig megpróbálunk válaszolni arra a kérdésre, hogy mi a gyorsulás oka.

A galaxisok távolságának meghatározása a Cepheidák segítségével csak addig lehetséges, amíg a fényük a környezet fényétől jól elkülöníthető. Ez pedig annál nehezebb, mennél távolabbi galaxist vizsgálunk. A nagy távolságok mérése tekintetében forradalmi változás állt be, amikor felismerték az Ia típusú szupernóvák kínálta lehetőséget.

## 6. Szupernóvák

A szupernóvákat két típusba soroljuk. A II. típusba tartozó szupernóva robbanás azért jön létre, mert elfogy a csillag forró magjában a nukleáris energiatermeléshez szükséges fűtőanyag, aminek következtében abbamarad az energia kisugárzás és vele együtt a sugárnyomás is, ami a csillag anyagát radiálisan kifelé nyomja. Márpedig ha nincs kifelé irányuló nyomás, akkor nincs ami ellenálljon a gravitációtól származó, befelé irányuló nyomásnak. Az eddig fennálló egyensúly felborul és a külső rétegek szinte szabad eséssel zuhannak a csillag középpontja felé. Az iszonyatos nyomás belepréseli az elektronokat a protonokba, és azok neutronokká alakulnak át. A maganyag sűrűségét megközelítő neutronanyag megjelenésekor a kívülről bezuhanó anyag megtorpan, és „visszapattan”. Ezen szemléletes kép mögött az áll, hogy az elektronok energiája már olyan nagy, hogy a



átalakuláshoz szükséges energia rendelkezésre áll. Ez azt jelenti, hogy az elektron energiája nagyobb, mint a neutron és a proton nyugalmi energiájának különbsége:

$$E_e > m_n c^2 - m_p c^2 = 1.3 \text{ MeV.}$$

A „visszapattanó” anyag lökéshullám formájában száguld kifelé és meggyújtja a hidegebb külső rétegekben eddig el nem égett nukleáris fűtőanyagot. Ez eredményezi azt az iszonyatos robbanást, aminek fényessége egy rövid időre felülmúlja egy egész galaxis fényességét.

Ahhoz, hogy megmondhassuk a szupernóva távolságát, tudni kellene a luminozitását. Ezt a II. típusú szupernóváknál lehetetlen megtudni, mert luminozitásuk erősen függ a csillag tömegétől, kémiai összetételétől és korábbi történetétől. Itt lépnek a „történelem színpadára” az Ia típusú szupernóvák. Az ő luminozitásukat ugyanis meg lehet mondani anélkül, hogy tudnánk a távolságukat. (Ilyen tekintetben hasonlítanak a Cepheidákra.) Ez azért lehetséges, mert a szupernóva robbanás mechanizmusa teljesen különbözik a II. típusúakétól. Itt most nem egy óriás csillag magja roppan össze „magára gyújtva a tetőt”, hanem egy már régóta kiegészített törpe csillag lángol fel hirtelen. Hogyan lehetséges ez? Úgy, hogy a kiegészített törpe egy kettős csillag egyik tagját alkotja, a másik tag egy vörös óriás csillag, amelyről folyamatosan anyag áramlik át a törpére, aminek következtében folyamatosan növekszik a tömege. Amikor ez a tömeg eléri a híres Chandrasekhar limitet, azaz a Nap tömegének 1.4-szeresét, akkor a törpe hirtelen összeroppan és neutron csillaggá alakul át. Ezen átalakulás során kibocsátott fényt észleljük mint Ia típusú szupernóva robbanást. Itt az a lényeges, hogy pontosan tudjuk, hogy ez az átalakulás akkor megy végbe, amikor a tömeg éppen 1.4-szerese a Nap tömegének, ezért a maximális luminozitás minden ilyen szupernóva robbanás során ugyanannyi, függetlenül attól, hogy hol történt a robbanás. De honnan tudjuk, hogy az adott esetben éppen egy Ia típusú szupernóvával van dolgunk? Először is onnan, hogy a spektrumából teljesen hiányoznak a hidrogén vonalai. Valóban a kettős csillag mindkét

tagja, a kiégett törpe is és a vörös óriás is már korábban elégette a teljes hidrogén készletét. Másodszor onnan, hogy a kitörés időbeli lefutásának alakja igen jellegzetes, amit a közeli Ia típusú robbanások esetén pontosan megfigyeltek.

Ahhoz, hogy az elmondottak érthetőek legyenek, emlékeztetni kell a kiégett törpék, a neutron csillagok és a vörös óriások mibenlétére és tulajdonságaira.

#### *Kiégett törpe*

Olyan kiégett égitest, ami hidrogén készletét már teljesen elégette és ezért a gravitáció egészen törpe méretűre nyomta össze. Ez azért következhetett be, mert miután elfogyott a fűtőanyag, megszűnt az energiatermelés, vele együtt az energia kisugárzás is, és a sugárnyomás is. De ha ez így van, akkor a gravitáció miért nem nyomta össze teljesen a kiégett csillagot? Azért nem, mert az elektronok alá vannak vetve a kvantumfizika törvényeinek. Ez pedig azt jelenti, hogy érvényes rájuk a Heisenberg-féle bizonytalansági reláció:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar,$$

ahol  $\hbar$  a Planck állandó,  $\Delta x$  és  $\Delta p_x$  az  $x$  koordináta, illetve a  $p_x$  impulzus komponens bizonytalansága. Látható, hogy  $\Delta x$  és  $\Delta p_x$  egyszerre nem lehet zérus, ha az egyik nagyon kicsi, akkor a másik nagyon nagy kell, hogy legyen. Ha egy elektront arra kényszeríték, hogy  $x$  koordinátája  $x$  és  $x+\Delta x$  között legyen, akkor a  $\Delta p_x$  impulzus bizonytalansága szükségképpen nagyobb lesz, mint  $\hbar/\Delta x$ . De akkor a  $p_x$  impulzus komponens abszolút értéke is nagyobb lesz, mint  $\hbar/\Delta x$ . Röviden szólva, ha az elektront kis helyre kényszerítém, akkor nagy lesz az impulzusa.

De ha nagy az impulzusa, akkor nagy nyomást képes kifejteni! Ez a nagy, kvantumfizikai eredetű nyomás lesz az, ami szembeszegül a gravitációs nyomásnak és megállítja a további összehúzódást.

#### *Neutron csillag*

Igaz-e az, hogy az elektronok kvantumfizikai nyomása minden esetben meg tudja állítani az összehúzódást? Akkor lenne igaz, ha semmi sem jönne közbe. De közbe jön! Amikor az elektronokat a gravitáció már nagyon kis helyre szorította össze, az elektronok impulzusa és ezzel együtt energiája is nagyon nagy lesz. Olyan nagy, hogy a fentebb emlegetett

$$E_e > m_n c^2 - m_p c^2 = 1.3 \text{ MeV}$$

alakú egyenlőtlenség teljesül. Ekkor az elektronok és a protonok eltűnnek és helyettük neutronok jelennek meg. De ha az elektronok nincsenek többé, akkor nyomást sem tudnak kifejteni és akkor a gravitáció győz. A csillag összeroppan. De meddig? Csak egy darabig! A neutronokra ugyanúgy érvényes a Heisenberg-féle bizonytalansági reláció, mint az elektronokra, ezért egy idő után a neutronok átveszik az elektronok szerepét és szembeszegülnek a gravitációs nyomással. A rendszer egyensúlyba kerül. Ez a neutron csillag. Ez az átalakulás akkor történik meg, ha a tömeg éppen akkora, mint a Nap tömegének 1.4-szerese. Ez az az átalakulás, amit Ia szupernóva robbanáskor látunk.

#### *Vörös óriás*

Amikor egy csillag elégette az összes hidrogén készletét, akkor további sorsát a tömege határozza meg. Ha a tömeg kicsi, akkor a gravitációs nyomás hatására a csillag összehúzódik és felmelegszik, de nem annyira, hogy beindulhasson a hélium magok fúziója.

Ekkor az összehúzódás addig folytatódik, amíg azt a kvantumfizikai eredetű elektronnyomás meg nem állítja. Ekkor a csillag fehér törpeként tündöklök az égen. Mint-hogy azonban már nincs ami pótolja a sugárzási veszteséget, a csillag megszűnik csillagnak lenni és kiégett fekete törpe lesz belőle, amit nem láthatunk, létét csak a gravitációs hatása tudja elárulni. Ha a csillag tömege nagy, akkor az összehúzódás során bekövetke-

zõ felmelegedés olyan nagy mértékű lehet, hogy beindul a hélium magok fúziója. A héliumot égető csillagok sugárnyomása a csillag anyagát igen nagy méretűre képes fel-fújni. Ezek a vörös óriások.

A fentebb elmondottak szerint az Ia típusú szupernóvák segítségével megmérhetjük azon galaxisok távolságát is, amelyek esetén minden eddig ismert távolságmérési eljárás felmondja a szolgálatot. Két csillagász csoport, egymástól függetlenül arra a megállapításra jutott, hogy a nagyon távoli galaxisok esetén a sebesség és a távolság közötti összefüggés nem olyan lineáris függvény mint azt eddig hittük. Az egyenes elkanyarodik a nagyobb távolságok irányába.

### 7. Mi a magyarázata annak, hogy az Univerzum gyorsulva tágul?

Az utóbbi években a gyorsulásra számos magyarázatot próbáltak adni. Ezek közül a legdrasztikusabb az, hogy a gravitációelmélet módosításra szorul. Más magyarázatok a quintessencia, illetve a sötét energia fogalmával operálnak. Itt ezekre most nem térünk ki. Ehelyett inkább egy a józan ésszel könnyen átlátható, ezért szimpatikus magyarázatot ismertetünk, amelyet három fiatal kutató: Bene Gyula, Czinner Viktor és Vasuth Máttyás a közelmúltban publikált. Ez a magyarázat abból indul ki, hogy az égen a galaxisok eloszlása nem homogén. Ez biztosan igaz. Bevezetik a homogén eloszlástól való eltérést, a fluktuációkat a mértékét. A Friedmann egyenleteket a perturbáció számítás eszközeivel oldották meg, és másodrendű közelítésig figyelembe vették a fluktuációk hatását. Eredményül azt kapták, hogy a fluktuációk negatív nyomást eredményeznek. A fluktuációk mértékét meg lehet úgy választani, hogy a számítás visszaadja az Univerzum tágulásának gyorsulását. Ennek ellenére ez a magyarázat még ellenőrzésre szorul. Érdekes megemlíteni, hogy ez a magyarázat egy igen egyszerű formában is megfogalmazható. Az eredeti Friedmann modellben, a galaxisok alkotta gázt ideális gáznak tekintik, amit az jellemez, hogy a gáz részecskéi nem hatnak egymásra. Az állapotegyenlet:

$$p V = RT \quad (\text{ha } T \rightarrow 0, \text{ akkor } p \rightarrow 0)$$

Tekintsük ezt a gázt reális gáznak, amelyben a részecskék hosszúhatótávú vonzást gyakorolnak egymásra. A reális gázok van der Waals-féle állapotegyenlete:

$$(p + A \rho^2) (V - V_0) = R T,$$

ahol az  $A \rho^2$  tag a vonzó kölcsönhatást veszi figyelembe,  $V_0$  pedig a részecskék saját térfogata, ami annál jelentéktelenebb, mennél hígabb a gáz. Ezen, a reális gázokra vonatkozó állapotegyenletheől következik, hogy ha  $T \rightarrow 0$ , akkor  $p \rightarrow -A \rho^2$ , azaz a nyomás negatív! Ez kvalitatíve megegyezik a fluktuációk elemzéséből származó eredménnyel.

A fiatal kutatók által bevezetett magyarázat tehát azt mondja, hogy az Univerzumot alkotó galaxisok nem ideális gázt, hanem reális gázt alkotnak, ami nyilvánvalóan igaz, hiszen a galaxisok között gravitációs vonzás uralkodik.

Lovas István

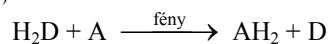
a Magyar Tudományos Akadémia tagja

## Energiaátalakulási folyamatok a növényekben

A növényi anyagcsere egyik legjellemzőbb vonása, hogy a növények képesek a fényenergiát szerves anyagok előállítására felhasználni. Azon folyamatok összességét, melyek során a növényi szervezet fényenergia jelenlétében szervesanyagokból szerves anyagokat épít fel, fotoszintézisnek nevezzük. Ahhoz, hogy növekedési és fejlődési folyamatait, a testen belüli állandó megújulásokat, az aktív anyagszállítási és mozgá-

si jelenségeket, illetve életben maradását biztosítani tudja, minden élő szervezetnek szüksége van energiára. Az autotróf növények és egyes baktériumtípusok ezt az energiát közvetlenül a napfényből szerzik be. Az állati szervezetek, a gombák és a heterotróf mikroorganizmusok a napfény energiáját nem tudják közvetlenül hasznosítani, ezért ezek közvetetten jutnak a fény által biztosított energiához úgy, hogy növényeket, növényevő állatokat vagy elpusztult élőlényeket fogyasztanak. Tehát végső soron az egész élővilág számára az energiát a fotoszintézis során átalakított fényenergia szolgáltatja. A fotoszintézis általános jelentősége akkor is könnyen belátható, ha meggondoljuk, hogy a Föld jelenlegi légkörének oxigéntartalma fotoszintetikus eredetű. Továbbá, az üzemanyagként használt kőszén, kőolaj és földgáz is a régóta letűnt földtörténeti korok növényei által végzett fotoszintézis közvetlen vagy közvetett eredménye.

Ha általános reakcióegyenlet formájában akarjuk a fotoszintézis lényegét megfogalmazni, akkor azt kell szem előtt tartani, hogy a fotoszintézis egy redoxfolyamat, melynek során valamilyen elektrondonorról úgy jut át az elektron egy akceptorra, hogy ahhoz a szükséges energiát a fény szolgáltatja. Így a fotoszintézis legáltalánosabb egyenletét a következőképpen írhatjuk fel:



ahol  $\text{H}_2\text{D}$  az elektrondonor, A pedig az akceptor.

A fotoszintetizáló szervezetek döntő többsége, egyes zöldbaktériumokat és a bíborbaktériumokat kivéve, a vizet használja fel elektrondonorként ahhoz, hogy redukálja a szén-dioxidot vagy más elektrónakceptort. Ilyenkor a víz oxidációja során oxigén képződik. A szén-dioxid a fotoszintézisben a legjelentősebb elektrónakceptor, azonban a legtöbb növényben a szén-dioxid mellett a nitrát- és a szulfátion is betöltheti az elektrónakceptor szerepét. A nitrogénkötő cianobaktériumokban a molekuláris nitrogén, egyes zöldalgákban pedig a hidrogénion ( $\text{H}^+$ , proton) is lehet akceptor, melyből ilyenkor oxigénmentes környezetben hidrogén gáz termelődik. A hidrogén előnyös tulajdonságokkal rendelkező üzemanyag, ezért jelenleg számos biotechnológiai kutatás foglalkozik előállításának a fényenergia segítségével történő hatékonyabbá tételével.

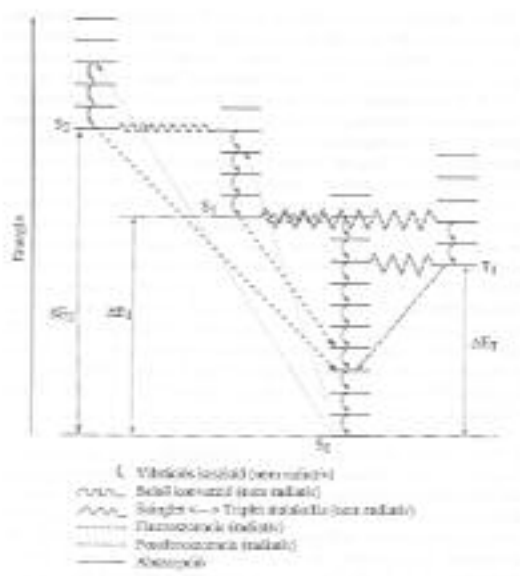
A fényenergia kémiai energiává történő átalakításának első lépése a *fény abszorpciója*. A Nap által kisugárzott fény spektruma az ultraibolyától az infravörös tartományig végig folytonos. Mivel a fotoszintézis során az elnyelt elektromágneses sugárzásnak kémiai változást kell előidéznie, az infravörös sugárzás energetikai okokból (túl kis energiátartalma miatt) nem alkalmas erre a célra. Az elnyelt foton energiájának nem szabad túl nagyak sem lennie, mert ebben az esetben az abszorbeáló molekula atomjaira bomolhat, ami a fotoszintézis szempontjából nem kívánatos. Ahhoz, hogy egy anyag kémiai reakcióba lépjen, elegendő, ha a foton a molekulát gerjesztett állapotba hozza. A hullámhossz növekedésével a fotonok energiátartalma csökken. A 350 nm hullámhosszú kék fotonok energiája 342 kJ/Einstein, míg a fotoszintézis alkalmával még elnyelődő 1050 nm-es sötétvörös fotonok energiája csupán 114 kJ/Einstein. Ez az energiáérték kisebb a kémiai kötések energiájánál. A víz O–H kötésének felbontása például 465 kJ energiát igényel. Tehát a fotoszintetizáló szervezetekben abszorbeált fotonok közvetlenül nem okoznak *fotolízist* (fény hatására történő bomlás), viszont energiájuk elegendő ahhoz, hogy egy kémiai kötést fellazítsanak, és így aktivált, tehát reakcióképes állapotba hozzák a molekulát.

Fényelnyeléskor a molekula alapállapotból gerjesztett állapotba, vagyis egy alacsonyabb energiaállapotból egy energiagazdagabb állapotba kerül. Azonban a molekulák már alapállapotban sincsenek teljesen azonos energiaszinten, mivel elektronjaik különböző vibrációs és rotációs energiaszinteket foglalnak el. Összetett molekulák esetében

ezek a szintek egymáshoz nagyon közel vannak, ezért nem adnak különálló abszorpciós vonalakat, hanem összemosódnak és széles abszorpciós sáv jelenik meg. Ez a helyzet a fotoszintetikus pigmentek (klorofilok és karotenoidok) fényelnyelése esetében is.

A fényabszorpciókor történő elektronátmenetekkel járó energiaváltozásokat úgynevezett energiadiagramokon szokták ábrázolni (1. ábra).

A foton elnyelésekor a molekulának egy  $\pi$ -elektronja a  $\pi$ -kötőpályáról  $\pi^*$ -lazítópályára lép át. A Pauli féle tilalmi elv értelmében minden pályán két elektron tartózkodhat, ellentétes spinnel. Ekkor a molekula szingulett (S) állapotban van. Alapállapotban a klorofillmolekulák szingulett állapotban vannak. A foton abszorpciója után az egyik elektron másik pályára kerül. Ha az átlépett és a visszamaradt elektron spinje továbbra is ellentétes (antiparalell), akkor a molekula szingulett gerjesztett állapotba kerül, ha pedig azonos spinűvé válik a két elektron, akkor metastabilis tripllett (T) állapotba jut a molekula.



1. ábra

*Egy klorofill molekula lehetséges gerjesztési energiaszintjei és ezek kölcsönhatásai fényelnyelés során*

Fényabszorpciókor a becsapódó foton által gerjesztett elektron különböző lazító pályákra kerülhet, melyeknek különböző az energiaszintje. A molekuláknak több szingulett és tripllett állapotuk létezhet ( $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $T_1$  stb.). A különböző szingulett és tripllett állapotoknak is egyenként több alszintjük van. A molekula a magasabb gerjesztett állapotból ( $S_2$ ,  $S_3$  stb.) igen gyorsan fénykiszugárzás nélkül (hővé alakult energia leadásával)  $S_1$  állapotba, azaz a legalacsonyabb gerjesztett szingulett állapotba jut. Az  $S_1$  állapot sokkal stabilabb állapotot képvisel, mint az  $S_2$  vagy  $S_3$  állapotok, ezért az  $S_1$  állapotba került molekula sorsa többféle képpen alakulhat. Az  $S_1$  legalacsonyabb vibrációs alszintjéről a molekula visszatérhet az  $S_0$  (alapállapot) bármelyik vibrációs alszintjére úgy, hogy közben az energiakülönbséget fénykiszugárzás formájában adja le. Ezt a fénykiszugárzást *fluoreszcenciának* nevezzük. A fluoreszcencia mindig nagyobb hul-

lámhosszaknál jelentkeznek, mint az abszorpciós sáv, mivel az  $S_0 \rightarrow S_1 \rightarrow S_0$  átalakulások során a gerjesztési energia egy része hővé alakul.

Az  $S_1$  állapotból a molekula fénykisugárzás nélkül is visszatérhet alapállapotba, amikor a gerjesztési energia teljes mértékben hővé alakul. Ezt a folyamatot *belső konverzió*nak nevezzük. Az  $S_1$  molekula  $T_1$  állapotba is kerülhet, szintén fénykisugárzás nélkül. Ekkor az  $S_1$  és  $T_1$  meghatározott vibrációs alszintjei azonos energiaértékeket képviselnek. Az  $S_1 \rightarrow T_1$  átmenet után a molekula vibrációs energiája tovább csökken, egészen a legalacsonyabb vibrációs alszintig, amely kisebb energiaszintet képvisel, mint az  $S_1$  legalacsonyabb vibrációs alszintje. A triplett állapot közepes élettartama több nagyságrenddel nagyobb, mint a szingulett állapoté.  $T_1 \rightarrow S_0$  átmenet, habár viszonylag ritka, szintén történhet fénykisugárzással, amit *foszforeszcencia*nak nevezünk. A foszforeszcencia intenzitásában messze elmarad a fluoreszcenciától. A  $T_1$  állapotból is van lehetőség fénykisugárzás nélkül visszatérni az alapállapotba. Mivel a  $T_1$  állapot élettartama igen hosszú, lehetőség van arra is, hogy a molekula környezetéből energiát vegyen fel és végbemenjen egy  $T_1 \rightarrow S_1$  átmenet, azaz a molekula triplett gerjesztett állapotból szingulett gerjesztett állapotba jusson vissza.

A gerjesztett állapotból fénykisugárzással vagy belső konverzióval való visszatérés az alapállapotba olyan folyamat, amelynek során az abszorbeált fényenergia a fotoszintézis számára elvész. A fotoszintézis során akkor hasznosul a gerjesztési energia, ha a gerjesztett klorofillmolekulák kémiai reakcióba lépnek. A *fotokémiai reakció* csak az  $S_1$  és  $T_1$  szintekről történhet. A fotoszintézisben a klorofilok fotokémiai reakciójának az a lényege, hogy a lazító pályára juttatott *elektron* a klorofillmolekula átadja egy, közvetlenül a környezetében lévő elektronakceptoroknak. Ezáltal a klorofill oxidációt szenved és az átadott energiadús elektron helyett egy, szintén a közvetlen környezetében lévő donortól vesz föl egy energiaszegény elektront. Vagyis az egész folyamat során az történik, hogy energia-befektetéssel, amelyet a klorofilok által elnyelt fény biztosít, a klorofill közvetítésével a donor molekuláról az akceptor molekulára jut egy elektron. Ahhoz, hogy a klorofillmolekula elektronközvetítésben vegyen részt az szükséges, hogy közvetlen kapcsolatban legyen mind az elektronadonorról, mind az akceptor molekulával. Azonban a klorofillmolekulák többsége olyan molekuláris környezetben helyezkedik el, ami nem ad lehetőséget a fotokémiai reakcióban való részvételre. A fotokémiai reakciók csak az úgynevezett reakciócentrumokban mennek végbe, ahol a molekuláris elrendeződés lehetővé teszi a résztvevő tagok között az elektroncserét. Ilyen reakciócentrumot pedig minden növényben csak kétféle *a*-típusú klorofill képvisel.

Az  $S_1$  és  $T_1$  állapotú klorofill nemcsak fénykisugárzással vagy belső konverzióval (hőleadással) térhet vissza alapállapotába, amikor is a gerjesztési energia a fotoszintézis számára elvész, hanem az ún. *rezgésttranszfer* során a gerjesztett  $S_1$  vagy  $T_1$  molekulák átadhatják gerjesztési energiájukat egy másik, alapállapotban lévő molekulának. Ebben az esetben az alapállapotban lévő molekula kerül  $S_1$ , illetve  $T_1$  állapotba. Az energiaátadás kémiaiilag különböző és azonos molekulák között is lejátszódhat. Ha kémiaiilag azonos molekulák között történik, akkor a folyamat többször ismétlődhet, azaz egy foton abszorpciója során a felvett gerjesztési energia molekuláról molekulára adódhat át, amit *energiamigráció*nak nevezünk. A kémiaiilag különböző molekulák (pl. *b*-klorofill  $\rightarrow$  *a*-klorofill) között lejátszódó energiatranszfert az azonos molekulák között (pl. *a*-klorofill  $\rightarrow$  *a*-klorofill) történő energiamigráció is követheti. A molekulák közötti energiatranszfer feltétele az, hogy az energiadonor molekula emissziós vagy fluoreszcencia spektrumát legalább részlegesen fedje át az akceptor molekula abszorpciós spektruma. A transzfer határfoka annál nagyobb, minél nagyobb mértékű a spektrumok átfedése. Erősen befolyásolja a határfokot a transzferben részt vevő molekulák egymástól való távolsága is.

Ha megvizsgáljuk a fotoszintetikus pigmentek abszorpciós és emissziós spektrumát, akkor azt tapasztaljuk, hogy köztük az energiatranszferhez szükséges spektrumátfedés

teljes mértékben teljesül. Így tehát az *a*-klorofill mellett előforduló kísérő pigmentekről (*b*-klorofill, *c*-klorofill, karotenoidok, fikobilinek) nincs energetikai akadály annak, hogy a gerjesztési energia átadódjon az *a*-klorofillnak. A fotoszintetikus apparátusban olyan nagy a pigmentek koncentrációja, hogy a molekulák elegendően közel vannak egymáshoz, így nagy valószínűséggel történhet meg az elnyelt fényenergia továbbításának folyamata.

Az *a*-klorofillokat kísérő egyéb pigmentek által abszorbeált fény csak akkor hasznosulhat a fotoszintézis folyamatában, ha a gerjesztési energia átadódik az *a*-klorofillnak, majd az energiamigráció következtében az elnyelt energia eljut a reakciócentrumok képviselő *a*-klorofill formákhoz. A reakciócentrumokban lévő *a*-klorofillok (melyek jelölése P<sub>680</sub> és P<sub>700</sub>) energiacsapdaként viselkednek, mivel abszorpciós spektrumuk maximuma nagyobb hullámhossznál van, mint a közvetlen környezetükben található más *a*-klorofill formáké vagy kísérő pigmenteké. A reakciócentrumok körül a pigmentmolekulák fénygyűjtő antennákat képeznek, és bármelyik molekula nyeli el a fotont, a gerjesztési energia a reakciócentrum felé továbbítódik, ami egyenirányított energiagyűjtést jelent a fotokémiai rendszerben.

Amikor zavaró tényezők hatására a fotokémiai reakciók vagy az általuk eredményezett kémiai energiaraktárak felhasználási útjai gátolódnak, az elnyelt fényenergia egyre nagyobb hányada alakul át fluoreszcenciává vagy hővé, majd alkalmazkodási reakcióként módosul a fényenergia elnyelésének mértéke, a fénybegyűjtő pigmentrendszerek átrendeződése által.

A fentieket összefoglalva megállapítható, hogy a sugárzó napfény energiáját elnyelő fotoszintetikus pigmentek gerjesztett elektronállapotba jutnak, aminek következtében a fény energiáját négyféle képpen továbbíthatják: 1. fényt bocsátanak ki fluoreszcencia vagy foszforeszcencia által; 2. hőenergiát adnak le; 3. rezgésttranszfer útján átadják az energia egy részét egy másik pigmentmolekulának; 4. a fény energiáját átvevő elektron leadásával redoxreakciót indítanak el (elektromos energia átalakul kémiai energiává), új kémiai kötések alakulnak ki, új szerves molekulák képződnek. Ezáltal biztosítják a növények saját maguk számára és az egész élővilág számára azt az energiát, ami nélkül az életben maradás lehetetlen.

A növényekben végbemenő energiaátalakítási és tárolási folyamatok megértése hozzájárulhat a gyakorlatilag korlátlan mennyiségben jelen levő fényenergiának a jövőbeni minél nagyobb hatásfokkal való kiaknázásához, aminek következtében enyhülhetnének az élelmezési, valamint az energiahiányból adódó problémák. Ehhez viszont a növényekben zajló energiaátalakulások fizikai és kémiai folyamatainak a minél alaposabb megismerése szükséges.

### Felhasznált irodalom

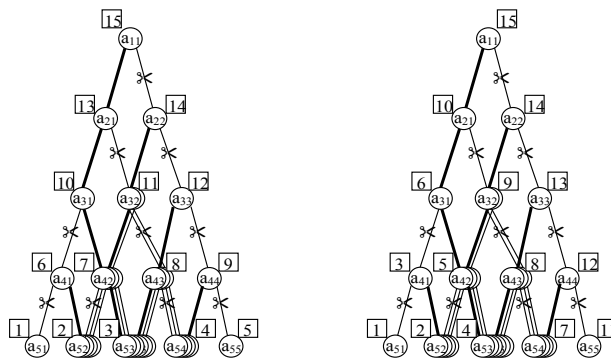
- 1] FODORPATAKI L., PAPP J. (2002): Ecophysiological studies based on chlorophyll fluorescence in algal cell cultures, *Contrib. Bot.*, 37: 221-230.
- 2] HALL, D. O., RAO, K. K. (2001): *Photosynthesis*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 58-66.
- 3] HELDT, H.-W. (1997): *Plant biochemistry and molecular biology*, Univ. Press, Oxford, 39-59.
- 4] KE, B. (2001): *Photosynthesis: photobiochemistry and photobiophysics*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 4-44.
- 5] LÁNG F. (1998): *Növényélettan*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 197-226.
- 6] RAGHAVENDRA, A. S. (2000): *Photosynthesis: a comprehensive treatise*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 320-334.
- 7] RONTÓ GY., TARJÁN I. (1991): *A biofizika alapjai*, Medicina Kiadó, Budapest, 67-95.

**Bartha Csaba,**  
egyetemi hallgató, BBTE



A **Dinamikus programozás** először is egymásra helyezi az azonos részfákat, létrehozva ezáltal egy „leszűkített” megoldásfát, amely csak a különböző részfeladatokat képviselő csomópontokat tartalmazza (ezért a Dinamikus programozás akkor tudja értékesíteni erősségeit, ha sok az identikus részfeladat). Ezt követően mindenik csomóponttól lementszi a száraz ágakat, akárcsak a Divide et impera.

Milyen sorrendben metszi meg a Dinamikus programozás a leszűkített fa csomópontjait? Klasszikus változatában letről felfelé halad végig a fán, szintről-szintre. A rekurzív megvalósítás ugyanabban a sorrendben foglalkozik a csomópontokkal, mint a Divide et impera, csak hogy kihagyja az ismétlődőket. Tekintettel arra, hogy a leszűkített fa csomópontjainak száma  $n(n+1)/2$ , algoritmusának komplexitása négyzetes.



### Hogyan építik fel a megoldást?

A **Greedy** illetve a **Back-track** technikák *fentről-lefelé* építik fel a megoldást illetve a megoldásokat, levélben hirdetve eredményt.

A **Divide et impera** és a **Dinamikus programozás**, pontosan fordítva, *letről-felfelé* építi fel az optimális megoldást. Mindkét technika a gyökérben hirdet eredményt, a Dinamikus programozás klasszikus változata felérkezve, a Divide et impera pedig visszaérkezve ide. A Divide et impera és a Dinamikus programozás rekurzív változata között csak annyi a különbség, hogy az első egymástól függetlenül oldja meg a részfeladatokat és ezért nem veszi észre ha ismétlődnek, a második viszont valahányszor megold egy részfeladatot eltárolja a megoldását, így ha újból találkozik ugyanazzal a részfeladattal, a megoldása már rendelkezésre áll.

A **Back-track** és a **Divide et impera** közös vonása az, hogy mindkettő mélységében járja be a megoldásfát. Mivel azonban ellentétes irányban építik a megoldást ezért az egyik preorder, a másik viszont posztorder sorrendben látogatja meg a csomópontokat. Ez magyarázza meg azt is, hogy miért generál a Back-track több potenciális megoldást is (amelyek közül ki kell választania az optimálist), a Divide et impera pedig miért épít fel csupán egyet, az optimálist: a fa lefelé terebélyesedik, felfelé viszont szűkül, sok levele de egyetlen gyökere van.

Mi egy másik alapvető különbség a **Greedy** és a **Dinamikus programozás** technikák között? Az első *optimális döntések* által, a második pedig *optimális részmegoldásokból* próbálja felépíteni az optimális megoldást. Ezért a Greedy megközelítés csak akkor kielégítő ha bizonyítani tudjuk, hogy az adott feladat esetében az optimális döntések tényleg optimális megoldáshoz vezetnek (a globális optimum lokális optimumukat feltételez). A Dinamikus programozás alkalmazhatóságának feltétele pedig az, hogy a

feladat optimális megoldása valamilyen módon felépíthető legyen a részfeladatok optimális megoldásaiból (érvényes legyen az optimalitás alapelve).

Milyen reakciókra számíthatunk, ha alkalmazva az ívlap-kísérletből nyert tanulságot, segítünk a diákoknak felülről látni a programozási technikák stratégiáit?

- „most értettem meg először azt, hogy...”
- „éreztem, hogy ott valaminek kell lennie, de sohasem tudtam megfogalmazni, hogy mi.”
- „eddig az egész egy nagy homály volt, és most ... mintha egyszerre minden kitisztult volna.”
- „olyan ez, mint amikor a puzzle elemei a helyükre kerülnek.”
- „mindaz, ami eddig annyira elvontnak és megfejtetetlennek tűnt, most egyszerre csak logikus és világos lett.”

Kátai Zoltán



## A sárkány

### 1. Bevezetés

A dinosaurusok (sárkánygyíkok) virágkora a földtörténeti középkor három időszakára (triász, jura és kréta) esik. Ekkor ők uralták a szárazföldeket, tengereket, sőt egyes csoportjaik még a levegőt is. A kréta időszak vége táján – mintegy 65 millió esztendővel ezelőtt – véget ért az óriásgyíkok uralma, nagy valószínűséggel egy kozmikus katasztrófa következtében. Feltehető, hogy egy hatalmas tömegű aszteroid csapódott a Földre, amely akkora porfelhőt kavart, hogy több éven át ez többnyire eltakarta a Napot. Ez a növényzet elszegényedéséhez vezetett, ami maga után vonta a nagy táplálékigényes őshüllők kipusztulását. Ez a hipotézis alátámasztó tények:

- az akkori földfelszíni lerakódások iridiumtartalma kb. 100-szor nagyobb a többiekénél,
- a Föld magmatikus kőzeteinek iridiumtartalma csak 0,001 g/tonna, holott a meteoriteké 0,65 g/tonna.

Az ősvilág furcsa óriásai jórészt kihaltak, mielőtt az ember kialakult volna. A talajban, kőzetekben megtalált csontok, kővült lenyomatok alapján tudunk róluk. Ezek az idegenszerű „ősvilági szörnyetegek” méltán ragadták meg az ember képzeletét; mondákban, mesékben, fantasztikus regényekben szerepelnek. Az ókori mondában például a sárkány az aranyalma őrzője, s csillagképet is neveztek el róla. A Draco (Sárkány) főleg a Kis és Nagy Medve csillagkép között terül el (1. ábra). Fő csillaga a Thuban (Sárkány – óarab nyelven), i.e. 2830-ban Sarkcsillagként volt használható. A Föld tengelye 26000 éves periódusú mozgásának a következtében i.sz. 21167. évében újra a Thuban lesz az északi pólus közelében.

Az ember ősi vágya a repülés. Ez ösztökelte az embert a különböző formájú és nagyságú sárkányok megépítésére. A sárkányépítés technikája már elérte azt a szintet, hogy megalkották az embert is a levegőbe emelő sárkányt. Itt említeném meg, hogy hazánkban elsőnek a kolozsvári születésű Kiss Árpád készített embert repítő sárkányt 1974-ben.

A sárkányrepüléssel kapcsolatos problémakör nagyon tág, minthogy nagyon sokfajta sárkányt építettek. A továbbiakban csak a síklapú sárkányok megépítésével és repülésével fogunk foglalkozni.

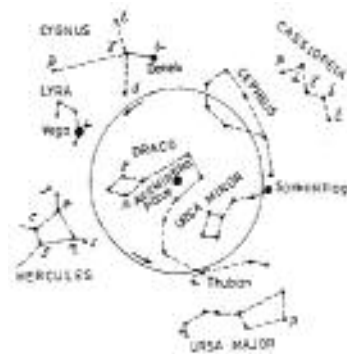
Remek szórakozás verőfényes tavaszi napsütéses időben sárkányt eregetni. Az élmény akkor a legteljesebb, ha a sárkány nem készen vásárolt, hanem saját tervezésű és készítésű. A sárkánykészítés és sárkányeresztés gyakorlati fogásait jól megtanulhatjuk és tökéletesíthetjük, ha előbb működésének fizikai értelmezésével megismerkedünk.

A sárkány fajsúlya nagyobb mint a levegőé, ezért csak úgy „önmagától” mint például egy hidrogénnel töltött léggömb soha nem szállna fel. A repülő sárkányt a szél ereje tartja a magasban.

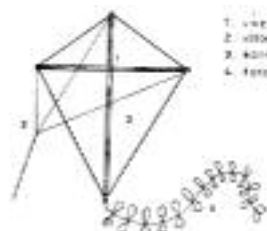
## 2. Felépítése

Igen sokféle játéksárkány létezik, a lényeg azonban minden esetben ugyanaz: könnyű vázszerkezetre erős, szél nyomásának ellenálló nagy felületű vitorla feszül (2. ábra).

A váz készülhet vékony fa lécekből, nádból, műanyagból. A vitorla leggyakrabban papír, de lehet műanyag fólia vagy textilanyag is. A sárkány váza 3 rövidebb zsinog, ún. kantár segítségével csatlakozik a hosszú eresztőzsinórhoz. A kantárszárak hossza meghatározza a vitorla állásszögét a feszülő eresztőzsinórhoz képest. Ez a szög repülés során általában nem változik. Az egyensúly fenntartásában a síklap alakú papírsárkányoknál döntő szerepe van a levegőben hosszán kigyózó faroknak.



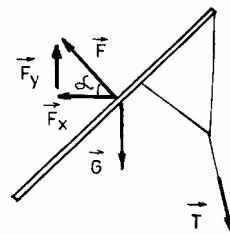
1. ábra



2. ábra

## 3. A sárkányra ható erők

A repülő sárkányra három erő hat: a  $\vec{G}$  súlyerő, a szél  $\vec{F}$  ereje és az eresztőzsinórban fellépő  $\vec{T}$  feszítő erő (3. ábra). A levegőnek (szélnek) a sárkány vitorlájába ütközése következtében létrejövő erő merőleges a vitorlára és nagysága:  $F=2A\rho v^2 \cos^2\alpha$ , ahol  $A$  a vitorla területe,  $\rho$  a levegő sűrűsége,  $v$  a szél sebessége és  $\alpha$  a sebességvektor meg a vitorla felületének normálisa által bezárt szög.



3. ábra

Lássuk, hogyan jutunk el ehhez az erő kifejezésekhez!

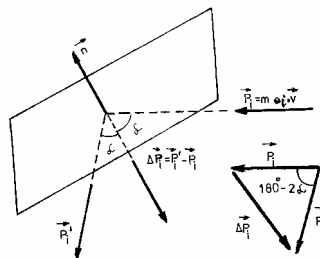
Tekintsünk egy  $A$  területű, téglalap alakú vitorlafelületet (4. ábra).

A  $\vec{p}_i$  (a kövér betűk vektormennyiséget jelentenek) impulzussal rendelkező levegőmolekula ( $i=1$  ha  $N_2$ ,  $i=2$  ha  $O_2$ ,  $i=3$  ha  $H_2O$ ,  $i=4$  ha  $CO_2, \dots$ ), amely a szél alkotórésze  $\alpha$  szög alatt csapódik a vitorlafelületbe. A rugalmasnak tekinthető ütközés következtében a molekula impulzusa  $\vec{p}_i'$  ( $p_i' = p_i$ ) lesz. Könnyen belátható, hogy a molekula  $\Delta\vec{p}_i$  impulzusváltozása a felület normálisával megegyező irányú, de ellentétes irányítású, s nagysága:

$$|\Delta p_i| = [2p_i^2 - 2p_i^2 \cos(180^\circ - 2\alpha)]^{1/2} = m_i v [2(1 + \cos 2\alpha)]^{1/2} = 2m_i v \cos \alpha,$$

ahol  $m_i$  az  $i$  típusú molekula tömege.

Az impulzusmegmaradás elve értelmében a vitorla impulzusváltozása egy molekulával való ütközés következtében  $-\Delta p_i$  lesz, amely párhuzamos az  $\mathbf{n}$ -nel, s azzal megegyező irányítású. A  $\Delta t$  idő alatt a vitorlával az az  $N = N_1 + N_2 + N_3 + \dots = \sum N_i$  ( $N_i$ -az  $i$  típusú molekulák száma) számú molekula ütközik, amely az  $A$  alapú és  $v \Delta t \cos \alpha$  magasságú paralelepipedonban van (5. ábra), s így a vitorla  $\sum |\Delta p_i| N_i$  impulzusváltozását idézi elő. Newton 2. törvénye értelmében a vitorlára ható erő:



4. ábra

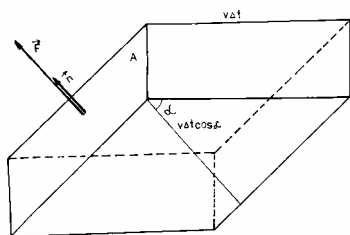
$$F = \sum N_i |\Delta p_i| / \Delta t = \sum (m_i / m_i) 2m_i v \cos \alpha / \Delta t = 2 \rho A v \Delta t \cos \alpha v \cos \alpha / \Delta t = 2 \rho A v^2 \cos^2 \alpha,$$

ahol  $m_i$  az  $i$  típusú molekulák össztömege és  $\sum m_i = \rho A v \Delta t \cos \alpha$  a paralelepipedonban levő levegő tömege. A sárkányt az  $\mathbf{F}$  erő  $F_y = F \sin \alpha$  függőleges komponense emeli a magasba (3. ábra). Vizsgáljuk meg, hogy hogyan változik az  $F_y = 2 \rho A v^2 \cos^2 \alpha \sin \alpha$  erő az  $\alpha$  szög függvényében. Ennek érdekében előbb készítünk egy értéktáblázatot (1. táblázat), majd megrajzoljuk az  $f(\alpha) = \sin \alpha \cos^2 \alpha$  függvény grafikonját (6. ábra). A 6. ábra grafikonja azt mutatja, hogy az  $F_y$  maximális értéke kb. az  $\alpha = 35^\circ$  értékre valósul meg.

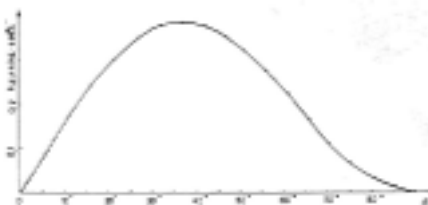
Megjegyzés: ugyanerre az eredményre jutunk, ha az  $F_y$ -nak az  $\alpha$  szerinti deriváltját zéróval tesszük egyenlővé:  $F_y'(\alpha) = 0 \Rightarrow \sin \alpha = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 35^\circ 10'$ .

1. táblázat

$\alpha$	$d = 5^\circ$	$10^\circ$	$15^\circ$	$20^\circ$	$25^\circ$	$30^\circ$	$35^\circ$	$40^\circ$	$45^\circ$	$50^\circ$	$55^\circ$	$60^\circ$	$65^\circ$	$70^\circ$	$75^\circ$	$80^\circ$	$85^\circ$	$90^\circ$
$\sin \alpha$	0	0,0872	0,1736	0,2598	0,3420	0,4228	0,5000	0,5774	0,6561	0,7071	0,7660	0,8112	0,8526	0,8907	0,9254	0,9563	0,9832	0
$\sin \alpha \cdot \cos^2 \alpha$	0	0,0866	0,1685	0,2416	0,3020	0,3471	0,3844	0,4122	0,4306	0,4397	0,4394	0,4294	0,4109	0,3846	0,3518	0,3137	0,2716	0



5. ábra



6. ábra

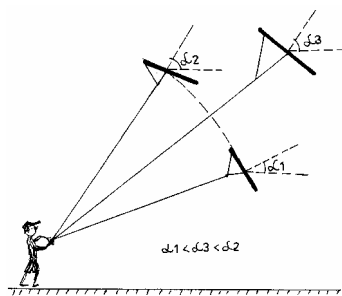
#### 4. A sárkányrepítés

A sárkányeresztéshez általában 2 személy kell. Az X személy a szél felől állva a feltekert eresztőzsinórt tartja, míg az Y segítőtársa 4-5 m-rel távolabb áll és feje fölé emelve a széllel szemben ferdén tartja a sárkányt. Egy megbeszél jelle a zsinógot tartó X személy erőteljes gyors mozdulatokkal (mindkét kezét felváltva használva) húzni kezdi maga felé a zsinórt, miközben az Y társa a jelle elengedi, esetleg kissé felfelé löki a sárkányt. A szélről, valamint az

erőteljes húzás miatt fellépő ellenszélről a sárkány vitorláján a felületre merőleges  $\mathbf{F}$  erő keletkezik. Az  $\mathbf{F}$  erő hatása kettős, vízszintes irányú összetevője ( $F_x$ ) gátolja a sárkány előremozdulását (ezt a  $\mathbf{T}$  erő vízszintes irányú  $T_x$  komponense fogja egyensúlyban tartani), függőleges összetevője ( $F_y$ ) pedig emeli a szerkezetet (3. ábra). Ha  $F_y > G + T_y$ , a sárkány emelkedni kezd. A talaj felett néhány méterrel már jóval élénkebb a szél mint a felszín közelében. Kedvező esetben ez már mesterséges ellenszél keltése nélkül is elegendő lehet ahhoz, hogy fenntartsa a sárkányt. Ha a szél túl gyenge ehhez, akkor az eresztőzsinórt tartó X személynek nem elegendő egyszerűen maga felé húzni a zsinógot, hanem kell próbálkoznia azzal, hogy hosszabb zsinógot engedve széllel szemben futva juttassa elegendő magasságba sárkányát. A levezetett erőképletből adódik, hogy az emelő erő döntően függ a vitorla szélirányhoz viszonyított helyzetétől. Ha ez a szög túl nagy ( $\alpha > 35^\circ$ ), a levegő nem tud „belekapaszkodni” a vitorlába, ha a szög túl kicsi ( $\alpha < 35^\circ$ ), az emelőerő kicsi és nem elég a sárkány magasba emeléséhez. Az optimális szög beállítása az egyik legfontosabb feltétele a sikeres sárkányeresztésnek.

### 5. A sárkány repülési magassága

A sárkány mindaddig emelkedik, míg  $F_y > mg + T_y$ . Amíg az eresztőzsinór hossza változatlan a sárkány csak a kötéllhosszal, mint sugárral meghatározott körívben mozoghat (7. ábra). A kantárszárak hossza rögzíti a sárkány helyzetét az eresztőzsinóghoz képest, így ahogy a sárkány egyre magasabbra emelkedik, az  $\alpha$  mind jobban és jobban haladja meg a  $35^\circ$  értéket, ezért a vitorlán egyre kisebb emelőerő keletkezik.



7. ábra

A sárkány tehát addig emelkedik, amíg létrejön az  $F_y$ ,  $G$  és  $T_y$  erők egyensúlya. Nagyobb magasság eléréséhez kicsit lejjebb kell húzni a sárkányt, hogy aztán az eresztőzsinór ráadásával nagyobb sugarú pályára állítsuk. A zsinór hosszának a megnövelésével nő a sárkány súlya (a kötelet is emelni kell) ezért a nagyobb sugarú pályán a sárkány nem emelkedik olyan meredek szögig mint előzőleg a kisebb sugarún. A maximálisan elérhető repülési magasságot a vitorlafelület nagysága, a sárkány súlya és a szél erőssége határozza meg.

### 6. A sárkány farka

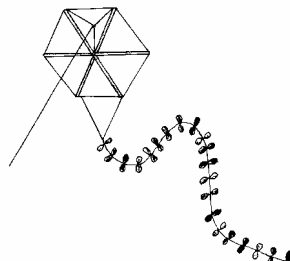
A valódi nem egyenletes, ereje is, iránya is mindig változik. A szélváltozások időről időre megzavarják a sárkány egyensúlyát. A jól megtervezett és gondosan elkészített sárkány azonban nem érzékeny a kisebb zavaró hatásokra, egyensúlyi állapota gyorsan helyreáll. Az egyensúly fenntartásában a síklap alakú papírsárkányoknál döntő szerepe van a sárkány farkának. A levegőben hosszan kigyózó sokszínű fark követi a sárkány mozgását, és ezzel egyensúlyozza azt. Fontos feladata az is, hogy ellenállásával, illetve súlyával a vitorlát mindig széllel szemben tartsa és stabilizálja a sárkány állásszögét.

### 7. A koltói sárkány

Koltó minden erdélyi magyar ember szívében különös helyet foglal el, hisz Petőfi Sándort és gróf Teleki Sándort jutatja eszünkbe. A Lápos menti Teleki kastély környékén tapasztalható tavaszi szél igen-igen alkalmas sárkányeresztésre. A helybeli tanító, Hintalan Béla hatszögű sárkány (8. ábra) készítésére tanítja az itteni gyerekeket. A sárkány vázának az elkészítése úgy történik, hogy 3 egyforma hosszúságú (kb. 1 m) nádszál középpontját cérnával egybekötjük, s a nádszálak kissé bevágott (kb. 5 mm-re) végeibe cérnaszálat feszítünk egyen-

lő oldalú hatszöget képezvén belőle. A hatszöget alkotó háromszögekre különböző színű papírlapokat ragasztunk; így egy tetszetős sokszínű vitorlát nyerünk. A hatszög két szomszédos csúcsából és középpontjából kiinduló három zsinagszál (a csúcsokból kiindulóak 55 cm hosszúak, míg a középpontból kiindulóé 37 cm) egy közös pontba összekötve alkotjuk meg a kantárt.

E közös ponthoz csatlakoztatjuk a hosszú (kb. 30 m) eresztőzsinort. Az előbb említett két csúccsal átellenben elhelyezkedő két csúcsból indul ki a sárkány farka (kb. 2,5 m), amit szintén sokszínű papírdarabkák díszítenek. A sárkányt tovább csinósíthatjuk úgy, hogy a kantárszárak végeinél levő csúcsokhoz sokszínű papírfületeket illesztünk; ezeknek csak a látványosság növelésében van szerepük. Az így elkészített sárkány tündöklő látvány amint magasra emelkedik.



8. ábra

### 8. Nemzetközi sárkányfesztivál

A 2003-as év nyarának kezdetén immár a második nemzetközi sárkányfesztivált rendezték meg Fanø északi-tengeri dán szigeten. A rendezvényen a legkülönfélébb konstrukciójú sárkányok emelkedtek a magasba: képzelet szülte óriási állatok, végtelennek tűnő sárkányláncolatok, óriási méretű zsákalakú légturbinák és a legkorszerűbb technikával ellátott irányítású sárkányok. A sárkányfesztivál, a résztvevők és a nézők számára egyaránt ingyenes; egyetlen célja a játékosság.

#### Irodalom

- 1] Barta Béla – Szakács József: Vitorlázó – és sárkányrepülés, Kriterion könyvkiadó, Bukarest, 1981
- 2] C. Cristescu, G. Oprescu, M. Stavinschi: Cometa Halley, Editura științifică și enciclopedică, București, 1985
- 3] Dr. Farkas Henrik: Ősállatok, Móra Ferenc könyvkiadó, 1978
- 4] Joachim Herrman: Csillagok, Magyar könyvklub, 1997
- 5] Ioan Tudoran: Cartea astronomului amator, Editura albatros, București, 1983
- 6] \*\*\*: Mindennapok fizikája, ELTE TTK Továbbképzési csoportjának kiadványa, Budapest, 1989

Ferenczi János



### Kísérletezzünk

A szénhidrogének tulajdonságainak megismerésére, a tankönyvekben levő szemléltető anyag bővítésére, színesebbé tételére ajánljuk a következő, egyszerűen kivitelezhető kísérleteket:

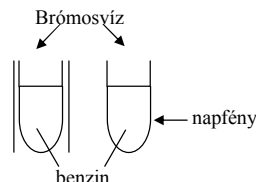
1. Az alkánok reakciókészségének követése:

– Helyettesítési reakció

Szükséges eszközök és anyagok: 2 db. kémcső, alufólia darab, benzin, brómos víz. A kémcsövekbe töltünk kb. 5–5cm<sup>3</sup> benzint (ennek nagy része 2,2,4-trimetilpentánnak tekinthető), majd mindegyik kémcsőbe 2cm<sup>3</sup> brómos vizet, s rázzuk össze óvatosan a kémcsövek tartalmát. Az egyik kémcsőnek azt a részét, ahol a folyadék található, göngyöljük be az alufóliába, a másik kémcsövet helyezük napfényre (pl. a tanterem ablakába), vagy ennek hiányában egy fényforrás elé.

A megfigyelések után vonjuk le a következtetéseket!

A halogénnel történő reakciókészség gyenge. A helyettesítési reakció csak az aktivált halogénmolekulákkal indul el. Az aktiváláshoz szükséges energiát a fény biztosítja.

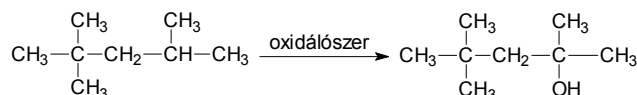
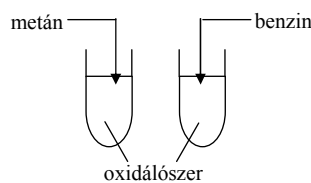


– A kis szénatomszámú alkánok szobahőmérsékleten nem oxidálhatók vizes oldatban oxidáló szerekkel, a hosszú szénláncok könnyebben oxidálódnak.

Szükséges eszközök, anyagok: 2 db. kémcső, gumicső, üvegcső, oxidálószer: kénsavval savanyított, híg KMnO<sub>4</sub>-oldat, metángáz-forrás, benzin.

A kémcsövekbe töltünk kb. 5-10cm<sup>3</sup> oxidálószerrel. Az egyik kémcsőbe helyezük az üvegcsövet, melyet a gumicsővel kössünk a gázforrásra, s gyenge áramba buborékolatassunk rajta metán gázt az oldaton keresztül. (metán hiányában használhatunk az ún. aragáz tartályból is gázkeveréket: propán-bután). A másik kémcsőbe töltünk pár cm<sup>3</sup> benzint. Figyeljük a változásokat és vonjuk le a következtetéseket!

A benzin 2,2,4-trimetilpentán komponensének molekulájában van egy harmadrendű, terciér szénatom. Az ehhez kapcsolódó hidrogén kötése elég gyenge ahhoz, hogy a reakciókörülmények között szakadjon, s a terciér szénatom oxidálódjon:

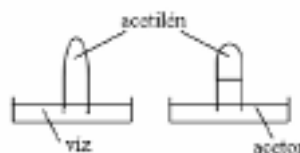


A hosszú szénláncú alkánok könnyebben oxidálódnak. Próbáljátok igazolni sztearint használva alkán forrásként! A kísérlet kivitelezését, a megfigyeléseiteket, a következtetéseket küldjétek be szerkesztőségünkbe, közölni fogjuk őket.

2. Az acetilén oldékonyságának vizsgálata

Szükséges eszközök, anyagok: 2 db. kémcső, 2 db. kristályosító csésze, acetilén-gerjesztő készülék (átlyukasztott aljú kémcső, kis pohár, vatta, átfúrt dugó üvegcsővel), víz, aceton, karbid.

Két kémcsövet töltünk meg acetilénnel, s az ábra szerint állítsuk a két kristályosító csészébe, melyekbe előzőleg betöltöttük az oldószereket. Magyarázzátok az észlelteket!



M. E.

## Katedra

### Fizikai témájú példák aktív oktatási eljárásokra\*

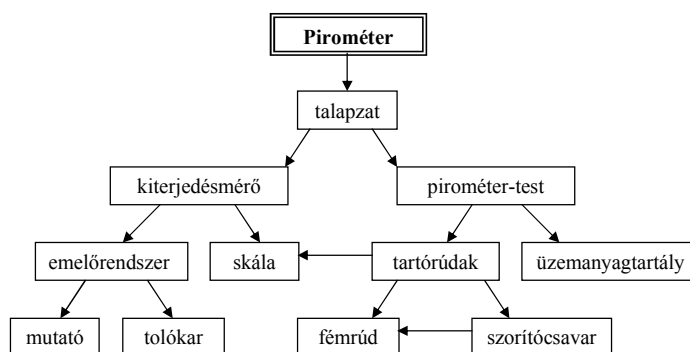
4. rész.

#### 4. Struktúradiagram

A feladat az, hogy a tanulók:

1. Írják rá a diagram nyilaira a megfelelő igéket.
2. Írják le az összeállítást, felállást a struktúradiagram segítségével.

Szójegyzék: *beszorítjuk, töltünk, meggyújtjuk, leolvassuk*



#### 5. Képregény

Természetes („konyhai”) szóhasználat

Feldaraboljuk a főzőcsokoládét, üstbe tesszük, majd láng fölött megolvasztjuk, hogy jobban folyjék, és krémet lehessen keverni belőle.

A tűzhelyen edényben vizet forralunk, majd rátesszük az üstöt. Ha fővő vízgőz fölé helyezzük az üstöt, akkor az edény nem hevül túl, és a krém nem ég oda.

A krémet forró vízbe mártott késsel visszük fel a tortára, így a glazúr könnyen leválik és nem ragad a késhez.

A torta glazúrozása



Tudományos (szakmai) szóhasználat  
A csoki a hőmérséklet növekedésével meglágyul, a viszkozitása csökken.

A forrásban levő víz gőzeinek hőmérséklete 100°C-nál nem magasabb, így nem ég oda a krém.

A fémek hővezető képessége nagy, így a kés rövid idő alatt képes felvenni a hőt, a krém meglágyul és könnyen leválik a késről.

#### 6. Szórejtvény

A kockákba 18 tudós, gondolkodó nevét rejtettük el.

1. Az eljárások leírását a Fírka 2002/2003 évfolyama számaiban közzöltük.

B	A	L	I	E	R	A	S	M	U	S	E	R	N	O	D
O	N	D	A	T	J	O	H	N	L	O	C	K	E	S	I
Y	E	S	Z	O	K	R	A	T	E	S	Z	D	I	A	R
L	W	A	T	T	R	O	U	S	S	E	A	U	M	R	A
E	T	E	S	L	A	D	E	S	C	A	R	T	E	S	C
N	O	A	R	I	S	Z	T	O	T	E	L	E	S	Z	T
O	N	O	B	E	L	I	K	A	N	T	E	S	I	O	N
R	A	D	I	S	Z	E	N	T	T	A	M	A	S	H	E
U	F	F	R	A	N	C	I	S	B	A	C	O	N	M	R
S	T	O	C	K	E	S	H	O	B	B	E	S	T	I	N

További rejtvényeket – többek között - a Fírka 1998-1999. számaiban találhatunk.

### 7. Folyamatdiagram

A mellékelt folyamatdiagram a Fírka idei 1-es számában bemutatott kalorimetriás mérés lépéseit ábrázolja.



### Könyvészet

- 1] Leisen, J. (Szerk. 1999): *Methoden-Handbuch DFU*. Varus Verlag, Bonn
- 2] Kovács Zoltán (2002/2003) *Aktív és csoportos oktatási eljárások*. Fírka (1, 2, 3, 4, 5, 6)
- 3] Peterßen, W.H. (2001.): *Kleines Methoden-Lexikon*. Oldenbourg, Schulverlag. München
- 4] Kovács Zoltán, Rend Erzsébet (2002, kézirat) *Aktív oktatási módszerek példatára*

Kovács Zoltán

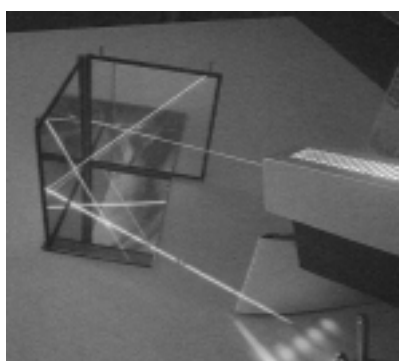
## A fényvisszaverődés és a fénytörés törvénye vektorosan

III. rész

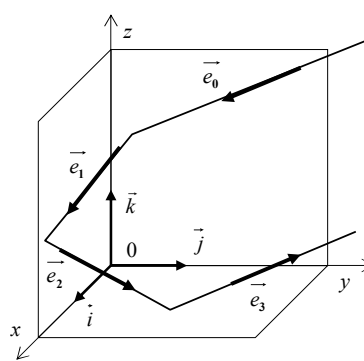
### 3. Feladatok megoldásokkal

a.) *A fényvisszavető saroktükrök*

**Feladat:** Bizonyítsuk be, hogy miután egy fénysugár rendre visszaverődik három – egymásra kölcsönösen merőleges – síktükroren, a beeső sugárral ellentétes irányra tesz szert. Lásd a 3. ábrát!



3. ábra



4. ábra

Helyezzük a „tükrösarokba” az Oxyz derékszögű koordináta rendszert (4. ábra)! Verődjön vissza a fénysugár előbb az yOz, majd tovább az xOz, és végül az xOy síkok tükréről. Nyilvánvaló, hogy ezek normális-egységvektorai az  $\vec{i}$ , a  $\vec{j}$ , és a  $\vec{k}$ .

**Megoldások:**

► *Megoldás a fényvisszaverődés törvényének explicit-vektoros alakjával*

Követve a fénysugár útját, alkalmazzuk háromszor, egymás után, a visszaverődés (6) törvényét:

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \vec{e}_0 - 2(\vec{e}_0 \cdot \vec{i})\vec{i} \\ \vec{e}_2 &= \vec{e}_1 - 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{j})\vec{j} \\ \vec{e}_3 &= \vec{e}_2 - 2(\vec{e}_2 \cdot \vec{k})\vec{k}\end{aligned}$$

Helyettesítsük az  $\vec{e}_2$ -t az  $\vec{e}_3$ -ba, majd ebbe az  $\vec{e}_1$  kifejezését, és vegyük figyelembe, hogy a skaláris vektorszorzat disztributív az összeadásra nézve, valamint azt is, hogy az  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ortogonalitása miatt:  $(\vec{i} \cdot \vec{j}) = (\vec{j} \cdot \vec{k}) = (\vec{k} \cdot \vec{i}) = 0$ .

$$\begin{aligned}\vec{e}_3 &= \vec{e}_1 - 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{j})\vec{j} - 2[(\vec{e}_1 - 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{j})\vec{j}) \cdot \vec{k}]\vec{k} = \\ &= \vec{e}_1 - 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{j})\vec{j} - 2(\vec{e}_1 \cdot \vec{k})\vec{k} + 4(\vec{e}_1 \cdot \vec{j})(\vec{j} \cdot \vec{k})\vec{k} = \\ &= \vec{e}_0 - 2(\vec{e}_0 \cdot \vec{i})\vec{i} - 2[(\vec{e}_0 \cdot \vec{j}) - 2(\vec{e}_0 \cdot \vec{i})(\vec{i} \cdot \vec{j})]\vec{j} - 2[(\vec{e}_0 \cdot \vec{k}) - 2(\vec{e}_0 \cdot \vec{i})(\vec{i} \cdot \vec{k})]\vec{k} = \\ &= \vec{e}_0 - 2(e_{0x}\vec{i} + e_{0y}\vec{j} + e_{0z}\vec{k}) = \vec{e}_0 - 2\vec{e}_0 = -\vec{e}_0.\end{aligned}$$

Tehát, mivel  $\vec{e}_3 = -\vec{e}_0$ , a saroktükrök a beeső fénysugarat, helyzetétől függetlenül, mindig visszafordítja!

► *Megoldás a fényvisszaverődés törvényének implicit-vektoros alakjával*

A beeső fénysugár mindhárom tükrön visszaverődik, ezért, sorban, mindegyikre felírjuk a fényvisszaverődés (8a) és (8b) egyenletrendszerét:

yOz tükör	xOz tükör	xOy tükör
$(\vec{e}_1 \times \vec{i}) = (\vec{e}_0 \times \vec{i})$	$(\vec{e}_2 \times \vec{j}) = (\vec{e}_1 \times \vec{j})$	$(\vec{e}_3 \times \vec{k}) = (\vec{e}_2 \times \vec{k})$
$(\vec{e}_1 \cdot \vec{i}) = -(\vec{e}_0 \cdot \vec{i})$	$(\vec{e}_2 \cdot \vec{j}) = -(\vec{e}_1 \cdot \vec{j})$	$(\vec{e}_3 \cdot \vec{k}) = -(\vec{e}_2 \cdot \vec{k})$

Mivel az  $\vec{e}$  vektorok  $e = e_x\vec{i} + e_y\vec{j} + e_z\vec{k}$  alakúak, mind a hat vektoregyenlet felírható ezek skalárkomponenseivel. Az yOz tükör egyenletei:

Az első  $(\vec{e}_1 \times \vec{i}) = (\vec{e}_0 \times \vec{i})$  determinánssal felírva,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ e_{0x} & e_{0y} & e_{0z} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \text{kifejtve}$$

$$\begin{vmatrix} e_{1y} & e_{1z} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1z} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = \begin{vmatrix} e_{0y} & e_{0z} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} e_{0x} & e_{0z} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} e_{0x} & e_{0y} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$e_{1z}\vec{j} - e_{1y}\vec{k} = e_{0z}\vec{j} - e_{0y}\vec{k} \Rightarrow e_{1y} = e_{0y} \quad \text{és} \quad e_{1z} = e_{0z}.$$

A második  $(\vec{e}_1 \cdot \vec{i}) = -(\vec{e}_0 \cdot \vec{i})$ , kifejtve

$$e_{1x} \cdot 1 + e_{1y} \cdot 0 + e_{1z} \cdot 0 = -(e_{0x} \cdot 1 + e_{0y} \cdot 0 + e_{0z} \cdot 0) \Rightarrow e_{1x} = -e_{0x}$$

Tehát az első tükrözés eredménye:

$$e_{1x} = -e_{0x}, \quad e_{1y} = e_{0y}, \quad e_{1z} = e_{0z}$$

Teljesen hasonlóan kapjuk az ezutáni visszaverődéseknél:

$$e_{2x} = e_{1x}, \quad e_{2y} = -e_{1y}, \quad e_{2z} = e_{1z},$$

$$e_{3x} = e_{2x}, \quad e_{3y} = e_{2y}, \quad e_{3z} = -e_{2z}.$$

Sorra felhasználjuk ezeket az összefüggéseket:

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= e_{3x}\vec{i} + e_{3y}\vec{j} + e_{3z}\vec{k} = e_{2x}\vec{i} + e_{2y}\vec{j} - e_{2z}\vec{k} = e_{1x}\vec{i} - e_{1y}\vec{j} - e_{1z}\vec{k} = \\ &= -e_{0x}\vec{i} - e_{0y}\vec{j} - e_{0z}\vec{k} = -\left(e_{0x}\vec{i} + e_{0y}\vec{j} + e_{0z}\vec{k}\right) = -\vec{e}_0. \end{aligned}$$

Tehát megint:  $\vec{e}_3 = -\vec{e}_0$

(folytatjuk)  
Bíró Tibor

### Hibaigazítás

A fényvisszaverődés és a fénytörés törvénye vektorosan (FIRKA 2003-2004/4, 159. oldal 10-12. sor) helyesen: Tehát a fénytörés törvényét vektorosan, szintén egy egyenletrendszer adja meg:

$$n_2 (\vec{e}_2 \times \vec{N}) = n_1 (\vec{e}_0 \times \vec{N}) \quad (9a)$$

$$n_2 (\vec{e}_2 \cdot \vec{N}) = -n_1 \sqrt{(n_2/n_1)^2 - 1 + (\vec{e}_0 \cdot \vec{N})^2} \quad (9b)$$



## Alfa-fizikusok versenye

2001-2002

### VIII. osztály – III. forduló

1. Gondolkozz és válaszolj!

(6 pont)

- Miért nem látunk messzire a ködben?
- Miért zöld színű a falevél?
- Miért lesz huzat a lakásban, ha két szemközti ablakot kinyitunk?
- Miért tud a tengeralattjáró a víz alatt közlekedni?

2. Kísérletezz!

(3 pont)

Eszközök: plexi tálka, sík- és pontelektrodok, vezetékek, műanyag rúd, szörme, olaj, búzadara. Feladat: Szereld a plexi tálka elektrodtartóira az elektrodokat és önts a tálkába 2 mm rétegvastagságban olajat! Szórj az olaj tetejére egyenletes eloszlásban búzadarát! A megdörzsölt műanyag rúd segítségével adj töltést az elektrodoknak! Figyeld meg, hogyan helyezkednek el a búzadara szemcsék a töltéssel rendelkező elektrodok között! Rajzold le!

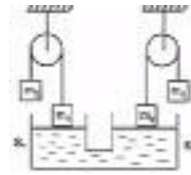


Tapasztalat: .....

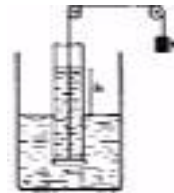
Magyarázat: .....

3. Egy szoba, melynek méretei 5 m x 4 m x 2 m, fa fűtéses. Mennyi fát kell elégetni, ha levegőjét 15 C°-ról 25 C°-ra melegítjük 12,54 MJ/kg fűtőértékű fával, (a levegő sűrűsége 1,3 kg/m<sup>3</sup> és fajhője 1000 J/kg-fok)? (3 pont)

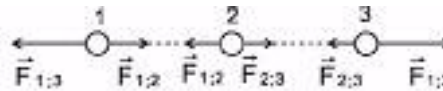
4. A rajzon látható rendszer egyensúlyban van. Mekkora az S<sub>1</sub> és S<sub>2</sub> aránya, ha m<sub>1</sub>=400g; m<sub>2</sub>=600g; m<sub>3</sub>=100g; m<sub>4</sub>=200g? (5 pont)



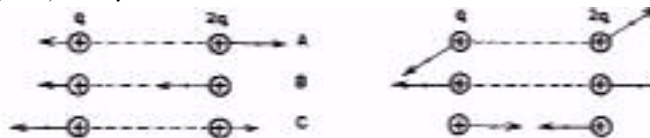
5. Mekkora kell, hogy legyen a h., folyadékoszlop magassága a hengerben ahhoz, hogy a rajzon látható rendszerben a D korong leváljon a henger aljáról? (m = 10 g; S = 2 m<sup>2</sup>) (4 pont)



6. Milyen töltések találhatóak a gömbökön és miért? (4 pont)



7. Melyik rajz a helyes? (5 pont)



8. Két elektromosan töltött test légüres térben 30 cm távolságban 4·10<sup>-5</sup> N nagyságú erővel taszítja egymást. Mekkora lesz a taszító erő, ha a köztük levő távolságot duplájára növeljük? (5 pont)

9. Rejtvény: Vigyázat, rejtvény áram alatt! (8 pont)

Húzd ki a betűhalmazból (a lehetséges nyolc irányban) az alább felsorolt szavakat. A kihúzatlanul maradt betűk egy fizikus nevét rejtik. Ki ő?

- |            |           |
|------------|-----------|
| AMPER      | GENERÁTOR |
| ÁLLÁS      | KAPCSOLÁS |
| ÁRAM       | MÉRÉS     |
| ÁRAMKÖR    | MÉRŐ      |
| ELKEN      | NEGATÍV   |
| ELLENÁLLÁS | ONNAN     |
| EREDŐ      | SOROS     |
| ÉRINTÉS    | VOLTMÉRŐ  |
| FESZÜLTSG  | ZÁRT      |
| FOGYASZTÓ  |           |



A rejtvényt készítette: Szűcs Domokos tanár

10. Mi a borostyánkő? Milyen fizikai jelenséggel kapcsolatos? (6 pont)

(6 pont)

A kérdéseket összeállította a verseny szervezője: Balogh Deák Anikó tanárnő,  
Mikes Kelemen Líceum, Sepsiszentgyörgy

## Érdekes informatika feladatok

### IV. rész

#### A prímszámok előállításá

A *prímszámok* vagy *törzsszámok* igencsak nagy jelentőséggel bírtak a matematika történetében. A természetes számok vagy az egész számok *atomjainak* is nevezzük őket. A prímszámok fogalmát minden valószínűség szerint már az egyiptomiak és a mezopotámiaiak is ismerték, de tudásunk szerint első komoly tanulmányozói a püthagoreusok voltak, és pontos meghatározást e fogalomra csak Eukleidésznél (Kr. e. 300 körül) találunk.

A prímszám fogalma szorosan összefügg az *oszthatósággal*. Ha  $a = b \cdot c$ , akkor  $b$  és  $c$  az  $a$  szám *valódi osztói*. Minden szám felírható mint 1-nek és önmagának a szorzata, ezért az 1 és a szám maga az adott szám *triviális osztói*.

Így a prímszám fogalmára több definíció is adható:

- *Azokat a természetes számokat, amelyeknek csak triviális osztói vannak, prímszámoknak nevezzük.*
- *Azokat a természetes számokat, amelyeknek pontosan két osztója van (1 és önmaga), prímszámoknak nevezzük.*
- *Azokat a természetes számokat, amelyek nem bonthatók fel nála kisebb természetes számok szorzatára, prímszámoknak nevezzük.*

Az 1 és a 0 nem prímszámok, mert az 1-nek egy darab, a 0-nak pedig végtelen sok osztója van. A 2 a legkisebb prímszám, egyben ő az egyetlen páros prímszám. Prímszámok: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 31 stb.

A prímszámok a természetes számok „atomjai”, vagyis minden természetes vagy prímszám, vagy felbontható prímszámok szorzatára – a számelmélet alaptétele szerint. Azok a számok, amelyek nem prímszámok, összetett számok. Kivételt képez a 0 és az 1, ezek nem prímszámok, de összetett számok sem.

Ha pontosan akarjuk megfogalmazni a definíciót, akkor ezt mondhatjuk: *Összetett számoknak nevezzük azokat a természetes számokat, amelyeknek 2-nél több, de véges számú osztója van.*

*Bármely összetett szám, a tényezők sorrendjétől eltekintve, egyértelműen felírható prímszámok szorzataként (prímtényező felírás).*

Vagyis: ha  $a$  összetett szám, akkor  $a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$ , ahol  $p_1, p_2, \dots, p_n$  prímszámok,  $k_1, k_2, \dots, k_n$  pedig 0-nál nagyobb hatványkitevők.

Így könnyen kiszámítható egy szám osztóinak is a száma, ez egyenlő  $(k_1 + 1) \cdot (k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_n + 1)$ .

Két vagy több természetes szám *relatív prím*, ha legnagyobb közös osztójuk az 1, vagyis nincs közös prímtényezőjük.

Prímszámokkal kapcsolatban a következő kérdések foglalkoztatják ma is a matematikusokat:

- *prímszámok előállításá*
- *egy szám prímszám-e vagy sem?*
- *prímszámok típusai*
- *minél nagyobb prímszámot keresni*
- *prímszámok eloszlása*

Prímszámok előállítására ma is gyakran használt módszer az úgynevezett Eratoszthenész-szita. Eratoszthenész (Kr. e. 276.-197.) görög matematikus, az észak-

afrikai Kirénében született. Sok évet töltött Athénben, majd Ptolemaiosz egyiptomi király meghívta Alexandriába fia nevelőjének és a könyvtár igazgatójának. Foglalkozott grammatikával és filozófiával, csillagászattal és fizikával, de költéssel is. Ő végezte a Föld felületén az első fokmérést, és az akkori mérési módszerek fejlettségéhez képest elég pontosan kiszámította az egyenlítő hosszát. Idős korában megvakult és önkéntes éhhalált halt.

A nevéhez fűződő módszer lényege az, hogy az 1-nél nagyobb természetes számok közül „kiszitáljuk” az összetett számokat, így a prímszámok maradnak meg.

Az algoritmus egyszerű:

1. Felírjuk a természetes számokat 2-től  $n$ -ig.
2. Bekarikázzuk az első számot, a 2-est, ezután kihúzzuk az összes többszörösét.
3. Megkeressük az utolsó bekarikázott számnál nagyobb első ki nem húzott számot, bekarikázzuk, majd  $n$ -ig kihúzzuk az összes többszörösét.
4. A 3.as lépést addig folytatjuk, ameddig minden szám be lesz karikázva vagy ki lesz húzva.
5. A kihúzott számok az összetett számok, a bekarikázott számok a prímszámok.



A fenti algoritmust a következőképpen lehet javítani:

- Ha  $n$ -ig keressük a prímszámokat, a ciklus elegendő ha csak  $\text{round}(\sqrt{n})$ -ig megy.
- Amit már egyszer kihúztunk, még egyszer nem kell kihúzzuk.
- A számok felírásából már eleve elhagyhatjuk a 2-nél nagyobb páros számokat, négyzetszámokat stb. – így a szita sokkal kisebb lesz.

Ha azt akarjuk megmondani egy számról, hogy prímszám-e vagy sem, akkor úgy járhatunk el, hogy megkeressük a szám osztóit, és ha 1-en és önmagán kívül van más osztója is, akkor nem prímszám (kivételet 0 és 1). Természetesen itt is elegendő ha csak  $\text{round}(\sqrt{n})$ -ig vizsgáljuk meg az osztókat.

A fent említett algoritmusok azonban nagy prímek esetében nagyon hosszú ideig futnak. Ha gyors prímtesztet akarunk, akkor más matematikai meglátásokat is segítségül kell hívni.

Például a *kis-Fermat tétel*. A második, vagy kis-Fermat tétel a következőt mondja ki: Ha  $p$  prímszám,  $a$  pedig egy olyan tetszőleges egész szám, amely nem osztható  $p$ -vel, akkor az  $a^{p-1}$ -t  $p$ -vel osztva 1-t ad maradékul. Ezen az eredményen alapszik az úgynevezett AKS-algoritmus, amelyet Indiában dolgoztak ki 2002 nyarán, és amelyik polinomiális időben meg tudja mondani egy számról, hogy prím-e vagy sem. Sajnos, e páratlanul szép elméleti eredményt nagyon körülményes a gyakorlatban leprogramozni, a program amennyit nyer a prím-teszten, kb. annyit veszít a más adatstruktúrák és algoritmusok nagysága és lassúsága miatt.

Sok matematikus próbált a prímszámok előállítására képletet találni, de ezek a kísérletek nem jártak gyakorlati sikerrel, elméletileg viszont prímszám típusokat, osztályokat tudtak felállítani.

### Milyen típusú prímszámok léteznek?

Euler a következő képlettel kísérletezett:  $p(n) = n^2 + n + 41$ . Ez a képlet prímszámokat ad  $n = 1$ -től  $n = 39$ -ig, viszont  $n = 40$  illetve  $n = 41$  esetén a kapott szám már összetett.

A páratlan prímszámok két osztályba sorolhatók:

- $4n + 1$  alakú, ahol  $n$  természetes szám. Pl.: 5, 13, 17, stb.
- $4n - 1$  alakú prímek, ahol  $n$  természetes szám. Pl.: 3, 7, 11, stb.

Viszont az is igaz, hogy nem minden  $n$ -re adnak a fenti képletek prímszámokat.

Fermat tétele szerint (a tétel bizonyítását Fermat nem közölte, jóval később Euler bizonyította be még egyszer) a  $4n + 1$  alakú prímek előállíthatók két négyzetszám összegeként (Pl.  $5 = 1^2 + 2^2$ ,  $13 = 2^2 + 3^2$ ,  $17 = 1^2 + 4^2$ ), a  $4n - 1$  alakúak viszont sohasem állíthatók elő két négyzetszám összegeként.

Hasonlóan a 3-nál nagyobb prímszámok:

- $6n + 1$  vagy
- $6n - 1$  alakúak, ahol  $n$  természetes szám,

de itt is az ilyen alakú természetes számok között vannak összetettek is (Pl.  $49 = 6 \cdot 8 + 1$ ,  $35 = 6 \cdot 6 - 1$ ).

Általában a prímszámok  $a \cdot n + b$  alakúak, ahol  $n$  egész szám,  $a$  és  $b$  pedig relatív prímek. Ha  $n$  végigfut a természetes számokon, akkor ezek a számok adott  $a$  és  $b$  esetén számtani sorozatot alkotnak. Ebben az esetben is a számtani sorozat tagjai között találunk összetett számokat is.

Nem ad mindig prímszámot az  $n^2 + 1$  képlet sem.

*Fermat-féle prímeknek* nevezzük a  $2^{2^n} + 1$  alakú prímszámokat, viszont nem minden prímszám ilyen alakú és ez a képlet sem eredményez mindig prímszámokat. Fermat csak az első öt ilyen prímszámot számította ki, Euler viszont kimutatta, hogy a hatodik ( $4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417$ ) már nem prímszám. Gauss alig 19 évesen egy érdekes geometriai összefüggést bizonyított be. E szerint körzővel és vonalzóval csak azok a páratlan oldalú szabályos  $n$ -oldalú sokszögek szerkeszthetők meg, amelyekre  $n$  Fermat-féle prím, vagy különböző Fermat-féle prímek szorzatával egyenlő.

*Mersenne-féle prímeknek* nevezzük a  $2^p - 1$  alakú prímszámokat, ahol  $p$  prímszám. Mersenne (1588-1648) francia matematikus Descartes osztálytársa volt és a prímszámok szerelmese. Eddig mindössze 38 darab Mersenne-féle prím ismert, és a talált legnagyobb prímszámok mind ilyen alakúak. Sajnos a Mersenne képlet szerint előállítható számok között is nagyon sok összetett van, és nem mindegyik prímszám írható fel ilyen alakban.

A sok próbálkozás dacára most már jól látjuk, hogy a prímszámok előállításához szükséges általános képlet vagy nem létezik, vagy felfedezése még várat magára!

Eukleidész már bebizonyította azt is, hogy *a prímszámok sorozata végtelen*. A tétel bizonyítása nagyon egyszerű. Tegyük fel, hogy véges számú prímszám van:  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , de ebben az esetben a  $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$  természetes szám nem osztható a  $p_1, p_2, \dots, p_n$  prímek egyikével sem, hanem 1 maradékot adna. Ez viszont ellentmond a számelmélet alaptételének.

A kezdetektől fogva a matematikusok között heves versengés alakult ki, hogy ki talál minél nagyobb prímszámot. A számítógépek megjelenése csak fokozta ezt a versenyt, hisz segítségével nagyon nagy számokról meg lehet állapítani, hogy prímek-e vagy sem.

*A legkisebb prímszám a 2, de vajon melyik az eddig ismert legnagyobb prím?*

Az ókorban csak kevés prímszámot ismertek. Nagyon nagy számokról megállapítani, hogy prím-e jóval meghaladta képességüket. Euler 1750-ben megállapította, hogy  $2^{31} - 1$  prímszám. Jó száz éven keresztül ez volt a legnagyobb ismert prímszám: 2 147 483 647. 1876-ban Lucas bebizonyította, hogy  $2^{127} - 1$  prímszám: 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727.

A számítógépek megjelenésével rohamosan kerültek elő a következő nagy prímek is:  $2^{521} - 1$ ,  $2^{607} - 1$ ,  $2^{1279} - 1$ ,  $2^{2203} - 1$ ,  $2^{2281} - 1$ ,  $2^{3217} - 1$ ,  $2^{4253} - 1$ ,  $2^{4423} - 1$ ,  $2^{9941} - 1$ ,  $2^{11231} - 1$ , amelyet az Illinois-i Egyetem számítógépén számítottak ki.

1991. előtt a legnagyobb ismert prímszám:  $2^{216\,091} - 1$  volt, amelyet David Slowinski talált egy Cray X-MP szuperszámítógép segítségével.

1998. január 27-én Roland Clarkson floridai programozó George Woltman számítógépes programjával talált egy ennél nagyobb, 909 526 számjegyű prímszámot.

1999-ben ez a rekord is megdőlt, Nayan Hajratwala 2 098 960 számjegyű Mersenne-féle prímet talált. A program egy Pentium II 350 MHz-es számítógépen futott 111 napig. A prímszám:  $2^{6\,972\,593} - 1$ .

A következő prímszámot, a  $2^{13\,466\,917} - 1$ -et, 2001-ben találta meg a 20 éves kanadai Michael Cameron egy több résztvevős internetes prímszámkereső projekt keretében (*Nagy Internetes Mersenne-féle Prímkutatás* [GIMPS]). Ez a szám 4 053 946 számjegyet tartalmaz, és egy embernek három hétig kellene egyfolytában írnia, hogy a végére érjen. Cameron egy egyszerű otthoni számítógépet használt, amely 45 napig futtatta a programot.

Két év múlva, tavaly, 2003-ban megdőlt ez a rekord is. A következő eddigi legnagyobb prímszámot,  $2^{20\,996\,011} - 1$ -et, Michael Shafernek, a michigani állami egyetem 26 éves végzős vegyészmérnök hallgatójának sikerült megtalálnia. Ez a prímszám 6 320 430 számjegyből áll, több mint 2 000 000 számjeggyel haladja meg az előzőleg megtalált prímszámot. A keresőprogram az egyetem 2 GHz-es Pentium 4-es számítógépén futott 19 napig.

A GIMPS projekt mintegy 211 000 számítógépet használ, ezek hálózatba vannak kötve és ugyanaz a prímszámkereső program fut rajtuk egyidejűleg. A projektben mintegy 60 000 önkéntes, diák, iskolás, egyetemista, kutató, tanár és cég alkalmazott vesz részt. Láthattuk, hogy a résztvevők csupán két év eltelté után újabb prímet találtak, ez egyetlen számítógépen 25 ezer évbe telt volna.

A versenynek téje is van: az első tízmillió számjegyből álló prím megtalálóját az amerikai *Electronic Frontier Foundation* 100 000 dollárral jutalmazza.

Végül szóljunk érdekességképpen egy pár szót a prímszámok eloszlásáról is. Mint már említettük, a prímszámok sorozata végtelen. Korán felvetődött az a kérdés is, hogy a prímszámok miként oszlanak el a természetes számok között. Láthattuk, hogy 10-ig 4 darab, 100-ig 25 darab, 1000-ig 168 darab, 10 000-ig viszont 1239 darab prímszám van. Ha Eratoszthenész szitáját vizsgáljuk, akkor azt vesszük észre, hogy a szita elején sokkal több prímszám van. Tehát minél nagyobb számokból álló intervallumban keresünk, annál kevesebb számú prímet találunk.

Gauss már 15 éves korában megsejtette azt, hogy a prímszámok száma fordítottan arányos a számok logaritmusával, de igazolni nem tudta sejtését.

A prímszámok gyakoriságával foglalkozott Legendre és Csebisev is. Csebisev (1821-1894) orosz matematikus bebizonyította Bertrand (1822-1900) francia matematikus sejtését, azt hogy minden  $n$  természetes számra  $n$  és  $2n$  között létezik prímszám.

Gauss sejtését csak 1896-ban sikerült igazolni Poussin belga és Hadamard francia matematikusoknak.

Ma sem bizonyított sejtés, hogy két négyzetszám között mindig van prímszám, viszont bizonyított az, hogy a prímszámok között tetszőleges hézagok vannak. Például *ikerprímeknek* nevezzük azokat a prímszám-párokat, amelyeknek különbsége 2. Pl. 3 és 5, 11 és 13, 5 971 847 és 5 971 849. Úgy tűnik, hogy végtelen sok ikerprím van, de ezt sem sikerült még a mai napig sem bizonyítani. A prímszámok még egy jó ideig megmaradnak tehát matematikai és informatikai kuriózumoknak!

Kovács Lehel István

## Kémia

**K. 427.** 1L térfogatú 3,75 mólnyi levegőt tartalmazó acélreaktorba 19,0g széndiszulfidot fecskendeznek, majd elektromos szikrával begyűjtik az elegyet. Az égési reakció kiteljesedése után az edényt 25°C hőmérsékletre hűtik. Állapítsuk meg a nyomást a reaktorban, s az anyagkeverék tömegszázalékos összetételét, ha a reakció előtt a levegő 20 térfogat% oxigént és 80 térfogat% nitrogént tartalmazott!

**K. 428.** Kénsavas közegben 1L térfogatú kálium-klorát oldat fogyott kálium-kloriddal való reakció során, miközben 672cm<sup>3</sup> klór gáz fejlődött. Határozzuk meg az elhasznált kálium-klorát oldat töménységét molaritásban és normalitásban kifejezve!

**K. 429.** Kristályos kálium-karbonátból 0,15g semlegesítésére 20,4cm<sup>3</sup> 0,1M-os sósav szükséges. Határozzuk meg ennek a kristályos vegyületnek a kémiai képletét. Számítsuk ki, mekkora a tömegszázalékos víztartalma!

**K. 430.** 5A erősségű áram haladt át 18 percig 100g 10%-os réz-szulfát oldaton. Határozzuk meg az elektrolízis megszakításakor az elektrolyt összetételét 100%-os áramkihasználást feltételezve. Milyen mértékű volt a réz-szulfát bomlása? Mekkora a termékek tömege?

**K. 431.** Mennyi ideig kéne híg nátrium-klorid oldatot elektrolizálnunk 5A erősségű árammal 84%-os áramkihasználás esetén, ha 500cm<sup>3</sup> normálállapotú klór-gázra volna szükségünk?

**K. 432.** Egy 5L térfogatú edénybe 1L 0,1M-os KMnO<sub>4</sub> oldattal a stöchiometriчески szükséges 30%-os oxigén víziből oxigént fejlesztenek. A reakció beindulása előtt az edényt lezárták. A reakcióterben mekkora az oxigén parciális nyomása, ha a levegőt 20t<sup>o</sup>%-os gázelegynek tekintjük?

**K. 433.** 1g telített észterhez 25mL 1M-os töménységű KOH-oldatot adagoltak a teljes hidrolízis biztosítására. A reakció kiteljesedése után a lúg felesleget 15,2mL 1M-os sósav-oldattal semlegesítették. Állapítsuk meg a vizsgált észter molekulaképletét és lehetséges szerkezetét?

**K. 434.** Mekkora a moláros töménysége annak az acetonos acetilén oldatnak, amelyből 25 cm<sup>3</sup> térfogatú minta a fölöslegben adagolt brómból 7,4 g-ot kötött meg?

**K. 435.** Egy szénhidrogén elemzésekor 80tömeg% szenet kaptak. 500 cm<sup>3</sup> standard állapotú mintájának tömege 612,25 mg. Határozzuk meg a vegyület molekulaképletét, szerkezetét.

## Fizika

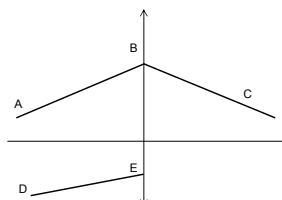
**F. 301.** Egy testet függőlegesen felfelé hajítunk. Határozzuk meg milyen legnagyobb magasságra emelkedhet a test, ha 3 másodpercet tartózkodik a levegőben.

**F. 302.**  $v_1$  mol ideális gázt tartalmazó  $V_1$  térfogatú zárt ballon  $v_2$  mol ideális gázt tartalmazó zárt edényben található. A gázokat úgy melegítjük, hogy hőmérsékleteik megegyezzen.

nek. Az edények kitágulása elhanyagolható. A ballon falai  $p_b$  nyomásnál nagyobb nyomásnak nem tudnak ellenállni. Feltételezve, hogy a külső edény falai bármilyen nyomást kibírnak, határozzuk meg azt a  $T$  hőmérsékletet, amelynél a ballon felrobban.

**F. 303.**  $R_1$  ellenállást párhuzamosan, majd sorosan kötünk egy olyan nemlineáris áramkört U állandó feszültséggel táplálva, határozzuk meg a főáramkörbeni áramerősséget mindkét esetben.

**F. 304.** Az ábrán egy vékony lencse helyzete látható és az ABC sugármenet. Szerkesszük meg a DE tárgyterti sugár képtéri megfelelőjét.



**F. 305.** Határozzuk meg, hány-szorosára növekszik meg egy H atom elektronja pályájának sugara, ha az alapállapotban található atom egy 12,09 eV energiájú fotont nyel el.

## Megoldott feladatok

**Kémia** (Firka 4/2003-2004)

**K. 421.**

Amennyiben  $C_{old} = 10 \text{ mol/dm}^3$ , akkor 1L oldatban 10.63g  $\text{HNO}_3$  van feloldva.

$\rho = m / V$  ahonnan  $m = \rho \cdot V$ , akkor 1L oldat tömege  $1,3 \cdot 10^3 \text{ g}$

1300g old. ... 630g  $\text{HNO}_3$

100g ....  $x = 48,46\text{g}$  ezért  $C\% = 48,46$

**K. 422.**

A feladat megoldható, ha feltételezzük, hogy az oldat készítésének körülményei között a víz sűrűsége  $1 \text{ g/cm}^3$

100g old. ... 35,5g HCl  $M_{\text{HCl}} = 36,5 \text{ g/mol}$   $v = 565,9 / 36,5 = 15,5 \text{ mol}$

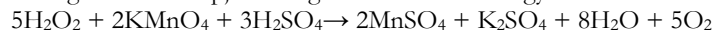
(1000+m) ... mg HCl = 565,9g

Standard állapot:  $T = 298^\circ\text{C}$ ,  $p = 1 \text{ atm}$  1mol gáz térfogata ilyen állapotban  $\approx 24,5 \text{ L}$

Akkor  $V_{\text{HCl}} = 15,5 \cdot 24,5 \text{ L}$

**K. 423.**

A meghatározás alapjául szolgáló kémiai reakció egyenlete:



1000cm<sup>3</sup>  $\text{KMnO}_4$  old. ... 0,01mol  $\text{KMnO}_4$

24,5cm<sup>3</sup> .....  $x = 2,45 \cdot 10^{-4} \text{ mol KMnO}_4$

A titrálásra használt oldat térfogata (25cm<sup>3</sup>) a minta mennyiségét (1,2g) tartalmazó oldat térfogatának (250cm<sup>3</sup>) az egy tizede. Ezért az oxigénes víz minta  $2,45 \cdot 10^{-3} \text{ mol KMnO}_4$ -al egyenértékű  $\text{H}_2\text{O}_2$  mennyiséget tartalmazott:

2mol  $\text{KMnO}_4$  ..... 5mol  $\text{H}_2\text{O}_2$  1,2g oxigénes víz...  $6,125 \cdot 34 \cdot 10^{-3} \text{ g H}_2\text{O}_2$

$2,4 \cdot 10^{-3}$  .....  $x = 6,125 \cdot 10^{-3}$  100g ...  $x = 17,35$

**K. 424.**

$v_{\text{CO}_2} = 4,4/44 = 0,1 \text{ mol}$  100L elegy ..... 30,0L  $\text{CO}_2$

$0,1 \cdot 24,5 + V$  .....  $0,1 \cdot 24,5$  ahonnan  $V = 5,72 \text{ L}$

**K. 425.**

Legyen az alkán  $C_nH_{2n+2}$ , anyagmennyisége  $v_1$ , moláros tömege  $M_1$ , az alkén  $C_mH_{2m}$ , az anyagmennyisége  $v_2$ , moláros tömege  $M_2$

$$n + m = 7 \quad M_1 = 14n + 2 \quad M_2 = 14m \quad M_{\text{elegy}} = (v_1 \cdot M_1 + v_2 \cdot M_2) / (v_1 + v_2)$$

$$M_{\text{elegy}} = 2 \cdot d \quad M_{\text{elegy}} = 52 \quad v_1 / v_2 = 0,5$$

A megfelelő behelyettesítéseket elvégezve, az  $n$  és  $m$ -re kapott kétismeretlenes egyenletrendszer megoldásaként  $m = 4$  és  $n = 3$ . Az égési reakcióegyenletek:



A kénsavoldat hígításakor a kénsav mennyiség nem változik, ezért írható:

100g hígított old. ....30g  $H_2SO_4$

$$100 + m_{H_2O} \dots\dots\dots 94,8 \quad \text{ahonnan } m_{H_2O} = 216g$$

$$216 = v_1 \cdot 4 \cdot 18 + v_2 \cdot 4 \cdot 18 \quad \text{ahonnan } v_1 = 1\text{mol, akkor } v_2 = 2\text{mol}$$

$$V_{O_2} = (5 + 2 \cdot 6) \cdot 22,4L \quad V_{\text{lev.}} = 5 \cdot V_{O_2} \quad V_{\text{lev.}} = 5 \cdot 17 \cdot 22,4L = 1,904 \cdot 10^3L$$

**K. 426.**

Az egyértékű bázisú oldatában a  $OH^-$  koncentrációja azonos az oldat névleges moláros koncentrációjával. Bepárlásakor ez az érték nő. Mivel  $pH = -\lg[H^+]$  és  $[H^+][OH^-] = 10^{-14}$  Ezért a  $H^+$  koncentráció csökkenni fog, míg az oldat  $pH$  értéke nő.

Az eredeti  $NaOH$  oldat töménysége  $10^{-2}$ mol/L,  $pH$  értéke 12. Bepárlással a  $pH$  érték ha egy egységgel változik, akkor 13 lesz. E szerint az oldatban a  $H^+$  koncentráció  $10^{-13}$ , akkor a  $OH^-$  töménysége  $10^{-1}$ mol/L. Belátható, hogy az oldat töménysége tízszeresére nőtt a párolgás során. Ez csak úgy lehetséges, ha az azonos mennyiségű bázis tízszer kisebb térfogatban található. Egyszerű számítással is igazolható a következtetés: Az eredeti oldat valamilyen  $V_1$  térfogatában  $V_1 \cdot 10^{-2}$ mol  $NaOH$  van. Ugyanennyit tartalmaz a bepárlás után kapott  $V_2$  térfogatban a most már  $10^{-1}$ töménységű oldat, vagyis:  $V_1 \cdot 10^{-2} = V_2 \cdot 10^{-1}$ , ahonnan  $V_1/V_2 = 10$ .

**Fizika** (Firka 1/ 2002–2003)

**F. 270.** Koordináta-rendszerünket az ábrán látható módon válasszuk. A  $h_0$  magasságról szabadon eső golyó  $v = \sqrt{2gh_0}$  sebességgel ütközik a lejtővel. A visszaverődés törvénye értelmében a golyó ütközés utáni sebessége  $2\alpha$  szöget zár be a függőlegessel és a továbbiakban ferde hajítást végez  $v_x = v \cdot \sin 2\alpha$  és  $v_y = v \cdot \cos 2\alpha$  sebesség-összetevőkkel. A pályaegyenletet az  $x = vt \cdot \sin 2\alpha$  és  $y = vt \cdot \cos 2\alpha - (gt^2)/2$  egyenletekből határozzuk meg a  $t$  kiküszöbölésével.

Az ütközési pontok koordinátáit az  $y = x \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} - \frac{g}{2v^2} \frac{x^2}{\sin^2 2\alpha}$ , pálya-

egyenlet és az  $y = -tg\alpha x$  egyenes metszéspontjai határozzák meg.

Ezek:  $x=0$  és  $y=0$ , illetve

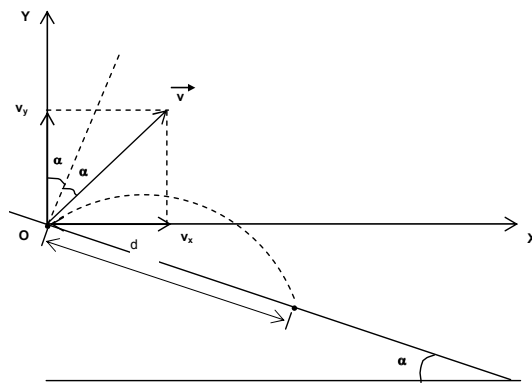
$$x = \frac{4v^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha \text{ és}$$

$$y = \frac{4v^2}{g} \sin^2 \alpha, \text{ melyek ismeretében}$$

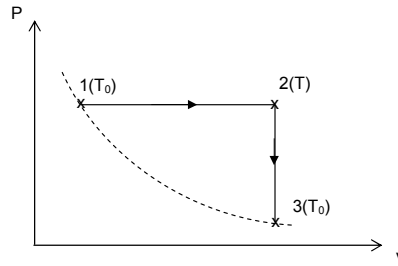
a  $d$  távolságra

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{4v^2}{g} \sin \alpha = 8h_0 \sin \alpha$$

adódik.



**F. 271.** Az állapotváltozásokat az ábrán követhetjük. A környezettel cserélt hő:  
 $Q=Q_{12}+Q_{23}=vC_p(T-T_0)+vC_v(T_0-T)=vR(T-T_0)$ , ahonnan  
 $T = \frac{Q}{vR} + T_0$ , és az izobár állapotváltozás egyenlete értelmében



$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} = \frac{Q}{vRT_0} + 1 = 3$$

**F. 272.** Az elektrosztatikus tér homogén, így  $U=E_x(x_2-x_1)+E_y(y_2-y_1)$

**F. 273.** A beüzemelt lencsétől  $x_1$  távolságra elhelyezett tárgyról a lencse  $a$  távolságra alkot képet. Ez,  $a$  távolságra található tárgy lesz a tükör számára, amelyről ez utóbbi  $b$  távolságra alkot képet. Mivel a fénysugarak újból áthaladnak a lencsén, a tükör által alkotott kép  $b$  távolságra található tárgy lesz a lencse számára, amely  $x_2$  távolságra alkotja a végső képet. Ha a lencse gyújtótávolsága  $f_l$  és a beüzemelt felület, mint tükör gyújtótávolsága lesz  $f_t$ , a képpalkotási egyenletek rendre:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f_l} \quad \frac{1}{b} + \frac{1}{a} = \frac{1}{f_t} \quad \frac{1}{x_2} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{f_l}$$

Az utolsó egyenletnél figyelembe vettük, hogy a fény fordított irányban halad át a lencsén és ezért a tárgytéri és képtéri gyújtópontok felcserélődtek. Kiküszöbölve  $1/b-t$  és  $1/a-t$ , kapjuk:

$$\frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = -\frac{2}{f_l} + \frac{1}{f_t}$$

Tehát a rendszer úgy viselkedik, mint egy gömbtükör, amelynek gyújtótávolságát az

$$\frac{1}{F} = -\frac{2}{f_l} + \frac{1}{f_t}$$

összefüggéssel határozzuk meg.

## Informatika



### 2002/2003. számítástechnika verseny megoldásai

A versenyszabályzatot lásd a FIRKA 2002/2003. évi 1. számában.

#### I. forduló (FIRKA 2002/2003 1. szám)

I./1. feladat: Archimédesz-spirál, logaritmus-spirál

```

program il; {Spiral}
uses Graph;
var
  f: text; {il.in}
  korbe, a: integer; {korbefordulasok szama, konstans}
  gd, gm: integer; {grafikus mod}
  i, x, y: integer;
begin
  Assign(f, 'il.in');

```

```

Reset(f);
readln(f, korbe);
readln(f, a);
Close(f);
gd := Detect;
InitGraph(gd, gm, '');
{Kirajzoljuk az Archimedesz spirált;}
{egyenlete: r = a*i, x = r*cos(i), y = r*sin(i)}
for i := 1 to korbe*100 do {hogya pontosabb ertekekek kapjunk}
begin
x := round(a*i/100*cos(i/100));
y := round(a*i/100*sin(i/100));
PutPixel((GetMaxX div 2) + x, (GetMaxY div 2) + y, red);
end;
readln;
CloseGraph;
end.

```

Az *I1.in* állomány tartalma pl.:

```

60
2

```

A logaritmus-spirált hasonlóan kell kirajzolni, ennek az egyenlete:  $\log(r) = a*i + b$ , ahonnan:  $r*cos(i), y = r*sin(i)$ ,  $a$  és  $b$  konstansok.

#### I./2. és I./3. feladat Kocka

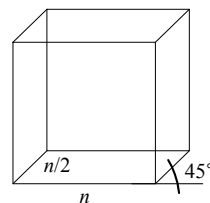
A megoldást csak vázoljuk:

- Érdemesebb objektumorientáltan gondolkodni. A 3D-s kocka egy objektum.
- A kocka 8 sarkának ( $s1, s2, s3, s4, s5, s6, s7, s8$ ) az  $(x, y, z)$  koordinátáit őrizzük meg, valamint a kocka középpontjának a koordinátáit ( $k$ ).
- Szükségünk van a kocka színére (rajzolási szín) és a háttérszínre, hogy forgatás-kor, eltoláskor a háttérrel újra tudjuk rajzolni, valamint a kocka oldalhosszúságára, ez alapján számoljuk ki a koordinátákat.
- Metódusok: **procedure** Init(an: real; aeloter, ahatter: byte); – kiszámítja a kocka kezdeti koordinátáit, **procedure** Rajzol(szin: byte); – a megadott színnel kirajzolja a kockát, **procedure** VEltol(l: real); – a megadott lépéssel vízszintesen eltolja a kockát, **procedure** FEltol(l: real); – a megadott lépéssel függőlegesen eltolja a kockát, **procedure** MEltol(l: real); – a megadott lépéssel mélységben eltolja a kockát, **procedure** XForgat(sz: real); – a megadott szögben az X tengely körül elforgatja a kockát, **procedure** YForgat(sz: real); – a megadott szögben az Y tengely körül elforgatja a kockát, **procedure** ZForgat(sz: real); – a megadott szögben a Z tengely körül elforgatja a kockát.
- A szabályosság és arányosság kedvéért a kocka 2D-és levetítését  $45^\circ$ -os szögben fele oldalhosszúsággal végezzük:
- Igy a kockának az egyik élét a következőképpen lehet kirajzolni:

```

Line(round(s1.x+1/2*s1.z*cos(pi/4)),
round(s1.y-1/2*s1.z*cos(pi/4)),
round(s2.x+1/2*s2.z*cos(pi/4)),
round(s2.y-1/2*s2.z*cos(pi/4)));

```
- Az eltolásoknál egyszerűen a megfelelő  $x, y$  valamint  $z$  koordinátákat kell növelni a lépéssel.



8. A forgatásra a

$$\begin{cases} x' = (x - x_k) \cdot \cos \alpha - (y - y_k) \cdot \sin \alpha + x_k \\ y' = (x - x_k) \cdot \sin \alpha + (y - y_k) \cdot \cos \alpha + y_k \end{cases}$$

képletet használjuk, ennek segítségével egy pontot a  $k$  középpont körül forgatunk el. Így például egy sarok elforgatását a következőképpen tehetjük meg:

$st1.x := (st1.x - k.x) \cdot \cos(sz) - (st1.y - k.y) \cdot \sin(sz) + k.x;$

$st1.y := (st1.x - k.x) \cdot \sin(sz) + (st1.y - k.y) \cdot \cos(sz) + k.y;$ , ahol  $st1$  a sarok,  $st1$  pedig egy temporális változó, amiben a sarok értékét őrizzük meg.

I./4. feladat (15. pont) Abszolút prímszám

```

program I4; {Abszolút prim}

function prim(sz: longint): boolean;
var i: integer;
begin
  if sz < 2 then
    begin
      prim := false;
      exit;
    end;
  prim := true;
  for i := 2 to round(sqrt(sz)) do
    if (sz mod i = 0) then prim := false;
  end;

var n: byte;
    h, sz, ksz, i: longint;
    z: boolean;
begin
  write('Hany szamjegyu primeket keressek: '); readln(n);
  h := 1;
  z := false;
  for i := 2 to n do h := h*10;
  if h = 1 then sz := h else sz := h+1;
  repeat
    if prim(sz) then
      begin
        z := true;
        ksz := sz div 10;
        repeat {abszolút primeket keresunk}
          if not prim(ksz) then z := false;
          ksz := ksz div 10;
        until ksz = 0;
        if z then {kiiras}
          begin
            write(sz, ' abszolút prim: ');
            ksz := h;
            repeat
              write(sz div ksz, ' ');
              ksz := ksz div 10;
            until ksz = 0;
            writeln;
          end;
        end;
        inc(sz, 2); {a parosok nem kellene}
      end;
  until sz > h*10-1;
end.

```

I./5. feladat (15. pont) Sierpinski-négyzet

A Sierpinski-négyzet értelmezés szerint egy rekurzív ábra, mely úgy keletkezik, hogy egy négyzetből kivágjuk a középső, harmad akkora oldalhosszúságú négyzetet. Ez a

*Sierpinski-négyzet* első szintje. Ezután a maradt részt 8 kisebb négyzet alakú részének mindegyikére végrehajtjuk ugyanezt a műveletet. Ez a második szint. A következő szinteket rekurzívan kapjuk hasonló módon.

Az ábra megrajzolása nem jelenthet gondot, a szokatlan az volt, hogy *Prolog* programot kellett írni. A *Prolog* alapján véve egy logikai, deklaratív nyelv, de fel van készítve grafikus ábrázolásmódra is. Logikájában ez hasonló a *Turbo Pascal* grafikához.

```

constants
    % A BGI driver eleresi utvonala
    bgi_path = "..\BGI"

predicates
    Sierpinski(integer) % A szint megadása
    set_graph_color(integer)

goal
    initgraph(0, 0, Driver, _, bgi_path), % Grafikus uzemmod
    set_graph_color(Driver),             % CGA szamara javitas
    Sierpienski(1),
    exit.

clauses
    Sierpinski(n) :-
        % Megvalositjuk a kirajzolast

    set_graph_color(Driver) :-
        Driver = 1,             % Megnezzuk, hogy CGA-e
        !,
        setbkcolor(3).          % Ha CGA akkor beallitjuk a szint
        set_graph_color(_).     % Kulonben nem csinalunk semmit

```

## II. forduló FIRKA 2002/2003 2. szám

0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0	0

### II./1. feladat (10. pont) Fehér-fekete kép

Vegyük a következő példát:

Világosan látszik, hogy a mátrixban két objektum különül el. A program a következő alapgondolatokra épül:

- Elindulunk a mátrix bal felső sarkából (1, 1) és elmegyünk két **for** ciklussal a jobb alsó sarkáig ( $n, n$ ).
- Ha 1-est kapunk, akkor az  $i, j$  értékeket kiírjuk az állományba (az objektum bal felső sarkának a koordinátái), a mátrix elemét  $-1$ -re cseréljük, hogy még egyszer ne menjünk végig rajta, majd megvizsgáljuk az elem szomszédjait:  $(i+1, j)$ ,  $(i-1, j+1)$ ,  $(i, j+1)$ ,  $(i+1, j+1)$ . Hogyha ezek 1-esek, akkor hozzátartoznak az objektumhoz.
- Rekurzívan hívjuk az előző pontot úgy, hogy az 1-eseket  $-1$ -esekre cseréljük le. Ellenőrizzük, hogy ne lépünk túl a mátrix nagyságán.
- Ha elérkeztünk az  $(n, n)$  pontba, akkor a kimeneti állomány a kért adatokat fogja tartalmazni.

### II./2. feladat (10. pont) Pénzváltás

```

program Penz; {Penzvaltas}

type
    TVekt = array[1..100] of longint;

procedure QuickSort(var A: TVekt; Lo, Hi: longint);

    procedure Sort(l, r: longint);
    var
        i, j, x, y: longint;
    begin

```

```

i := 1; j := r; x := a[(1+r) div 2];
repeat
  while a[i] > x do i := i + 1;
  while x > a[j] do j := j - 1;
  if i <= j then
    begin
      y := a[i]; a[i] := a[j]; a[j] := y;
      i := i + 1; j := j - 1;
    end;
  until i > j;
  if l < j then Sort(l, j);
  if i < r then Sort(i, r);
end;

begin {QuickSort};
Sort(Lo, Hi);
end;

var
  a: TVekt;
  osszeg: longint;
  n: byte;
  f, g: text;
  i, h: byte;

begin
  assign(f, 'penz.be');
  reset(f);
  assign(g, 'penz.ki');
  rewrite(g);
  readln(f, osszeg);
  i := 1;
  while not eof(f) do
    begin
      readln(f, a[i]);
      inc(i);
    end;
  n := i-1;
  QuickSort(a, 1, n); {csokkeno sorrendbe rendezzuk a tombot}
  {felvaltjuk az osszeget}
  for i := 1 to n do
    if a[i] <= osszeg then
      begin
        h := osszeg div a[i];
        osszeg := osszeg - h * a[i];
        writeln(g, h, ' ... ', a[i]);
      end;
  close(f);
  close(g);
end.

```

Példa:

Penz.be:

```

1253687
500000
50000
500
5000
10000
1000
1000000
100000
100
50
20
10
5
1

```

Penz.ki:

```

1 ... 1000000
2 ... 100000
1 ... 50000
3 ... 1000
1 ... 500
1 ... 100
1 ... 50
1 ... 20
1 ... 10
1 ... 5
2 ... 1

```

II./3. feladat (10. pont) Fraktál.1.

Az ilyen rekurzívan megrajzolható ábrákat *fraktáloknak* nevezzük. Filozófiájukban nagyon illeszkednek a LOGO típusú rajzórendszerekhez. Ezért ha Pascalban akarjuk őket megvalósítani, a LOGO-hoz hasonló rajzoló eljárásokat kell megvalósítanunk. Másik módszer az, hogy használjuk a *Graph3* unitot. A *Graph3* unit a Turbo Pasca 3.0-as verziójával való kompatibilitás miatt maradt benne a Pascal rendszerben, és a LOGO grafikájához hasonló *teknőc* (TURTLE) rajzórendszert implementál, a „teknősbéka” által megtett út szerint rajzol. Parancsai előre, hátra, jobbra, balra való mozgatót, valamint forgatásokat tartalmaznak. Sajnos legnagyobb felbontása 640x200-as és nem kompatibilis a *Graph.tpu* által biztosított komolyabb grafikai rendszerrel. Érdekesképp álljon itt egy *Graph3*-as megvalósítás.

```
program Frakt1;
uses Graph3;

procedure Lep(l, n: integer);
{milyen hosszan lépjen (l), melyik szintet (n)}
begin
  if n = 0 then Forwd(l)
  else
    begin
      Lep(l div 3, n-1);
      TurnLeft(60);
      Lep(l div 3, n-1);
      TurnRight(120);
      Lep(l div 3, n-1);
      TurnLeft(60);
      Lep(l div 3, n-1);
    end;
end;

procedure Fraktal(l, n: integer);
var i: integer;
begin
  for i := 1 to 3 do
    begin
      Lep(l, n);
      TurnRight(120);
    end;
end;

begin
  GraphColorMode; {grafikus uzemmod}
  SetPosition(-60, -20); {Honnan kezdje a rajzolast}
  Fraktal(160, 4); {A negyedik szintet rajzolja ki, 160-as lepessel}
  readln;
end.
```

II./4. feladat (15. pont) Fibonacci-számok összege

A megoldáshoz a *Zeckendorf* tételt használjuk fel, ennek alapján minden természetes szám egyértelműen előállítható Fibonacci-számok összegeként úgy, hogy  $n = F_{k_1} + \dots + F_{k_r}, 1 \leq i < r, k_i \geq k_{i+1} + 2, k_r \geq 2$ .

A Fibonacci-számokat az alábbi módon számolhatjuk: 
$$F_k = \begin{cases} 0, & \text{ha } k = 0 \\ 1, & \text{ha } k = 1 \\ F_{k-1} + F_{k-2}, & \text{ha } k > 1 \end{cases}$$

```
program fibo;
```

```

var
  i, n, m: longint;
  fib: array [0..50] of longint;
  db: integer;
  k: array [1..50] of integer;
begin
  write('A természetes szám? '); readln(n);
  fib[0] := 0;
  fib[1] := 1;
  m := 2;
  repeat
    fib[m] := fib[m-1] + fib[m-2];
    m := m + 1
  until fib[m-1] > n;
  m := m - 2;
  write(fib[m]);
  n := n - fib[m];
  db:=1;
  k[db] := m;
  m := m - 2;
  while n > 0 do
  begin
    if fib[m] > n then m := m-1 else
    begin
      write('+', fib[m]);
      n := n - fib[m];
      db := db + 1;
      k[db] := m;
      m := m-2;
    end;
  end;
  writeln;
  write('F(',k[1],')');
  for i := 2 to db do write('+F(',k[i],')'); writeln;
  readln;
end.

```

### II./5. feladat (15. pont) Prímszámok összege

A megoldáshoz a *Goldbach-sejtést* használjuk fel. Goldbach 1742-ben írta Eulernek, hogy szerinte minden 3-nál nagyobb természetes szám előállítható három prímszám összegeként. Euler válaszában leírta, hogy ennek bizonyításához elegendő lenne belátni, hogy minden páros szám felbontható két prímszám összegére.

Sajnos a Goldbach-sejtést mind a mai napig nem sikerült bizonyítani. A program egy *mobó-algoritmust* használ, elveiben hasonló az előzőhöz.

Kovács Lehel



*Vigyázat! Bizonyosságot nyert, hogy az úgynevezett lágy drogok is idegrendszeri károsodásokat okozhatnak.* A kábítószer fogyasztás nem csak viselkedésbeli zavarokat, érzéki csalódásokat okozhat. Olasz kutatók a marihuána hatását vizsgálták állatkísérletekkel. Patkányoknál megállapították, hogy ha az anyaállat terhesség alatt marihuánát fogyasztott, a születő patkányoknak életre szóló idegrendszeri zavarai voltak. Fiatal korban hiperaktívak, idősebben memóriazavaraik voltak. Megvizsgálva ezeknek az állatoknak az agyát, biokémiai változásokat tudtak kimutatni.

A memóriáért felelős területen egy idegingerület-átvivő anyag mennyiségének csökkenését észlelték. Ezeket a megállapításokat az Amerikai Egyesült Államokban végzett nagyszámú esettanulmánnyal az emberi orvosi gyakorlatban is megerősítették.

*Az emberiség ivóvízszükségletének kielégítésére szolgáló új megoldás.* Az eljárás elvét már az 1970-es években feltalálták amerikai kutatók, de technikai kivitelezését csak az elmúlt évben oldották meg és szabadalmaztatták egy atlantai cég munkatársai. Az elv alapja, hogy fölmelegített levegőt tartalmazó kamrába nagy nyomással tengervizet juttatnak be, parányi cseppecskékből álló köd formájában. A cseppecskékből a víz hirtelen elpárolog, s a visszamaradó szilárd só részecskék a kamra aljára hullnak. A vízgőzöket egy gyűjtőkamrába áramoltatják, ahol kondenzálódnak édesvíz formájában. A kidolgozott módszerrel legtöbb 16%-os sótartalmú vizet lehet 100%-os hozammal sótlánítani. A megvalósított berendezéssel napi 11m<sup>3</sup> sósvizet lehet ivóvízzé alakítani. Elvileg különböző szennyezettségű (pl. arzén tartalmú) vizet lehet ezen elv alapján tisztítani.

*A környezeti megfigyelések, akár séták alkalmával is, eredményezhetnek érdekes felfedezéseket*

Egy japán fizikusnak városában tett sétái során feltűnt, hogy egy köztéri bronzszobrot nem kedvelnek a madarak, s ezért tisztán marad, a többi szobortól eltérően. Az észlelt tény okára nem találtak választ, nem tudták magyarázni, hogy attól a szobortól miért félnek a madarak. Ezért a fizikus kísérletsorozatba kezdett. A szobrok anyagi minőségét vizsgálva megállapította, hogy a madarak által került szobor bronzában gallium található, s ezt nem kedvelik a madarak. Ez a tény adta az ötletet, hogy gallium tartalmú spray-vel fújjanak be más köztéri szobrokat a madarak okozta szennyeződéstől való védelemért.

(A Magyar Tudomány és az Élet és Tudomány hírei alapján)

**M. E.**

### **Számítástechnikai hírek**

*Keresőháború.* Az *MSN Search* mellett a *Yahoo* is beszállt a keresőháborúba: a cég szerdán elindította saját keresőszolgáltatását, ezért a továbbiakban nem licenszeli a *Google* technológiáját. A *Yahoo* volt a *Google* legnagyobb ügyfele, így a lépés jelentős bevételkiesést is jelent a legnagyobb keresőnek.

A *Yahoo* szerdán indította el *Slurp* névre keresztelt keresőrobotját, melynek feladata a web átfésülése és a kereső-adatbázis felépítése. Szakértők szerint a robot hatékonyságát mutatja, hogy két nappal elindítása után már működik is a szolgáltatás.

A *Search Engine Journal* szerint a lépésre számítani lehetett, különösen miután a *Yahoo* tavaly megvásárolta az *Inktomi* keresőmotort és az *Overture* nevű, keresőkhöz fejlesztett hirdetési rendszert. A *Yahoo* lépésével nagyjából egyidőben terjesztette ki az *MSN Search* a hírkereső szolgáltatását dél-amerikai és ázsiai oldalakra is, illetve jelentette be a *Google*, hogy keresési indexe hatmilliárd eleműre bővült.

*Új digitális fényképezőgép.* A *HP* új, ultra kompakt digitális fényképezőgépe 5 megapixeles képek készítését teszi lehetővé. Optikája 3-szoros átfogású, fényereje átlagos. A képeket a gép saját 32 MB integrált memóriájába, vagy opcionális *SecureDigital* kártyára menthetjük. Az 1,5"-os LCD-vel forgalmazott gépet lítium-ion akku táplálja.

[www.index.hu](http://www.index.hu)

## Muzeális eszközök

V. – rész

Társítsatok az ábrázolt fizikai készülékek\* összetevőit jelölő számokhoz a szójegyzékből nekik megfelelő szavak betűjelét! A szám-betű párokon kívül maximum öt-öt sorban írjátok le az eszközök működését.

A szerkesztőségbe határidőig eljuttatott megfejtéseket és leírásokat értékeljük, a helyes megfejtők között nyereményeket sorsolunk ki.

A fődíj egyhetes nyári táborozás. Minden esetben írjátok meg a neveteken és osztályotokon kívül a pontos címeteket és az iskolát is. A borítékra írjátok rá: *Vetélkedő*.

### I. Atwood-féle ejtőgép

- másodperc-inga elektromos csengő időjelzéssel
- zsinag
- centiméter-beosztás
- elektromágneses kioldó
- ellensúly lekasztó
- súlyok
- csiga

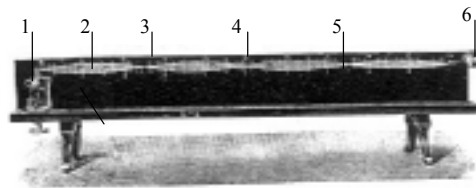
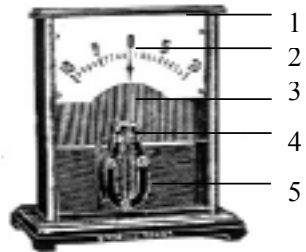
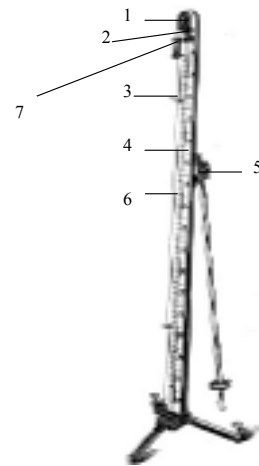
### II. Forgótekerccses Deprez-

*D'Alsonval rendszerű galvanométer*

- mutató
- patkó-mágnes
- üveges szekrény
- skálabeosztás
- forgótekerccs

### III. Melde-féle hullámgép

- elektromágnes
- acélhúr
- feszítőcsavar
- cm-es skálabeosztás
- csomópontok
- orsópontok



Beküldési határidő: 2004. április 15.

Kovács Zoltán

\* A fizikai eszközök rajzait Erdély és Szabó budapesti tudományos műszergyárának 1929. évi árjegyzékéből vettük.

## Tartalomjegyzék

### Fizika

A digitális fényképezőgép – VII.....	179
Az Univerzum gyorsulva tágul – II.....	181
A sárkány.....	192
Fizikai témájú példák aktív oktatási eljárásokra – IV. ....	198
A fényvisszaverődés és a fénytörés törvénye vektorosan – III. ....	199
Alfa-fizikusok versenye .....	201
Kitűzött fizika feladatok.....	207
Megoldott fizika feladatok.....	209
Vetélkedő .....	218

### Kémia

Energiaátalakulási folyamatok a növényekben .....	185
Kísérletezzünk.....	196
Kitűzött kémia feladatok.....	207
Megoldott kémia feladatok.....	208
Híradó.....	216

### Informatika

Programozási technikák felülnézetből – II.....	190
Érdekes informatika feladatok.....	203
Megoldott informatika feladatok.....	210
Híradó.....	217