Érdekes informatika feladatok

V. rész

Páratlan bűvös négyzetek

A bűvös négyzetek a legrégibb idők óta az emberiség játékaihoz tartoztak. Minden valószínűség szerint indiai eredetűek és Arábián keresztül jutottak el hozzánk, bejárva a „sakk-útját". Legrégebbi európai dokumentumaink, amelyek bűvös négyzetekkel foglalkoznak, a XIV. századból valók, de talán a leghíresebb Albrecht Dürer *Melancholie* (Melankólia) című metszete, amely 1514-ben készült és egy 4×4-es bűvös négyzetet tartalmaz.

Az európai „sötét" középkorban egyáltalán nem volt könnyű dolog egy bűvös négyzet megszerkesztése, ezért a kor embere mágikus tulajdonságokat tulajdonított neki. A bűvös négyzet tiszteletet parancsolt, félelmet keltett, bűvészetnek látszott.

Dürer is valószínűleg az akkori idők misztikum felé hajló áramlatainak jellegét akarta kifejezésre juttatni.

Némelyek a bűvös négyzetnek csodaszerű gyógyító erejű hatásokat tulajdonítottak és hasznot húztak a bűvös négyzettel díszített, a „bajoktól megvédő" kis amulettek árusításából.

Az inkvizíció korában egyeseket boszorkánysággal vádoltak és fogdába is vettek ilyen számösszeállítások készítéséért.

De lássuk, mit is nevezünk bűvös négyzetnek: n sorból és n oszlopból álló táblázat (négyzetes mátrix), amelynek mezőin bizonyos egész számokat helyezünk el úgy, hogy minden sorban és oszlopban, továbbá a két átlóban ugyanakkora legyen a számok összege. Eredetileg az is előírás volt, hogy a számok az 1-től n^2-ig terjedő egészek legyenek, ma már inkább általánosabb értelemben használjuk a bűvös négyzet fogalmát, és ettől a követelménytől eltekintünk. Sőt ma már az átlókra vonatkozó szabályoktól is el szokás némely esetben tekinteni (az átlók összege nem feltétlenül kell, hogy megegyezzen a sorok és oszlopok összegével). De ha hagyományos értelemben vett bűvös négyzetről beszélünk, akkor mind az átlókra, mind az elemekre (számokra) a fenti értelmezést (a szigorú formájában) alkalmazzuk.

A sorok és oszlopok számát, az n-et, a bűvös négyzet *rendszámának* nevezzük. Háromtól kezdve minden rendszámhoz lehet bűvös négyzetet szerkeszteni, 1×1-es és 2×2-es bűvös négyzetekről nem beszélhetünk.

Külön szoktuk választani a *páratlan rendszámú* és a *páros rendszámú* bűvös négyzeteket, mert különböző algoritmusok segítségével lehet kitölteni őket.

A páratlan rendszámú bűvös négyzetek kitöltésére viszonylag egyszerű és könnyen érthető algoritmusokat dolgoztak ki.

A legegyszerűbb bűvös négyzet a 3×3-as: 9 mezőbe írjuk be a számokat egytől kilencig. Elforgatástól és tükrözéstől eltekintve, csak egyetlen megoldás létezik. Egytől kilencig összeadva a számokat 45-öt kapunk. Ha mindhárom sor (oszlop) ugyanazt az összeget adja, akkor ez az összeg (a bűvös összeg) 15 kell, hogy legyen (45/3).

Általánosítva, tetszőleges $n \times n$-es bűvös négyzet esetén a bűvös összeget a következőképpen határozzuk meg:

1-től n^2-ig összeadjuk a számokat: $\frac{n^2(n^2+1)}{2}$, és ezt elosztjuk n-el. Vagyis a bűvös összeg $\frac{n(n^2+1)}{2}$ lesz.

Tekintsük azokat a számhármasokat (1-9 között) amelynek összege 15: 9 + 5 + 1, 9 + 4 + 2, 8 + 6 + 1, 8 + 5 + 2, 8 + 4 + 3, 7 + 6 + 2, 7 + 5 + 3, 6 + 5 + 4.

Nyilvánvaló, hogy az 5-ös kerül középre, mert négyszer fordul elő a fenti előállításban, tehát négy sorhoz, oszlophoz, átlóhoz tartozhat. A 9-es csak kétszer szerepel, ennélfogva a négyzet szélén lesz a helye és a sor másik számjegye az 1-es lehet. Hasonló elvek alapján már egyszerűen kitölthetjük az ábrát:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Páratlan bűvös négyzetek kitöltésére jól kidolgozott általános algoritmusok léteznek, ezek közül hármat ismertetünk:

1. Az indus módszer

Az indus (másképp kínai vagy sziámi) módszer Délkelet-Ázsiából származik, feltehetően még a Krisztus előtti időkben kidolgozták. Számolás nélkül, csak a számok egyszerű leírásával szerkeszthetünk páratlan bűvös négyzetet. A hátránya az, hogy csak egyet tud előállítani (például 5×5-ös bűvös négyzetek esetén közel 600 000 négyzet lehetséges).

Az egyik oldal (pl. felső) középső mezőjébe írjuk az 1-et, majd átlós irányba felfelé írjuk a következő számot, de minden kilépésnél (mikor kilépünk a táblázatból) ugyanabban a sorban vagy oszlopban a másik oldalon belépünk, majd továbbra is átlós irányban folytatjuk a kitöltést mindaddig, amíg foglalt mezőhöz nem érkezünk. Ekkor a következő számot közvetlenül az utoljára beírt szám alá írjuk, és folytatjuk az átlós kitöltést (pl. 5 – 1 – 6 esetében).

	18	25	2	9	16
17	24	1	8	15	17
23	5	7	14	16	23
4	6	13	20	22	4
10	12	19	21	3	10
11	18	25	2	9	

A következő *Pascal* program indus módszerrel kitölt egy tetszőleges páratlan rendszámú bűvös négyzetet:

```
program ParatlanBuvos;
const
  MaxRendSz = 19; {19x19 - hogy ferjen ki a kepernyore}
type
  TBuvos = array[1..MaxRendSz, 1..MaxRendSz] of word;

{az indus modszer}
procedure Indus(var bn: TBuvos; n: byte);
var
  i: word;
  x, y: byte;
begin
  {felso sor kozepso elemetol kezdunk}
  x := 1; y := round(n/2);
  for i := 1 to sqr(n) do {1-tol n-negyzetig}
   begin
```

```
      bn[x, y] := i;
      {atlosan haladunk}
      dec(x); inc(y);
      {ha foglalt vagy mellekatlo folott vagyunk, alaja irjuk}
      if (x = 0) and (y > n) then
       begin
        inc(x, 2);
        dec(y);
       end;
      if (bn[x, y] <> 0) and (x in [1..n]) and (y in [1..n]) then
       begin
        inc(x, 2);
        dec(y);
       end;
      {ha fent kileptunk, belepunk alol}
      if x = 0 then x := n;
      {ha jobbrol kileptunk, belepunk balrol}
      if y > n then y := 1;
   end;
end;

var
  n: byte;
  bn: TBuvos;
  i, j: byte;
begin
  {beolvassuk a rendszamot}
  repeat
   write('Kerem a buvos negyzet rendszamat ([3..', MaxRendSz, ']):
');
   readln(n);
  until odd(n) and (n in [3..MaxRendSz]);
  {feltoltjuk a matrixot 0-val}
  for i := 1 to n do
   for j := 1 to n do
    bn[i, j] := 0;
  {az indus modszer szerint kitoltjuk a buvos negyzetet}
  Indus(bn, n);
  {kiirjuk a buvos negyzetet}
  for i := 1 to n do
   begin
    for j := 1 to n do
     write(bn[i, j]:4);
    writeln;
   end;
  readln;
end.
```

2. A lóugrásos módszer

A lóugrásos módszert kb. az 1300-as évek közepétől ismerjük.

Általános szabálya: valamelyik oldal középső mezőjébe írjuk az 1-et, majd a sakkból jól ismert lóugrás szabálya szerint befelé indulunk el a következő mezőre. Ha ez szabad, beírjuk a következő számot, ha már foglalt, akkor a 2-es irányába az utoljára beírt szám sorába vagy oszlopába négyet lépünk, és ide írjuk a következő számot.

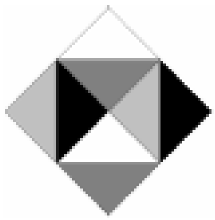
Mivel a ló befelé négy irányba tud lépni, a tükörképektől eltekintve két különböző megoldást kapunk, de a hárommal nem osztható, páratlan rendszámú bűvös négyzetek kitöltését azonban bárhol kezdhetjük, így az ilyen esetekben kettőnél több megoldást is kapunk.

A lóugrással mindig a megkezdett irányba kell haladnunk. A jobbra kilépés után a baloldalon folytatjuk a számolást és hasonlóan járunk el a többi esetben is.

5	24	18	12	6		
13	7	1	25	19	13	7
21	20	14	8	2	21	20
9	3	22	16	15	9	3
17	11	10	4	23	17	11
		18	12	6	5	24

Feladat: Írjunk *Pascal* programot a lóugrásos módszer megvalósítására tetszőleges páratlan rendszámú bűvös négyzet kitöltésére!

3. Az átlós módszer



Az átlós módszert Claude-Gaspar Bachet de Méziriac francia matematikus dolgozta ki az 1630-as években. Talán ez a legismertebb és legegyszerűbb módszer páratlan rendszámú bűvös négyzetek kitöltésére, de sajnos ez a módszer is csak egy megoldást szolgáltat. Átlós módszer esetében a következőképpen járunk el: megrajzoljuk a kitöltendő *n*-ed rendű bűvös négyzet átlóit, a keletkező háromszögeket a szomszédos oldalakra csúsztatjuk.

Ezzel a módszerrel egy $n \times n$ egységnégyzetből álló alakzatot kapunk. Az alakzat valamely csúcsából kiindulva elkezdjük – átlósan lefelé haladva – beírni a számokat.

A négyzet egyik oldala mentén kívül maradt mezők ugyanúgy helyezkednek el, mint a szemközi oldal mellett belül üresen maradt mezők, így csak visszacsúsztatjuk – ugyanabban az elrendezésben – a külső mezőket az üres belsők helyére, és megkapjuk a teljesen kitöltött bűvös négyzetet.

				21				
			16		22			
		11		17		23		
	6		12		18		24	
1		7		13		19		25
	2		8		14		20	
		3		9		15		
			4		10			
				5				

Feladat: Írjunk *Pascal* programot az átlós módszer megvalósítására tetszőleges páratlan rendszámú bűvös négyzet kitöltésére!

Páratlan rendű bűvös négyzetek kitöltésére számos matematikus, érdeklődő dolgozott ki eljárást, ezek azonban bonyolultságuk miatt nem terjedtek el annyira (például a de La Hire módszer). Talán itt is az érvényes, hogy: *„a legrégebbi módszer a legegyszerűbb”*.

11	4	17	10	23
24	12	5	18	6
7	25	13	1	19
20	8	21	14	2
3	16	9	22	15

Kovács Lehel István