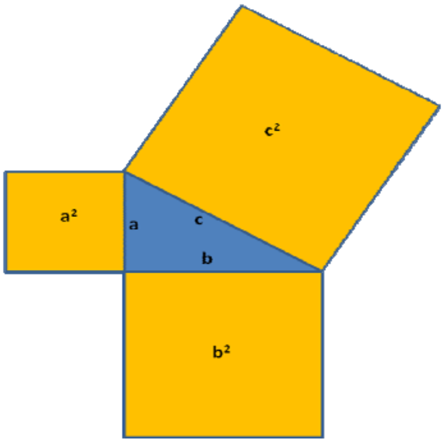
Mérlegelhető feladatok

A mérlegen a Pitagorasz tétele és a *Játsszuk el Arkhimédész kísérletét!* két olyan, középiskolában is elvégezhető kísérletet mutat be, amelyek a közkedvelt témákat mélyebb értelmezésnek vetik alá. Az olcsón beszerezhető digitális mérleggel mértük a tömegeket mindkét esetben, mert a grammnyi pontosság elegendőnek bizonyult a problémák feltárásában.



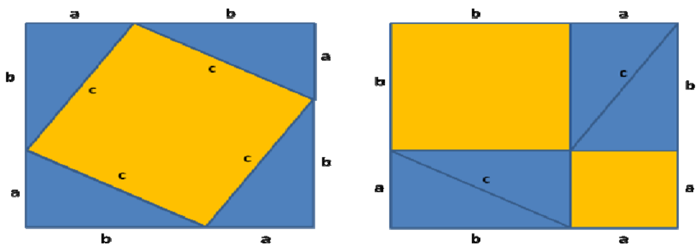
Mérlegen a Pitagorasz tétele

Pitagorasz tétele az euklideszi geometria egyik állítása. Felfedezését és első bizonyítását az i. e. 6. században élt matematikusnak és filozófusnak, Püthagorasznak tulajdonítják, pedig indiai, görög, kínai és babilóniai matematikusok már ismerték a tételt jóval Püthagorasz előtt, és a kínaiak bizonyítást is adtak rá.[1]

A tétel

Bármely derékszögű háromszög leghosszabb oldalának (átfogójának) négyzete megegyezik a másik két oldal (a befogók) négyzetösszegével. Tehát: ha egy háromszög derékszögű, akkor a leghosszabb oldalára emelt négyzet területe a másik két oldalra emelt négyzetek területének összegével egyenlő.

A szokásos jelölésekkel (c az átfogó): $a^2 + b^2 = c^2$.



A bizonyítás $c^2 = a^2 + b^2$

A fenti képről leolvasható a tétel bizonyítása. Mindkét nagy négyzet egyenlő területű, tehát ha mindkét oldalon elhagyjuk az azonos területű 4-4 háromszöget, akkor a maradék területének is egyeznie kell. Baloldalt egy, jobboldalt két négyzet marad, amelyek területe az egyenlet bal, illetve jobb oldalát adják.

Felhasználtuk, hogy:

- a háromszögek területe megegyezik, mivel két oldaluk (a és b) illetve az általuk közbezárt szögek megegyeznek,
- a bal oldalon lévő rombusz (minden oldala c) négyzet, mivel minden szöge 90° (180°-(α+β), ahol α, β az ábrán lévő derékszögű háromszögek hegyesszögei), tehát szögei megegyeznek, tehát derékszögek.

Ez a bizonyítás Pitagorasz tételét és nem annak megfordítását bizonyítja.

Pitagorasz tétele mára az általános műveltségbe is beivódott, legalábbis az oly sokszor emlegetett $a^2 + b^2 = c^2$ képlet. De, hogy mit takar az a,b és c-vel jelölt kifejezés, azt már kevesebben tudják. Pedig a fenti bizonyítás szemléletesen a négyzetre emelést a négyzettel, mint síkidom területével azonosítja.

12. osztályos gimnáziumi tanulóknál felmérést készítve, azt tapasztaltam, hogy a képletet 100%-osan tudják, a kifejezések megnevezése 30%-uknak, szavakkal, vagy rajzzal történő megfogalmazása 5%-uknak sikerült, bizonyítani egyáltalán nem tudták. Ekkor jutott eszembe, hogy a bizonyítás helyett olyan igazolást keressek, amely aktív cselekvéshez kötött, és játékos formában juttatja el a tanulókat és a tételt egy közös valóságba. A fizikában ismert sűrűség definíciójának ismeretén kívül néhány segédeszközre volt csupán szükség: ollóra, körzőre, vonalzóra, digitális mérlegre és papírdobozokra.

A továbbiakban Pitagorasz tételét mérleg segítségével fogjuk igazolni. Két homogén és azonos vastagságú lemez tömege akkor és csak akkor egyezik meg, ha területük egyenlő. Ezt könnyen beláthatjuk a sűrűség definíciójából:

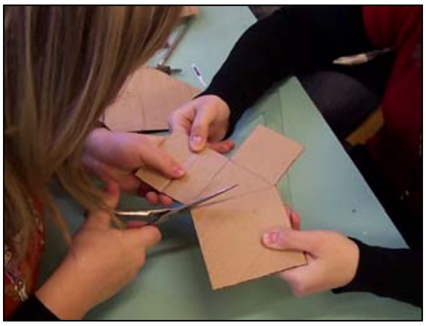
Ha: $m_1 = m_2$ sűrűség definíciója szerint: $\rho V_1 = \rho V_2$

Ha a térfogatokat kifejezzük a $V=A\cdot h$ kifejezéssel, ahol „A" a lemez területe és h a lemez vastagsága (a homogenitás miatt: $h_1=h_2=h$), majd $\varrho\cdot h$-val osztjuk az egyenlet mindkét oldalát: $\rho \cdot A_1 \cdot h = \rho \cdot A_2 \cdot h \; / \div (\rho \cdot h)$

$A_1 = A_2$ kifejezést kapjuk.

Azaz, ha a kartonlapból kivágott alakzatok tömegei megegyeznek, a kartonlapok területeinek is meg kell egyezni!

Szerkesszünk egy papírlemezre tetszőleges derékszögű háromszöget, majd oldalaira szerkesszünk négyzeteket! Ezeknek a területei rendre az oldalak négyzetével egyeznek meg! Vágjuk ki a négyzeteket, majd mérjük meg a tömegeiket!



1. ábra

A kartonlapra szerkesztett derékszögű háromszöget és az oldalai által meghatározott négyzeteket vágjuk ki olló segítségével!

2. ábra

A kivágott darabokra írjuk rá az oldalak hosszúságát, a négyzetekre a területüket is!

Először az átfogóra rajzolt legnagyobb négyzetet tegyük a mérlegre, és olvassuk le a mérleg állását: a mérleg pl. 9 gramm tömeget jelez.

3. ábra

Az átfogóra rajzolt négyzet tömege megegyezik a befogókra rajzolt négyzetek tömegeinek az összegével.

Ezt követően tegyük rá a mérlegre a két befogóra rajzolt négyzetet is! A mérleg ismét 9 grammot mutat. Ez csak úgy lehetséges, ha a befogókra rajzolt négyzetek területeinek összege megegyezik az átfogóra rajzolt négyzet területével, azaz esetünkben: $c^2=a^2 + b^2$.

Természetesen itt a szerkesztés pontosságát is ellenőrzi a mérés. A gyakorlat – jól előkészítve – 45 perces csoportmunkás-foglalkozáson kivitelezhető. Az óra anyagát filmre is vettük, az osztály által választott zenével mobiltelefonon is lejátszható kisfilmet is készítettünk belőle, amit azóta is gyakran néznek meg a szereplők.

Stonawski Tamás