

nincs olyan nap, hogy ne emelnénk fel valamit/valakit, melynek során súlyunk mindig változni fog. No és persze gyakran le is guggolunk, akkor pedig éppen fordítva, súlycsökkenés következik be.

Irodalom

1. *Matlap* 7, Kolozsvár, 2013. szeptember, 257. o. **F. 60.** feladat
2. Dr. Czédli Gábor: *A III. Béla Gimnáziumtól az egyszerű zsonglorminták átlagtételéig*, Szeged, 2007. január 26.
<http://www.math.u-szeged.hu/~czedli/publ.pdf/3.Bela1.pdf>

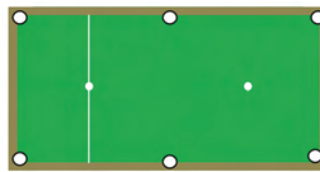
Varga János, Székesfehérvár

A biliárdgolyók fizikája

*A biliárd nem más, mint a tervezés magasiskolája.
Nemcsak játék, hanem sokat ígérő sportművészet,
melyhez egy sakkjátékos elméje és egy koncertzongorista keze szükséges.*
Albert Einstein

Maga a biliárd szó összefoglaló sportnév. Ezeket a játékokat egy négyszögletes asztalon, meghatározott számú golyóval és egy dákónak nevezett hosszú bottal játsszák.

Ezeknek a játékoknak kb. 36 fajtáját lehet megkülönböztetni, legismertebb változatai: Karambol vagy Francia biliárd, Angol biliárd, Snooker és Pool biliárd. A Francia biliárdot lyuk nélküli asztalon játsszák, míg az Angol biliárdot az 1. ábrán látható 6 lyukkal ellátott asztalon. Az asztalt és a kipárnázott szegélyű keretet, amit oldalfalnak nevezünk, feszülő posztó borítja.



1. ábra

A hosszú és a rövid oldalak aránya minden esetben 2:1. A játéktér méretei 180x90 cm (6') és 356x178 cm (12') között a szokásosak. A biliárdgolyók anyaga régebben fa, réz, elefántcsont vagy belga anyag volt. Ma általában kb. 2 g/cm³ sűrűségű műanyagból (fenolgyanta) készülnek és átmérőjük 5,2cm és 6,05 cm között változhat. A szabványos pool-biliárd dákó kb. 148 cm hosszú. A biliárd bármely változatában mindig két játékos játszik egymás ellen. A biliárdjáték művészei bámulatos ügyességgel ütköztetik a dákóval meglökött golyót egy nyugvóhoz úgy, hogy a golyók sokszor „karambolozzanak” illetve a kiválasztott lyukba hulljanak bele. A biliárdasztal posztója nagy súrlódási felület, ezért a golyók mozgását tiszta gördülésnek tekinthetjük, kivéve a golyóknak közvetlenül az ütközés utáni mozgását, amikor is rövid időre megcsúsznak. A kemény biliárd golyók egymással tökéletesen rugalmasan ütköznek, ezért az ütközés folyamatára alkalmazható az impulzus megmaradásának törvénye mellett a mechanikai energia megmaradásának az elve is.

Először vizsgáljuk meg két golyó centrális ütközését, amikor az ütköző golyók valamint az asztal felülete közötti súrlódás elhanyagolható. Centrális ütközéskor az ütközés a testek súlypontjait összekötő egyenes mentén történik. Legyen a két, centrálisan és tökéletesen rugalmasan ütköző golyó tömege $m_1=m_2=m$. A csak haladó mozgást végző első golyó sebessége ütközés előtt $v_1=v_0$ és a másodiké $v_2=0$ (2. ábra).



2. ábra

Alkalmazzuk az említett két megmaradási elvet az adott ütközésre:

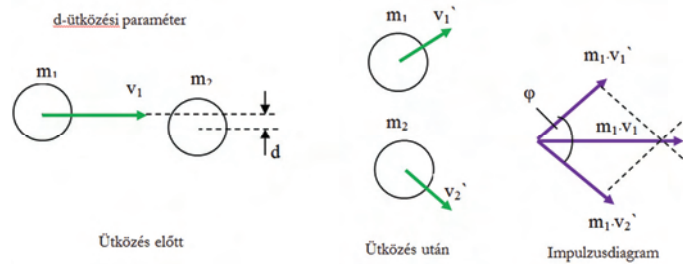
$$\begin{cases} \vec{P}_k = \vec{P}_v \\ E_k = E_v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}_1' + m_2 \cdot \vec{v}_2' \\ \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot (v_1')^2}{2} + \frac{m_2 \cdot (v_2')^2}{2} \end{cases}$$

Figyelembe véve, hogy $v_1=v_0$, $v_2=0$ és $m_1=m_2=m$, kapjuk:

$$\begin{cases} m \cdot v_0 = m \cdot v_1' + m \cdot v_2' \\ \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \frac{m \cdot (v_1')^2}{2} + \frac{m \cdot (v_2')^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_0 = v_1' + v_2' \\ v_0^2 = (v_1')^2 + (v_2')^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1' = 0 \\ v_2' = v_0 \end{cases}$$

Megállapíthatjuk, hogy a rugalmas golyók sebességét cserélnék a centrális ütközés következtében.

Tanulmányozzuk továbbá az előbbi esetet azzal a különbséggel, hogy a két golyó nem centrálisan ütközik. A 3. ábra ezt az ütközést felülnézetből szemlélteti.



3. ábra

A két golyó rugalmas ütközésére ez alkalommal is alkalmazzuk az impulzus-megmaradás és energia-megmaradás törvényét:

$$\begin{cases} \vec{P}_k = \vec{P}_v \\ E_k = E_v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2 \cdot v_0^2 = (m \cdot v_1')^2 + (m \cdot v_2')^2 + 2 \cdot m^2 \cdot v_1' \cdot v_2' \cdot \cos\varphi \\ \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \frac{m \cdot (v_1')^2}{2} + \frac{m \cdot (v_2')^2}{2} \end{cases}$$

Az egyszerűsítések elvégzése után marad:

$$\begin{cases} v_0^2 = (v_1')^2 + (v_2')^2 + 2 \cdot v_1' \cdot v_2' \cdot \cos\varphi \\ v_0^2 = (v_1')^2 + (v_2')^2 \end{cases}$$

Az első egyenletből kivonjuk a másodikat és kapjuk:

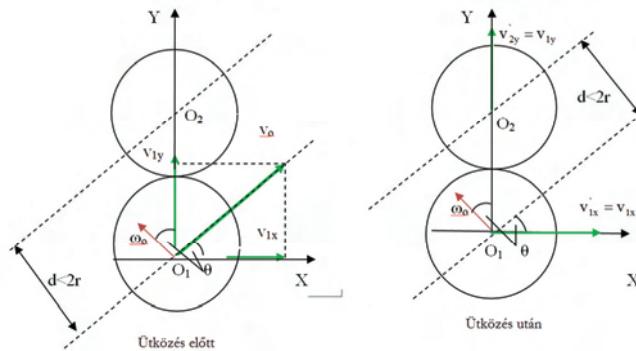
$$2 \cdot v_1' \cdot v_2' \cdot \cos\varphi = 0 \Rightarrow \cos\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ,$$

ami azt jelenti, hogy a két golyó ütközés utáni sebességeinek az iránya 90° -os szöget alkot (a két golyó merőlegesen pattan el egymástól).

Ezek után továbblépünk, és megvizsgáljuk, hogy hogyan történik a két biliárdgolyó ütközése a biliárdasztal felületén. A biliárdasztal posztója lévén nagy súrlódási felület,

azt eredményezi, hogy az ütközés előtt v_o sebességgel haladó mozgásban levő golyó forgómozgást is fog végezni $\omega_o = v_o / r$ szögsebességgel. Válasszunk egy koordinátarendszert úgy, hogy az ütközés pillanatában az O_1Y tengely épp a golyók centrálisán fekszen (4. ábra). A golyók közötti súrlódásmentesség azt eredményezi, hogy a golyók között csak a centrálisuk irányába mutató erő léphet fel, ezért az 1-es golyónak a centrális irányára merőleges $v_{1x} = v_{1x} = v_o \cdot \cos\theta$ sebesség-összetevője változatlan marad. A centrális irányában viszont a két golyó sebességet cserél: $v_{1y} = 0$ valamint $v_{2y} = v_{1y} = v_o \cdot \sin\theta$.

A 2-es golyó az O_1X tengely irányában sebességet nem kap, mert a golyók közötti súrlódási erő elhanyagolható, ezért $v_2 = v_{2y} = v_{1y} = v_o \cdot \sin\theta$.



4. ábra

Kövessük először a 2-es golyó mozgásának az alakulását, mert ez egyszerűbb eset. A 2. golyó $v_{2y} = v_{1y} = v_o \cdot \sin\theta$ kezdősebességgel és szögsebesség nélkül indul ($\omega_2 = 0$). Az $F_s = \mu \cdot N$ súrlódási erő (5. ábra) következtében a 2-es golyó haladó mozgásának a gyorsulása $a_2 = -\frac{\mu \cdot N}{m} = -\frac{\mu \cdot m \cdot g}{m} = -\mu \cdot g$ és forgó mozgásának a szögsebessége

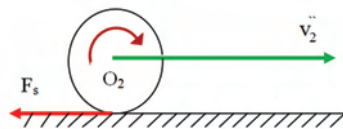
$$\varepsilon_2 = \frac{F_s \cdot r}{I} = \frac{\mu \cdot N \cdot r}{I} = \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot r}{I} \text{ lesz, ahol } I \text{ a golyó tehetetlenségi nyomatéka.}$$

Következésképp a 2-es golyó sebessége a

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_2 + \vec{a}_2 \cdot t = \vec{v}_2 - \mu \cdot g \cdot t \quad (1)$$

és szögsebessége pedig az

$$\omega_2 = \varepsilon_2 \cdot t = \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot r}{I} \cdot t \quad (2)$$



5. ábra

összefüggés szerint változik. A súrlódási erő azonban csak addig hat, míg a golyó mozgása az

$$r \cdot \omega_2'' = v_2'' \quad (3)$$

feltételnek eleget tevő tiszta gördüléssé nem válik. Ekkor a súrlódási erő zérussá válik, s a golyó egyenletesen mozog tovább. Az m tömegű és $I = \frac{2}{5} \cdot m \cdot r^2$ tehetetlenségi nyomatékú 2-es golyó sebességét és szögsebességét a tiszta gördülés elkezdésekor, az (1)-es, (2)-es és (3)-as összefüggésekből alkotott egyenletrendszerből kapjuk meg:

$$v_2'' = \frac{m \cdot r^2}{I + m \cdot r^2} \cdot v_2' = \frac{5}{7} \cdot v_o \cdot \sin\theta \quad \text{illetve} \quad \omega_2'' = \frac{5}{7} \cdot \frac{v_o}{r} \cdot \sin\theta$$

Az eredetileg nyugalomban levő 2-es golyó egyenesvonalú mozgást fog végezni az O_1Y tengely (centrális) mentén v_2'' sebességgel, és közben forogni is fog ω_2'' szögsebességgel.

Lássuk most, hogy hogyan alakul az 1-es golyó mozgása ütközés után? Ez a centrálisra merőleges v_1' sebességgel és a v_o sebesség irányára merőleges tengely körül ω_o szögsebességgel forogva, csúszva indul. Az ω_o -nak az O_1Y tengely menti

$$\omega_{1y}' = \omega_o \cdot \cos\theta$$

komponense éppen a tisztán gördülés feltételét biztosítaná a

$$v_{1x}' = v_{1x} = v_o \cdot \cos\theta$$

sebességhez. Az ω_o szögsebességnek az O_1X tengelyre eső

$$\omega_{1x}' = \omega_o \cdot \sin\theta$$

összetevője miatt azonban a golyó megcsúszik, és a 6. ábrának megfelelő súrlódási erő miatt szögsebessége csökkenni, a centrálisba eső (eredetileg zérus) sebessége pedig növekedni kezd az alábbi összefüggéseknek megfelelően:

$$\omega_{1x}'' = \omega_{1x}' - \frac{F_s \cdot r}{I} \cdot t = \omega_o \cdot \sin\theta - \frac{\mu \cdot m \cdot g \cdot r}{I} t, \quad (4)$$

$$v_{1y}'' = \frac{F_s}{m} \cdot t = \mu \cdot g \cdot t \quad (5)$$

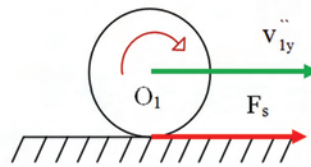
Az 1-es golyó O_1X tengely menti szögsebessége és az O_1Y menti sebessége addig változik, míg a tiszta gördülés

$$\omega_{1x}'' \cdot r = v_{1y}'' \quad (6)$$

feltétele nem teljesül. A (4)-es, (5)-ös és (6)-os összefüggésekből alkotott egyenletrendszerből arra az eredményre juthatunk, hogy az 1-es golyónak a centrálisra merőleges szögsebesség komponense az

$$\omega_{1x}'' = \frac{I}{I + m \cdot r^2} \cdot \omega_o \cdot \sin\theta = \frac{2}{7} \cdot \omega_o \cdot \sin\theta = \frac{2}{7} \cdot \frac{v_o}{r} \cdot \sin\theta$$

értékre csökken, a centrálisba eső sebesség összetevője pedig



6. ábra

$$v_{ly}'' = \frac{I \cdot r}{I + m \cdot r^2} \cdot \omega_0 \cdot \sin\theta = \frac{2}{7} \cdot v_0 \cdot \sin\theta$$

nagyságúra nő. Így az 1-es golyó a 7. ábrán felülnézetből látható pályát futja be és az eredeti irányhoz (az O_1X tengely irányához) képest δ szögben eltérő irányba mozog,

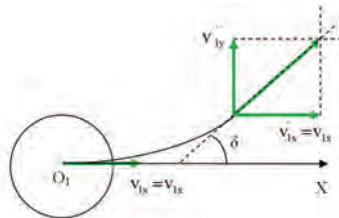
$$\text{ahol } \operatorname{tg} \delta = \frac{v_{ly}''}{v_{lx}''} = \frac{2}{7} \cdot \operatorname{tg} \theta$$

A kapott eredmény azt mutatja, hogy a tökéletesen rugalmas biliárdgolyók habár az ütközés után egymásra merőleges irány szerint indulnak el, de a biliárdasztal posztójával való súrlódás miatt végül a két golyó mozgásiránya 90° -nál kisebb szöget fog alkotni, a két irány közötti szög $\alpha = 90^\circ - \delta$ lesz.

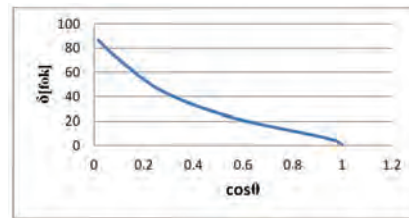
Érdeemes felfigyelni arra, hogy a δ értéke csak a θ szögtől függ, és a súrlódás jellegétől független. A súrlódás nagysága csak a 7. ábrán látható pálya görbe szakaszának a hosszát befolyásolja. A 8. ábrán a δ szög elméletileg várható értékét láthatjuk a

$$\cos\theta = \frac{d}{2r}$$

függvényében.



7. ábra



8. ábra

Forrásanyag:

1. Horváth Gábor, Juhász András, Tasnádi Péter: Mindennapok fizikája, ELTE TTK Továbbképzési Csoportjának kiadványa, Budapest, 1989
2. hu.wikipedia.org/wiki/Biliárd

Ferenczi János
Nagybánya

Kémia történeti évfordulók

I. rész

A Kémia történeti évfordulók című rovatban tisztelettel emlékezünk az elmúlt idők kiemelt természettudós és vegyészeire, akiknek szerepe volt a kémia tudomány alaptörvényeinek felismerésében, a vegyészoktatás színvonalas megszervezésében világszerte, a természetes anyagok minél jobb megismerésében, vagy mesterséges előállításában olyan céllal, hogy azok az emberiség hasznára válhassanak, életminőségét javíthassák. Átolvasva ezeket a rövid, vázlatos megemlékezéseket, számos, az előző években tanult természettudományos fogalom, törvényszerűség megalkotásának, a kémiai elemek felfedezésé-