A fizika feladat megoldásának ellenőrzése

II. rész

C. Az intuitív megoldás módszere**.**

Egy feladat intuitív megoldása abból áll, hogy kell látni a feladat dinamikáját, a történéseket, megérezni a helyzet alakulását, megsejteni a folyamat kimenetelét, anélkül, hogy megoldanánk a feladatot. R.P. FEYNMANN Nobel díjas fizikus is mondja, hogy egy feladat intuitív megoldása teljesen matematikátlan, de feltétlenül szükséges egy fizikus számára. Ha megsejtjük a folyamat kimenetét, akkor *gyanítjuk, hogy a végeredmény hogyan kell függjön az adatoktól*, ami máris egy információ a végeredmény képletéről, hogy körülbelül milyen kellene legyen.

C.1 példa. A BOYLE-MARIOTTE törvény: $p\cdot V$=állandó. Valahogyan érezzük (valószínűleg a mindennapi élet tapasztalatából: például a biciklikerék, vagy egy luftballon felfújásakor), hogy ha a levegőt összenyomjuk (azaz csökkentjük a térfogatát), egyre nehezebb összenyomni (növekszik a nyomása). Tehát a nyomás fordítottan kellene arányos legyen a térfogattal, azaz $p\sim 1/V$, ami megfelel a $p\cdot V$=állandó képletnek.

C.2 példa. A hőmérséklet kinetikus magyarázata (a gázok esetében). Tudjuk, hogy egy gáz p nyomása arányos a T hőmérsékletével.

Másrészről, egy gáz nyomása (mondjuk a tartály falára) arányos a gázmolekulák erejével amellyel nekiütköznek a tartály falának: $p=F/S=\Delta p/\Delta t\cdot S=\Delta(mv)/\Delta t\cdot S$, és innen látható, hogy arányos a gázmolekulák v sebességével; és a nyomás még egyszer arányos a gázmolekulák v sebességével, ugyanis ha nő a sebességük, nő nemcsak az ütközések ereje, de az ütközések száma is a tartály falával. Tehát a nyomás arányos kétszer a sebességgel, azaz arányos v^2-el, és mivel a nyomás arányos a T-vel, következik hogy T arányos v^2-el.

Az intuitív megoldás módszere fordítva is alkalmazható: amikor kiszámítottuk az eredményt, megpróbáljuk „értelmezi", „látni" a képletét: változtatunk benne bizonyos változókat, és megfigyeljük, hogy a képlet szerint hogyan változik a végeredmény. Ha úgy változik, ahogyan mi intuitív módon érezzük, hogy kellene változzon, akkor valószínűleg hogy jó lehet a végeredmény. Ha látjuk, hogy a képlet más eredményt ad, mint ahogyan mi érezzük, hogy kellene legyen, akkor érdemes átnézni, nem tévedtünk-e valahol.

Például gyakori eset, amikor a feladat intuitív megértéséből gyanítjuk, hogy változtatva egyik adatot, a végeredménynek kell legyen egy minimuma (vagy maximuma). Ha ez tükröződik a végeredmény képletében is, akkor a megoldás helyes lehet; ha nem, akkor át kell nézni a megoldásunkat, mert hibás. Íme, egy példa erre:

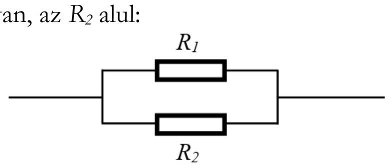
C.3 példa. Számítsuk egy mennyi idő alatt csúszik le egy test egy lejtőn, mely alapjának a hossza l, a lejtő szöge pedig a. Feltételezzük, hogy az eredményünk $t=\sqrt{(2l/g\cdot sin\ a\ cos\ a)}$. Jó lehet-e ez a képlet? Változtassuk a lejtő szögét, és nézzük meg intuitív módon, mi történik. Ha α nagyon kicsi, akkor a lejtő nagyon lapos, a testnek nagyon kicsi a gyorsulása, rengeteg időre van szüksége, hogy leérjen a lejtőn, $t\longrightarrow\infty$. Ha a lejtő nagyon meredek, akkor a test majdnem szabadon esik, de a lejtő nagyon magas lesz ($h=l\cdot tga$), így megint rengeteg időre van szüksége, hogy leérjen, $t\longrightarrow\infty$. Ez azt jelenti, hogy a lecsúszási időnek kell legyen valahol egy minimuma a két végtelen idő között. Tehát a végeredmény képletünkben is kell legyen egy minimum. De ezt nehéz meglátni a képletben. Ha viszont egy kicsit átírjuk $t=\sqrt{(4l/g\cdot sin2a)}$ formába, akkor máris látszik a minimum: a nevezőnek van egy maximuma ($sin2a=1$), és ekkor van a képlet értékének a minimuma. Tehát a képletünkben is van egy minimum, az eredmény helyes lehet.

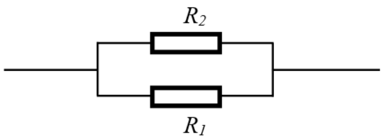
Az intuitív módszer nagyon összefügg az előző (sajátságos esetek) módszerrel, ugyanis a kiválasztott sajátságos esetekben ugyancsak ráérzéssel, intuícióval találjuk ki az eredményt.

D. A szimmetria módszer**.**

A szimmetria azt jelenti, hogy ha egy feladatban két „szimmetrikus" elemet felcseréljük, a feladat lényege nem kell megváltozzon. Ez azt jelenti, *hogy a csere után a végeredmény képlete is ugyanaz kell maradjon*. És ebből következik a módszer: a feladatban felcserélünk két elemet, vagy adatot, (amelyekről intuitív módon látjuk, hogy „szimmetrikusak"), és a végeredmény képlete ugyanaz kellene maradjon. Ha nem marad ugyanaz, az eredmény biztosan hibás!

D1 példa. Párhuzamosan kapcsolunk két ellenállást (R_1 és R_2). Mondjuk az R_1 felül van, az R_2 alul:





A kapcsolás ellenállására a következő eredményt kapjuk: $R=R_1R_2/(R_1+R_2)$. Jó lehet-e a képlet?

Ez az eredmény sikeresen átmegy a mértékegység módszeren, és a sajátságos eset módszeren is (pl. $R_1=0$, vagy $R_1=\infty$, vagy $R_1=R_2$). Alkalmazzunk a szimmetria módszert is.

Érezzük, hogy ha az R_1 és R_2-t felcserélnénk, a helyzet ugyanaz lenne. Mintha valaki csak egyszerűen fejre állna, és úgy nézné a két ellenállást. Ettől nyilván az eredmény nincs miért megváltozzon, ugyanaz kell legyen. Cseréljük fel a megoldásban a két ellenállást (a két adatot), és nézzük meg, az eredmény (R') ugyanaz-e.

$R'=R_2R_1/(R_2+R_1)$=(a szorzás is, az összeadás is kommutatív)= $R_1R_2/(R_1+R_2)=R$

Tehát az eredmény ugyanaz, a megoldás helyes lehet.

Feltételezzük, hogy egy más eredményt kapunk a feladatra: $R=R_1^2R_2/(R_1^2+R_2^2)$. Jó lehet-e a képlet?

Ez az eredmény is sikeresen átmegy a mértékegység módszeren. A sajátságos esetek módszeren is átmegy ($R_1=0$; $R_1=\infty$; $R_1=R_2$), akárcsak az előző megoldás. Akkor vajon jó az eredmény? A szimmetria módszeren viszont megbukik: $R'=R_2^2R_1/(R_2^2+R_1^2)=R_1R_2^2/(R_1^2+R_2^2)\neq R$. Tehát az eredmény nem jó.

Vajon miért nem jöttünk rá a hibára már a sajátságos esetek módszerénél, amelyről állítottuk, hogy a legjobb módszer? Keressünk más sajátságos eseteket is, hátha túl keveset ellenőriztünk. Nem foglalkoztunk az R_2-vel. Az $R_2=0$ eseten átmegy ($R_{fejből}=0$, $R_{képlet}=0$), de az $R_2=\infty$ esten (ez azt gyakorlatilag jelenti, hogy az R_2-nél a drót meg van szakítva) már nem megy át: $R_{fejből}=R_1$, $R_{képlet}=0$! Összesítve az öt sajátságos értéknél négy esetben jónak tűnt a képlet, az ötödik esetben derült ki, hogy nem jó. Emiatt fontos minél több sajátságos esetet kitalálni, mert lehet, hogy egyeseken átmegy, pedig a képlet nem jó.

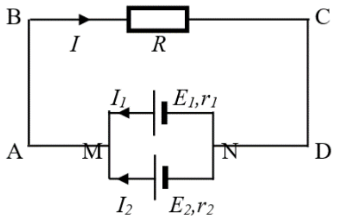
D2 példa. A gázkeverék DALTON törvénye. Számítsuk ki két gáz (p_1, V_1 és p_2, V_2) tartályainak összekötése után a gázkeverék nyomását (a gázok azonos hőmérsékleten vannak). Feltételezzük, hogy a számítások után $p=(p_1V_1+p_2V_2)/(V_1+V_2)$ eredményt kapjuk. Jó lehet-e?

Eléggé nyilvánvaló, hogyha a tartályokat kicseréljük, és úgy kötjük össze, az eredmény ugyanannyi kellene legyen, hiszen a helyzet úgy néz ki, mintha átmentünk volna a tartályok túlsó oldalára, és onnan néznénk őket. Alkalmazva a kapott képletet: $p_{szimmetrikus}=(p_2V_2+p_1V_1)/(V_2+V_1)$. És valóban, mivel az összeadás és a szorzás kommutatív, a két eredmény azonos.

Sőt, az eredmény azonos kell legyen, ha előzőleg csak a gázokat cseréltük volna ki a két tartályból, hiszen mindegy kell legyen, hogy melyik tartályokból kevertük össze a gázokat. E csere után az első tartályban a gáz állapota: V_1; $p'_1=p_2V_2/V_1$; a második tartályban: V_2; $p'_2=p_1V_1/V_2$.

Behelyettesítve ezeket az adatokat az ellenőrizendő képletbe,
$p_{szimmetrikus}=(p'_1V_1+p'_2V_2)/(V_1+V_2)=(p_2V_2/V_1\times V_1+p_1V_1/V_2\times V_2)/(V_1+V_2)=$
$=(p_2V_2+p_1V_1)/(V_1+V_2)=(p_1V_1+p_2V_2)/(V_1+V_2)=p$. Tehát ugyanaz.

Nagyon fontos tanulság a szimmetria módszerből: egy feladat esetében már úgy készítsük a rajzot, és úgy jelöljük a mennyiségeket a rajzon (nyilván csak akkor, ha ebben szabadságunk van), hogy lehetőleg szimmetrikus legyen. Ugyanis akkor a kapott egyenletek is, és maga a megoldási folyamat is szimmetrikus lesz, ami segít a hibamentes munkában (ha egy közbeeső képlet nem szimmetrikus, biztosan hiba csúszott be a számításoknál). És nyilván az eredmények is szimmetrikusak kell hogy legyenek. Ha nem lesznek azok, akkor valószínűleg valahol hibáztunk. Nézzünk erre egy példát.



D3 példa. Adva van két áramforrás (E_1, r_1 és E_2, r_2), amelyeket párhuzamosan kapcsolunk (azonos pólusaikkal kapcsoljuk össze), és az eredő kapcsolásra kötünk egy R ellenállást. Oldjuk meg az áramkört (azaz számítsuk ki minden ágban az áramerősségeket).

Be kell jelöljük az áramkörbe a kiszámítandó áramerősségeket. Ezt megtehetjük bárhogy. De használjuk ki a feladat adatait, és ehhez képest jelöljük „szimmetrikusan" az áramerősségeket: az E_1-en keresztül I_1, az E_2-n keresztül I_2, és a főáramkörben (az R-en keresztül) I.

A KIRCHOFF első törvénye egyik csomópontban (egy független csomópont van):

N csomópont: $I=I_1+I_2$.

(a második csomópontra már nem írjuk fel, mert ugyanez lesz, tehát az már nem független csomópont, így nem független egyenlet)

A KIRCHOFF második törvénye a két hurokra (két független hurok van):

ME_1NE_2M hurok: $-E_1+E_2=-I_1r_1+I_2r_2$

$MABRCDNE_1M$ hurok: $E_1=IR+I_1r_1$

Három egyenletünk van, három ismeretlennel (I, I1, I2):

$I=I_1+I_2$

$-E_1+E_2=-I_1r_1+I_2r_2$

$E_1=IR+I_1r_1$

Az egyenletrendszer megoldható. De már látjuk, hogy sok munka lesz vele, nagyon kell figyelnünk a számításokra, mert fenn áll a veszélye annak, hogy valamelyik indexet elírjuk vagy rosszul olvassuk, és a végeredmény hibás lesz.

Alkalmazzuk a szimmetria módszert: válasszuk ki úgy a két hurkot, hogy az egyenleteik hasonlóak (szimmetrikusak) legyenek:

MABRCDNE$_1$M hurok: $E_1=IR+I_1r_1$

MABRCDNE$_2$M hurok: $E_2=IR+I_2r_2$

Akkor a három egyenletünk:

$I=I_1+I_2$

$E_1=IR+I_1r_1$

$E_2=IR+I_2r_2$

Ezt az egyenletrendszert már sokkal könnyebb megoldani, éppen a szimmetriája miatt. És alkalmazzuk a szimmetria elvet magára a megoldására is: ne számítsuk ki mondjuk az I_1-et az elsőből és helyettesítsük be a következő két egyenletbe, hanem I_1-et a másodikból ($I_1=E_1\text{-}IR/r_1$), I_2-t a harmadikból (ezt már nem is kell számítsuk, hanem az egyenletek hasonlósága miatt az előzőben az 1-es index helyett 2-est teszünk: $I_2=E_2\text{-}IR/r_2$), és behelyettesítjük őket a tőlük teljesen különböző egyenletbe, az elsőbe:

$I= E_1\text{-}IR/r_1+ E_2\text{-}IR/r_2$

Ebben már csak az I ismeretlen, kiszámítjuk: $I=(E_1+E_2)/(1+R/r_1+R/r_2)$, majd ennek segítségével az I_1-et és az I_2-t, és meg van oldva az egyenletrendszer. A szimmetrikus jelölés és megoldásmenet miatt az eredményekben is van szimmetria, így kicsi a valószínűsége, hogy valamely indexet elírjuk vagy rosszul olvassuk, hiszen tudjuk fejből, hogy az eredmények szimmetrikusak kellene legyenek. És a feladatunkban azok is.

E. Analógiák módszere.

Azoknak a feladatoknak, amelyek *hasonló (analóg) fizikai mennyiségekre vonatkoznak, hasonlóaknak kell lennie a megoldásuknak.*

Ez a módszer úgy alkalmazható, hogy keresünk a feladatban megadott mennyiséggel egy másik, de vele „analóg" (hasonlóan viselkedő) fizikai mennyiséget. Ez lehet teljesen más jellegű fizikai mennyiség, csak a viselkedése kell kegyen hasonló. Hogyha az analóg helyzetnél ismerjük az eredményt, akkor a feladatunkban kapott eredmény is kell hasonlítson az ismert eset képleteihez.

E.1 példa. Vezessük le két rugó (k_1 és k_2) soros kapcsolási képletét.

A rugó esetében az ok a rugóra ható erő (F), az okozat a rugó megnyúlása (x). Az ok-okozati kapcsolat (az okozat függése az októl): $x=(1/k)\times F$. Ezzel analóg helyzet egy elektromos kondenzátor feltöltése elektromossággal, ahol az ok a kondenzátorban felhalmozott töltésmennyiség (Q), az okozat a kondenzátoron megjelenő feszültség (U), Az ok-okozati kapcsolat: $U=(1/C)\times Q$. Látható, hogy a k és a C egyformán szerepel a képletben (a nevezőben találhatók), a két fizikai jelenség hasonló. Akkor, ha a kondenzátorok soros kapcsolási képlete (ezt tudjuk fejből) $1/C=1/C_1+1/C_2$, ugyanilyen kell legyen a rugók soros kapcsolási képlete is: $1/k=1/k_1+1/k_2$. Nyilván hasonló kell legyen a párhuzamos kapcsolásuk képlete is ($C=C_1+C_2$, illetve $k=k_1+k_2$).

E.2 példa. Számítsuk ki, mekkora mechanikai munkára van szükség, hogy egy m tömegű testet elvigyünk a Föld felszínéről a végtelenbe (adott a Föld sugara és tömege: R, M).

A gravitációs mezőhöz nagyon hasonlít az elektrosztatikus mező, ugyanis mindkettő a távolság négyzetével csökken (a pontszerű testek esetében). A tömegnek (m) megfelel az elektromos töltés (Q). Az elektrosztatikus mező esetében ismerjük az elektromos térerősség képletét: $E=kE\cdot Q/r2$. A gravitációs mezőnél is ismerjük a gravitációs térerőség képletét, $\Gamma=f\cdot M/r2$, amely valóban hasonlít az elektromos térerő képletéhez, csak az állandók mások. Az elektrosztatikus mezőnél ismerjük elektromos potenciál képletét: $V=kE\cdot Q/r$. Az elektromos potenciál nem más, mint az mechanikai munka, ami szükséges, hogy elvigyünk egy egységnyi töltést az adott pontból a végtelenbe (ahol már nincs elektrosztatikus mező): $L=V$. Ha nem egységnyi töltésünk van adva, hanem q, akkor az L munka: $L=V\cdot q=kE\cdot qQ/r$. Az analógia alapján ugyan úgy kell létezzen egy gravitációs potenciálnál is: $\varphi=f\cdot M/r$, melynek ugyanaz az értelme. És ebben a pillanatban máris meg van oldva a feladat: az $L=V\cdot q$ mintájára $L=\varphi\cdot m$, azaz $L=f\cdot Mm/R$, ahol M a pontszerűnek tekintett Föld tömege, m a test tömege, és R a Föld sugara, ahonnan elindul a test a végtelenbe.

Ugyanígy működik a módszer, ha nem analóg, hanem „fordított" mennyiségeket találunk: az eredmények is „fordítottak" kell legyenek.

E.3 példa. Számítsuk ki két párhuzamosan kapcsolt kondenzátor (C_1 és C_2) eredő kapacitását.

A kondenzátor esetében már tárgyaltuk az ok-okozati összefüggést: $U=(1/C)\times Q$. Ehhez hasonlít az ellenálláson az ok-okozati összefüggés (OHM törvénye): $U=R\times I$. Látható, hogy míg az ellenállás esetében az arányossági tényező az „R" ellenállás, a kondenzátornál a kapacitás fordítottja: „$1/C$". Ilyen értelemben „fordítottak" ezek a mennyiségek. Az ellenállások esetében ismerjük fejből az ellenállások párhuzamos kapcsolási képletét: $1/R=1/R_1+1/R_2$. Mivel az $1/R$-nek megfelel a C, következik az ugyancsak párhuzamos kapcsolásnál: $C=C_1+C_2$, tehát ezt a képletet kellene kapjuk a feladat megoldásában.

F. Becslési módszer**.**

A kapott eredmény számszerű felbecslése is adhat némi képet arról, hogy jó lehet-e az eredmény vagy biztosan hibás. Ez a számítás nem muszáj pontos legyen, elég csak nagyságrendileg kiszámolni, mert így sokkal gyorsabban is megy. Például ha egy oxigén atom tömegének 30 tonna jön ki, akkor biztosan hibáztunk valahol, mert tudjuk fejből, hogy egy atom tömege nagyon kicsi. Vagy ha egy anyag törésmutatója 13-nak jön ki, hibáztunk, mert tudjuk, hogy a törésmutatók általában kisebbek, mint 2 (a gyémánté nagyobb, mint 2).

Ez a módszer akkor jó, amikor az eredmény átmegy az összes többi ellenőrzési szűrőn. És az az előnye is megvan, hogy olyan feladatokra is alkalmazható, amelyeknél kizárólag számokkal dolgozunk, így nem lehet alkalmazni rá a képletek ellenőrzési módszereit.

Feladatmegoldások közben más ellenőrzési módszereket is kitalálhatunk, és nagyon hasznos az alkalmazásuk, mert segítségükkel felfedezhetünk akár banális hibákat is a megoldásunkban, ami könnyen kijavítható lenne, ha tudnánk, hogy van. Ha ezt nem tesszük meg, akár egy érettségi vagy felvételi versenyvizsga bukhat rajta.

Miholcsa Gyula