

# fizikai szemle

Eötvös 175 emlékév  
Fizikai Nobel-díj 2023  
Mikrofluid rendszerek



2023/11

nka

# Fizikai Szemle

MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

A Matematikai és Természettudományi Értesítőt az Akadémia 1882-ben indította  
A Matematikai és Fizikai Lapokat Eötvös Loránd 1891-ben alapította

Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat havonta megjelenő folyóirata.

Támogatók: a Magyar Tudományos Akadémia Fizikai Tudományok Osztálya, az Emberi Erőforrások Minisztériuma, a Magyar Biofizikai Társaság, a Magyar Nukleáris Társaság és a Magyar Fizikushallgatók Egyesülete

Főszerkesztő:  
Iglói Ferenc

Szerkesztőbizottság:

Asbóth János, Biró László Péter, Czitrovsky Aladár, Gyürky György, Horváth Dezső, Horváth Gábor, Kiss Ádám, Kopasz Katalin, Néda Zoltán, Ormos Pál, Pálfalvi László, Rábóczi Bence, Simon Ferenc, Simon Péter, Sükösd Csaba, Szabados László, Szabó Gábor, Takács Gábor, Trócsányi Zoltán, Ujvári Sándor

Olvasószerkesztő:  
Bodrog Zoltán

Technikai szerkesztő:  
Hock Gábor

A folyóirat e-mail címe:

szerkesztok@fizikaiszemle.hu

A lapba szánt írásokat erre a címre kérjük.

A beküldött tudományos, ismeretterjesztő és fizikatanítási cikkek a Szerkesztőbizottság, illetve az általa felkért, a témában elismert szakértő jóváhagyó véleménye után jelenhetnek meg.

A folyóirat honlapja:

<http://www.fizikaiszemle.hu>



A címlapon:

Eötvös Loránd szobra,  
Rieger Tibor szobrászművész alkotása  
a Budapest XII. kerületi Gesztenyés kertben,  
állította az Eötvös Loránd Geofizikai Alapítvány  
(fotó: Szarka László Csaba)

## TARTALOM

Cserti József, Dávid Gyula: Eötvös mágikus száma 369  
*Gravitációs kutatásainak eredményeit összefoglaló 1896-os akadémiai előadásában és az azt közlő cikkben Eötvös Loránd más kísérletek mellett azt is leírta, hogyan batározta meg a gravitációs állandót két nagy tömegű test között elhelyezett torziós inga lengési idejének mérése alapján.*

*A cikkben közölt képletben szerepel egy furcsa szorzótényező (13,427), melynek levezetését sem Eötvös, sem a későbbi irodalom nem közli. A leírásból az sem derül ki, hogy a korábban használt gömbök helyett ez esetben miért a sokkal bonyolultabban kiszámolható gravitációs terű téglalatest alakú ólomtömbökkel dolgozott. A szerzők ezeknek a kérdéseknek jártak utána, rekonstruálva a kísérlet tervezésekor követett gondolatmenetet. Valószínűsíthető, hogy Eötvös legalább annyi kutatási időt fordított alapos elméleti számításokra és tervezett mérési apparátusa előzetes optimalizálására, mint a berendezés megépítésére és a tényleges mérésekre.*

Bányai Anita, Bató Lília, Leelössyné Tóth Eszter, Varga Máté, Fűrjes Péter: Áramlástanai jelenségek mikroszkopikus mérettartományban – mikrofluidikai rendszerek és alkalmazásai 383

*A mikrofluidikai rendszerek 1–100  $\mu\text{m}$  közötti keresztmetszeti méretekkkel rendelkező csatornákat tartalmazó, kis mennyiségű folyadék (pl.  $\mu\text{l} - 10^{-15}$  Liter) manipulálására alkalmas mikroszerkezetek. Maga a mikrofluidika jelentése egyszerre fedi le a mikrométeres karakterisztikus méretekkkel rendelkező csatornákból kialakuló áramlások hidrodinamikai jellemzőivel, illetve azok vizsgálatával foglalkozó tudományágat, valamint a miniatürizált áramlási rendszerek (csatornák, kamrák stb.) kialakítási technológiáját és a kialakított eszközök alkalmazásait.*

## REFLEKTORFÉNYBEN

Dombi Péter, Varjú Katalin: Krausz Ferenc, az attofizika úttörője 390

*A 2023. évi fizikai Nobel-díjat Pierre Agostini, Krausz Ferenc és Anne L'Huillier kapta az attoszekundumos fényimpulzusokat generáló kísérleti módszerekért, melyek az anyagokbeli elektronok dinamikájának tanulmányozására szolgálnak.*

## A FIZIKA TANÍTÁSA

Patkós András: A párhuzamosok időnként durván egymásba metszenek (Eötvös Loránd és Kármán Tódor) 394

*Eötvös Lorándnak és Kármán Tódornak a tanári személyiségre vonatkozó nézetei lényegesen különböztek. Eötvös a szaktudományi ismeretek elsőbbségét vallotta. Kármán Tódor az iskola elsődleges feladatát a diákok személyiségének fejlesztésében látta.*

Sükösd Csaba: XXVI. Országos Szilárd Leó Fizikaverseny – 3. rész 396

## HÍREK – ESEMÉNYEK

Szarka László Csaba: A budapesti Eötvös 175 emlékhelytúra 402

Pályi András: Emléktábla-avatóbeszéd 404

J. Cserti, Gy. Dávid: The magic number of Eötvös

A. Bányai, L. Bató, E. Leelössyné Tóth, M. Varga, P. Fűrjes: Flow phenomena in the microscopic size range – microfluidic systems and their applications

## IN THE SPOTLIGHT

P. Dombi, K. Varjú: Ferenc Krausz, pioneer of the attophysics

## TEACHING PHYSICS

A. Patkós: The parallels rudely intersect from time to time (Roland Eötvös and Theodore von Kármán)

Cs. Sükösd: XXVIth National Leo Szilárd Physics Competition – Part 3

## EVENTS

L. Cs. Szarka: The Eötvös 175 memorial tour in Budapest

A. Pályi: Plaque-inauguration speech

Fizikai Szemle  
MAGYAR FIZIKAI FOLYÓIRAT

megjelenését támogatják:



EMBERI ERŐFORRÁSOK  
MINISZTERIUMA



Nemzeti Kulturális Alap



group  
m  
v  
m



ÓTTÓHÁZI VÁROS  
FERENCVÁROS



A FIZIKA BARÁTAI

# EÖTVÖS MÁGIKUS SZÁMA

Cserti József – ELTE, Komplex Rendszerek Fizikája Tanszék  
Dávid Gyula – ELTE, Fizikai Intézet

## Bevezetés

Einstein egyszer azt írta, hogy szeretné megismerni Isten gondolatait – értve ezen a természet törvényeinek logikáját. Mi ennél szerényebb célt tűztünk ki magunk elé: szeretnénk megismerni vagy legalábbis nagy valószínűséggel rekonstruálni az egyik legnagyobb magyar fizikus, Eötvös Loránd gondolatait, amelyek egyik nevezetes kísérlete, a gravitációs állandó pontos mérésének megtervezése során vezették.

## Eötvös Loránd és a torziós inga

Eötvös Loránd (1848. július 27. – 1919. április 8.) kísérleti fizikusi kutatómunkája mellett igen aktív közéleti ember, tudománypolitikus is volt: egyetemi tanár, új egyetemi intézetek és épületek megálmodója és megépíttetője, egy ideig a Tudományegyetem rektora, a Matematikai és Fizikai Társulat (a mai ELFT elődje) és *Mathematikai és Fizikai Lapok*, a BEAC egyetemi sportklub, valamint az apjáról, Eötvös Józsefről elnevezett tehetségnevelő kollégium megalapítója, az Akadémia elnöke, oktatási miniszter, e minőségében népiskolák létrehozója, a Matematikai és Fizikai Tanulóverseny elindítója és szponzora, emellett jeles és elkötelezett tudománynpszerűsítő, valamint túrázó és sportember (a Dolomitokban ma is egy csúcs őrzi a nevét). Változatos pályafutásáról jó képet ad a halálának 100. évfordulója alkalmából, az Eötvös-émlékében [1], 2019-ben a Kossuth Kiadó gondozásában megjelent kitűnő, igényesen szerkesztett emlékalbum [2].

Idén, 2023-ban születésének 175. évfordulóját ünnepljük [3]. Ez ismét alkalmat ad arra, hogy egyes munkáinak részleteiben elmerülve megcsodáljuk kutatói igényességét, kreativitását, gondosan és precízen elvégzett kísérleteit, melyeket elmélyült elméleti analízis és a pontosság optimalizálására irányuló számítások előz-

tek meg. Ezt a cikkünket az évforduló alkalmából írtuk, tisztelegve Eötvös munkássága és példája előtt.

Eötvös kísérleti fizikusi munkájának nagy része az általa hihetetlen mértékben továbbfejlesztett és számos speciális mérésre alkalmassá tett Cavendish-féle ingához kapcsolódik. Henry Cavendish (1731–1810, egyebek között a hidrogén felfedezője) az 1790-es években építette meg torziós ingáját, mellyel megmérte a Newton-féle gravitációs törvényben szereplő állandót (ezt a mennyiséget e cikkben a hagyományos és a geofizikai irodalomban máig szokásos jelölésmódot követve  $f$ -fel jelöljük) – ezzel közvetett módon, Kepler 3. törvényének segítségével kiszámíthatóvá vált a Föld, a Nap és a Jupiter tömege. Cavendish torziós ingája egy függőleges fémszálon függő vízszintes rúdból állt, melynek két végére szimmetrikusan elhelyezve egy-egy kis fémgolyót erősített. A golyók közelébe helyezett nagyobb fémgolyók gravitációs vonzása elforgatta az ingát. A torziós szál direkciós erejének ismeretében a golyók új egyensúlyi helyzetéből meg lehetett határozni a rájuk ható gravitációs vonzóerőt, és a testek tömegének ismeretében ebből Cavendish kiszámította a newtoni gravitációs állandót (pontosabban szólva Cavendish a Föld átlagsűrűségének értékét adta meg, ebből már következik a gravitációs állandó értéke). Az elvileg pofonegyszerű kísérlet nehézségét a rendkívül kis erőhatások pontos mérése és az eközben fellépő számos zavaró tényező kiküszöbölése, illetve számításba vétele jelentette. Nem véletlen, hogy az alapvető természeti állandók (pl. fénysebesség, Planck-állandó, elemi töltés, Avogadro-szám stb.) közül ma is a gravitációs állandót ismerjük a legkisebb pontossággal. Cavendish eredménye az utólagos rekonstrukció szerint a gravitációs állandó ma ismert értékét néhány százalékos pontossággal közelítette meg. (Ma már természetesen sok más, modernebb és pontosabb módszerrel is méri a gravitációs állandót. Ezek áttekintésére lásd pl. a [4] vagy [5] cikket.)



Cserti József 1982-ben végzett ELTE fizikus szakán, majd az ELTE korábbi Szilárdtest-fizika Tanszékén kezdte oktatói munkáját. 2004-ben habilitált, 2010 óta az MTA doktora, 2013-tól az ELTE Komplex Rendszerek Fizikája tanszéken professzor. Kutatási területe a nanofizikai rendszerek, normál-szupravezető rendszerek, spintronika, grafén és a topologikus szigetelők. 2005 óta szervezi az ELTE-n az „Atomoktól a csillagokig” előadás-sorozatot középiskolásoknak.



Dávid Gyula több mint 42 éve oktatja az ELTE fizikus hallgatóit. Kutatómunkájában relativisztikus dinamikával foglalkozik. A NYIFFF fizikaverseny alapítója, az Ortway Rudolf Fizikaverseny és az „Atomcsill” előadás-sorozat társszervezője, ez utóbbinak sokszoros előadója. Számos ismeretterjesztő fizikai és kozmológiai előadása terjed a neten. Hisz abban, hogy a fizikusok világnagy esze előbb-utóbb betölti a táguló teret – ahogy az a *Fizikus nótában* is szerepel (amelyet nem mellékesen ő írt).

Egy évtizeddel Cavendish mérései előtt hasonló torziós mérleggel végezte el az elektrosztatika alapvető kísérleteit Charles Augustin Coulomb (1736–1806), megmérve az elektromosan töltött testek között fellépő erőhatásokat. Eötvös következetesen Coulomb-mérlegnek nevezte az általa tökéletesített mérőeszközt. (Coulomb és Cavendish kísérleteiről részletesebben írtunk a *Fizikai Szemle* 2020. novemberi számában megjelent, az Eötvös munkásságához kapcsolódó középiskolai és egyetemi versenyfeladatokat ismertető cikk [6] bevezetőjében.)

A Coulomb–Cavendish-féle torziós ingával végzett mérések a gravitációs (illetve az elektromos vagy mágneses) tér inhomogenitására érzékenyek. Homogén, azaz a tér minden pontjában egyforma gravitációs térerősség esetén az ingára nem hat külső (a torziós szállban fellépőn túli) forgatónyomaték. Ilyen homogén gravitációs térrel szoktunk számolni az iskolai hajítási és szabadesési feladatokban. A valóságban azonban nem ez a helyzet: a gravitációs tér kis mértékben inhomogén, pontról pontra változó. Ez az inhomogenitás lehet természetes eredetű: a Földet alkotó kőzetek aszimmetrikus geometriai elhelyezkedéséből (pl. egy hegy jelenlétéből), illetve eltérő sűrűségéből (pl. föld alatti érc- vagy olajlelőhely) adódó. Ezt az inhomogenitást méri az Eötvös-inga geofizikában és bányakutatásban alkalmazott változata. Ebben az esetben a mérés célja a tömegeloszlás meghatározása. De az inhomogenitás lehet mesterséges eredetű is: a kísérletező ismert alakú és tömegű testeket helyez el az inga közelében, majd ezek helyzetét változtatja. Ebben az esetben a tömegeloszlás ismert, a mérés célja a képletekben szereplő paraméterek pontos meghatározása, vagy a gravitáció tulajdonságaival kapcsolatos elvontabb kérdések vizsgálata.

Az inhomogenitást mindegyik esetben az  $U(\mathbf{r})$  gravitációs potenciálmező második, térbeli deriváltjaiból álló  $H_{ij}(\mathbf{r}) = \partial_i \partial_j U(\mathbf{r})$  szimmetrikus tenzorról jellemezhetjük – Eötvös mérései ezekre az adatokra érzékenyek. A matematikában a második deriváltakból álló tenzort általában Hesse-mátrixnak nevezik. A geofizikai szakirodalom e mennyiséget olykor Eötvös-tenzornak nevezi. Emlékezzünk vissza, hogy egy  $m$  tömegű pontszerű test  $V(\mathbf{r})$  gravitációs potenciális energiája az  $U(\mathbf{r})$  erőterben  $V(\mathbf{r}) = mU(\mathbf{r})$ . A jól ismert  $\mathbf{g}(\mathbf{r})$  gravitációs térerősség az  $U(\mathbf{r})$  potenciál első deriváltja:  $\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r})$ , így a  $H_{ij}(\mathbf{r})$  tenzor a gravitációs térerősség helyi változásait méri.

Eötvös Loránd a Coulomb–Cavendish-féle torziós ingát továbbfejlesztette, pontos mérésekre alkalmas műszerré alakította, miközben alapos előzetes mérésekkel és elméleti számításokkal figyelembe vette a számos hibalehetőséget, és gondosan megtervezett kísérleteiben igyekezett ezeket kiküszöbölni. Emellett felismerte ingájának gyakorlati alkalmazhatóságát is, ezért kifejlesztett egy olyan változatot, amelyet nemcsak fizikusok, hanem a terepen dolgozó geológusok és bányamérnökök is nagy biztonsággal használhattak. Ezt az ingát először az 1900. évi párizsi viláigiállításon

mutatta be [7]. Gondot fordított arra is, hogy a berendezés elviselje a szállítással és a szélsőséges éghajlattal járó viszontagságokat, és ezek a nehézségek ne befolyásolják használhatóságát és pontosságát. A 20. század első felének érc- és olajkutatásait világszerte az Eötvös-inga valamelyik, Eötvös munkatársai és tanítványai által továbbfejlesztett változatával végezték.

Eötvös az inga felhasználásának alapötletét számos irányban kiterjesztette; ezzel lehetővé tette, hogy a berendezés egyes specializált változatait igen különböző fizikai kérdések tisztázására alkalmazhassa. A később Eötvös-ingaként ismertté vált alapváltozat a gravitációs térerősség helyi különbségeit, azaz a gravitációs potenciál második deriváltjait (pontosabban ezek közül a helyi tömegeloszlás egyenetlenségeire érzékeny, kisebb értékű komponenseket) mérte. Az e mérések kiértékelésére Eötvös által alkalmazott képlet levezetését bemutattuk a *Fizikai Szemle*-ben korábban megjelent cikkünkben [8].

Eötvös munkatársaival sok más jellegű gravitációs mérést is végzett. Egyik legnagyobb horderejű kísérletével számos anyagra igen nagy pontossággal igazolta a már Newton által is megsejtett tényt, a súlyos és a tehetetlen tömeg arányosságát. Ez a tapasztalat később az Einstein által kidolgozott általános relativitáselmélet alapja lett. (Meg kell jegyezni, hogy Einstein csak utólag ismerte meg Eötvös eredményeit, számára a kétféle tömeg azonossága és a rá épülő ekvivalenciaelv elméleti evidencia volt.) E mérés alapelvéről is írtunk idézett cikkünkben [8]. Az inga más jellegű felhasználásával Eötvös kimutatta a gravitációs erő árnyékolhatatlan voltát (szemben pl. az elektromos erővel, melyeket Faraday-kalitikával hatékonyan lehet árnyékolni). A gravitációs inga megfelelő módosításával emellett méréseket végzett az anyagok mágneses tulajdonságainak pontos meghatározására. Mindezeket a kutatásokat részletesen bemutatta az Akadémián 1896-ban elhangzott előadásában és az abból készült cikkben (melyről hamarosan még sok szó esik) [9].

Eötvös rendkívül gazdag életműve szerencsére ma már egybegyűjtve megtalálható az interneten [1, 10], és így az olvasó bővebb képet kaphat Eötvös szerteágazó tevékenységéről. Az érdeklődőknek további érdekes olvasnivalót is ajánlhatunk [11–14].

## Eötvös titkai

Eötvös több évtizeden át foglalkozott gravitációs és mágneses mérésekkel, illetve az ezekhez szükséges laboratóriumi eszközök kifejlesztésével. Eredményeit először csak rövid közleményekben ismertette, majd a Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Természettudományi) Osztályának 1896. április 20-án tartott ülésén egy igen részletes, „Vizsgálatok a gravitáció és mágnesség köréből” című „Előleges jelentésben” mutatta be. Ez a beszámoló megjelent a *Mathematikai*

és *Természettudományi Értesítő* című akadémiai kiadványban [9]. (A későbbiekben a jelöletlen forrású Eötvös-idézetek mind ebből a cikkből valók.)

Az előadás és a cikk címe azt ígéri, hogy ez csak „előleg”, egy későbbi, még sokkal részletesebb és alaposabb beszámoló előzetes kivonata. Sajnos ez a részletesebb cikk sohasem készült el, ezért amit Eötvös kísérleteiről, azok céljáról, az általa készített műszerek technikai részleteiről, a mérési eredmények kiértékelésére használt matematikai eszközökről tudunk, az nagyrészt az „Előleges jelentés” alapul. Eötvös munkatársai és tanítványai (Tangl Károly, Pekár Dezső, Fekete Jenő, Rybár István), akik részt vettek a kísérletekben és a berendezések építésében (lásd pl. [15]), majd egyes esetekben befejezték, illetve továbbfejlesztve megismételték a méréseket, a tízes évek végén, majd a húszas-harmincas években további beszámolókat írtak a különböző kísérletekről (lásd pl. [16]). Ezek azonban nagyrészt az eredeti Eötvös-cikk gondolatmenét ismétlik, kisebb kiegészítésekkel és az új eredmények bemutatásával.

Ezért száz év után is az „Előleges jelentés” a fő forrás, ha Eötvös módszereire és eredményeire, illetve az általa épített kísérleti berendezésekre kívánnak hivatkozni. A cikket többször, több nyelven újranyomták, lásd pl. angolul [11]. A beszámoló egyes fejezetei ma is kiindulópontul szolgálnak a mérések elemzése, illetve megismétlése esetén [17]. A modern cikkek általában szó szerint veszik át Eötvös szövegrészleteit és egyes képleteit. Mi is egy ilyen képletnek eredünk a nyomába.

Az „Előleges jelentés” stílusa igen érdekes és jellemző. Eötvös általában részletesen ismerteti a vizsgálandó fizikai kérdéseket, a mérés alapelvét, valamint az általa megépített és felhasznált kísérleti berendezéseket. Alapos ábrákkal mutatja be a kísérlet elrendezését (sajnos a neten elérhető, többszörösen fénymásolt és beszkenvelt változatban az ábrák alig kivehető), táblázatokban gyűjti össze a mérési eredmények átlagait, az ezekből levont következtetéseket. Emellett részletesen kitér a kísérlet során felmerült nehézségekre, hibaforrásokra, valamint a kiküszöbölésükre tett intézkedésekre. Azokban az esetekben, amikor a laboratóriumi kísérletek terepen végzett mérések egészítették ki, Eötvös leírja a terepmunka jellegét, problémáit, a felmerült akadályokat is.

Ugyanakkor rendre mellőzi a matematikai levezetések részleteit, vagy csak néhány vázlatos lépésben mutatja be a számítások alapgondolatát. Végül pedig közli a végeredményt, a mérési adatok feldolgozására alkalmas „varázsképletet”.

Ennek a módszernek az okát csak találgathatjuk. A „fizika” tudománya Eötvös korában alapvetően kísérleti fizikát jelentett. Eötvös akadémiai kollégáit, a viszonylag kevés fizikust elsősorban a kísérletek technikai részletei érdekelték – nem utolsósorban a kísérlet esetleges megismétlésére, továbbfejlesztésére való tekintettel. Másrészt valószínűleg eléggé bíztak egymás matema-

tikai képességeiben, elhitték a számítások helyes voltát – a kísérlet megismétlése esetén az eredmények kiértékeléséhez elég a végső képletet ismerni. Az utókor fizikusait viszont éppen a rejtve maradt összefüggések izgatják. Vajon milyen fizikai és matematikai megfontolások alapján vezette le Eötvös a képleteit, milyen optimalizációs eljárással méretezte kísérleti berendezését, honnan vette a képleteiben megjelenő, részletesebben nem indokolt állandókat?

Példaként idézünk két jellegzetes esetet a cikkből. A gravitációs potenciál második deriváltjainak méréséről szóló fejezetben (az „Előleges jelentés” 226. oldalán) néhány egyszerű megfontolás után hirtelen megjelenik az (5) formula, az ingára ható forgatónyomaték négyes soros képlete: „forgásmomentumát [...] a következő alakban fejezem ki”. A képlet természetesen helyes, de a származtatása nem magától értetődő. Később többen publikálták a formula levezetését az akkoriban szokásos matematikai jelölérendszerrel. A képlet modern eszközökkel történt részletes levezetését a [8] cikkben adtuk meg.

A gravitációs állandó méréséről szóló fejezetben ([9], 252. oldal) pedig a következő szövegre bukkanunk:

„A vonzó-tömegek ugyanis a rúd alatt lévő vízszintes lapon abba a helyzetbe hozhatók, a melyben hatásuk a rúdra maximális lesz. Így lesz az például golyók vonzásának esetében, ha a középpontjaikat a rúd golyóinak középpontjaival összekötő egyenesek a rúdra merőlegesen állván, a vízszintessel közel 55 foknyi szöget képeznek. Ebben a maximumnak megfelelő állásban elég, ha az egymásra ható tömegek viszonyos helyzetének meghatározásánál csak függélyes távolságuk lemérésére fordítunk gondot, ez pedig minden nehézség nélkül eszközölhető.”

Az olvasó csak pislog. Miért pont 55 fok? Honnan veszi ezt a szerző? Kijelentésként közli, tehát nekem ezt magamtól is tudnom kellene, és most csak rá kell bólintanom? Pedig nem ez a helyzet: az adat mögött bonyolult számolás és optimalizációs eljárás rejlik. Eötvös kiszámolta a berendezés általános méretezése esetén fellépő hatásokat, és végiggondolta, hogy a tényleges mérés során mely paraméterek pontos beállítása okoz nehézséget, és melyek azok az adatok, amelyek már az előzetes tervezés során rögzíthetők. Számolása során kiderült, hogy ha a kísérleti berendezés tervezése során a rúd helyzetét optimálisra méretezik, akkor a mérés során pontatlanabban beállítható más adatoktól a végeredmény csak kevésbé függ. Így a kísérlet során elkövetett esetleges hiba nem befolyásolja lényegesen a mérési eredményt.

Ez természetesen csak utólagos rekonstrukció. Egyedüli kiindulási pontunk az „Előleges jelentés”-ben szereplő fenti idézet. De ha az utókor fizikusa bízik Eötvös szövegében (mint Schliemann a Homéroszban), és utána számol, akkor óhatatlanul eljut az optimális 55 fokhoz (amely egyébként  $\arctg \sqrt{2}$  formában jelenik meg a számításban). Az „55 fok rejtélyét” kitértük a

2019. évi Ortway-verseny 2. feladataként [18], a megoldás megjelent a *Fizikai Szemle* 2020/12 számában [19].

Ez az apró példa is azt mutatja, hogy Eötvös minden mondata, pár soros megjegyzése, a mérési elrendezés terveinek részletei mögött is alapos elméleti előkészítő munka, pontos számolás és gondos tervezés rejlik. Eötvös kutatócsoportjában egy-egy kísérlet műszereinek elkészítése és beüzemelése általában hónapokig tartott, maguk a (sokszor és gondosan megismételt) mérések is hónapokat vettek igénybe. Joggal tételezhetjük fel, hogy a kísérlet eme szakaszait hasonlóan gondos, több hétig vagy hónapig tartó számítások előzték meg, amelynek során az általános elméletből kiindulva eljutottak a konkrét berendezés paramétereinek optimalizálásáig. Erről a fázisról, az előzetes számításokról azonban nem szól az „Előleges jelentés”, illetve csak néhány szóban tesz rá utalást. Ezért a kísérletekhez elvezető elméleti gondolatmenetet utólag kell rekonstruálnunk. Ennek a „nyomozásnak” egyik érdekes példája a gravitációs állandó méréséhez kapcsolódó, általunk *Eötvös-tényezőnek* nevezett numerikus paraméter rejtélye. (Megjegyezzük, hogy a kapillaritás elméletében már létezik egy „Eötvös-állandó” és egy „Eötvös-szám” nevű mennyiség is, ezért a mostani kissé esetlenebb elnevezés.)

## Az Eötvös-tényező rejtélye

A torziós ingával végzett mérések alapvetően kétfélek lehetnek: sztatikusak és dinamikusak. A sztatikus mérések során az inga vízszintes rúdjának egyensúlyi helyzetét (egy rögzített vízszintes irányhoz viszonyított szögét) kell meghatározni, majd a környezeti viszonyok megváltozása (pl. az inga közelében levő tömegek áthelyezése, illetve a torziós szál felfüggesztésének elcsavarása) után újra meg kell mérni az új egyensúlyi helyzetet. (A mérés pontosságát javítja, hogy a szögelfordulást a torziós szálra erősített kis tükörről visszaverődő fénysugár által egy távoli ernyőre vetített fénypont elmozdulásával lehet mérni.) A sztatikus mérések eredményébe bizonytalanságot visz, hogy ismerni kell (vagy külön meg kell mérni) a torziós szál direkciós nyomatékát. Ez az érték a mérések során a szál nyúlása és vékonyodása, hirtelen véletlen erőhatások, illetve a külső körülmények (pl. a hőmérséklet) változása következtében módosulhat – ez bizonytalanságot vihet az eredmények kiértékelésébe.

A dinamikus mérések során az ingát az egyensúlyi helyzet körül torziós lengésbe hozzák, és a lengésidejét mérik. Ha elég sok lengést kivárunk, a mérés pontossága nagymértékben javítható. Eötvös mérései során egy lengés ideje 600–800 másodperc volt, ami már az akkori időmérő eszközökkel is nagy pontossággal mérhető volt. Így jóval nagyobb mérési pontosság érhető el, mint az egyensúlyi kitérés meghatározása esetén.

Idézzük Eötvöst: „Világos ezekből, hogy eszközeim szerkesztésénél mindenekelőtt nagy lengési idők létesítésére kellett törekednem s ennek a megfontolásnak köszönhetem, hogy sikerült lemérnem e kicsiny erőváltozásokat, melyek kisebb lengési idejű eszközök használatánál mindeddig rejtve maradtak. Ilyen nagy 10 egész 20 percnyi s egyes esetekben még ennél is nagyobb lengési idők és eddig aligha elért érzékenység mellett mérlegrúdjaim egyensúlyi állását úgy mint mozgását bámulatosan szabályossá tudtam tenni és pedig nemcsak jól védett pinczékben, hanem a laboratóriumnak bármely helyiségében, sőt éjjel egyszerű vászon-sátor alatt még a szabadban is.”

A dinamikus módszer lehetőséget ad a korábban említett nehézség, a torziós szál hatásának kiküszöbölésére is. A lengésidej az ingára ható gravitációs vagy mágneses erőkn kívül természetesen függ a torziós szál direkciós nyomatékától is. A mérési adatok feldolgozása során azonban előállítható az adatok olyan kombinációja, amelyből ez az ismeretlen érték kiesik, így a keresett fizikai mennyiség csak a jól mérhető len-

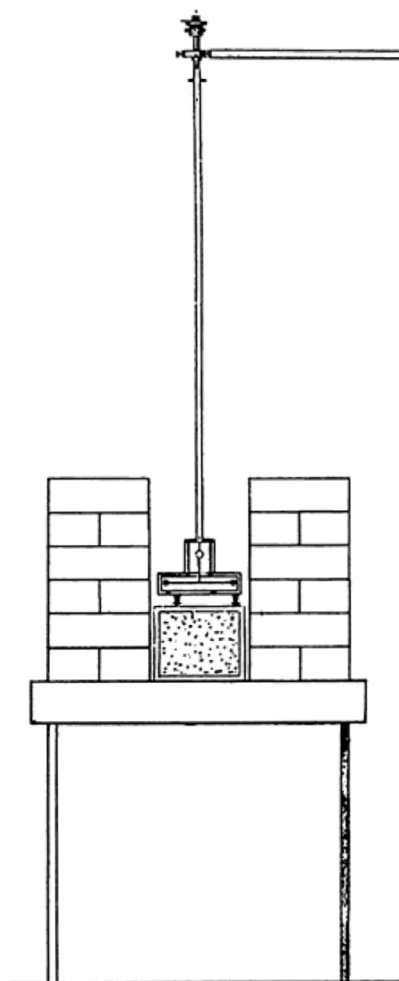
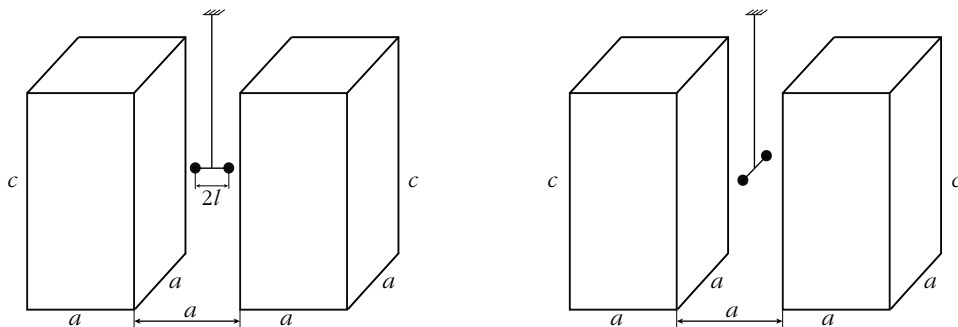


Fig. 11.

1. ábra. A védődobozba helyezett torziós inga két ólomhasáb között. (Eötvös eredeti ábrája [9, 11])



2. ábra. A torziós inga longitudinális (bal oldali ábra), illetve transzverzális (jobb oldali ábra) egyensúlyi helyzete a két ólomhasáb között

gésidőktől, illetve a berendezés ismert adataitól (pl. az alkalmazott vonzó testek tömegétől) függ. Eötvös laboratóriumi mérései során gyakran alkalmazta ezt a kevesebb hibaforrással járó eljárást.

Egyik legfontosabb mérésorozata a newtoni gravitációs állandó pontos értékének meghatározására irányult. E mérésről az „Előleges jelentés” [9] III. fejezetében, a 251–258. oldalakon számol be. A más jellegű (pl. mágneses) méréseihez hasonló kísérleti elrendezésekkel végzett kezdeti próbálkozások után egy radikálisan új mérési geometriára tért át.

A kísérleti elrendezést az 1. ábra mutatja be, amely Eötvös eredeti cikkéből való. A neten elérhető, rosszul fényképezett verzióban [9] az ábra alig vehető ki (254. oldal, 11. ábra). A cikk modern utánnnyomásában [11] viszont jó minőségben láthatók a képletek és az ábrák is.

Eötvös két egyforma, négyzet alapú, kisebb (az ábra szerint  $30 \times 15 \times 10$  cm méretű) ólomtéglákból épített derékszögű ólomhasábot úgy helyezte el, hogy a szemben lévő lapjaik párhuzamosak legyenek, távolságuk pedig megegyezzen a hasábok alapjainak  $a = 30$  cm oldalhosszával (lásd a 2. ábrát). A hasábok magassága  $c = 2a = 60$  cm volt.

A két ólomhasáb közt így létrejött  $a$  élű, négyzetes alapú szabad térbe úgy helyezte el a  $2l$  rúdhosszú torziós ingát, hogy az ingarúd középpontja pontosan középen legyen a két ólomhasáb között (nyilván  $0 < l < a/2$ ). A függőleges torziós szátra erősített, elhanyagolható vastagságú és tömegű ingarúd két végére egy-egy azonos  $m$  tömegű golyót erősített. Az ingát – Eötvös más méréseihez hasonlóan – egy lapos henger alakú, többszörös falú sárgarézdozoz védte a külső légáramlástól és az elektromos zavarok hatásaitól.

Az inga pontosan az ólomoszlopok fele magasságában levő vízszintes síkban végzett torziós lengéseket. A későbbi számítások során az inga rúdjának középpontjába helyezzük a koordináta-rendszer origóját, a  $z$  tengely a torziós szál mentén felfelé, az  $x$  tengely a két ólomtömböt összekötő irányba mutat, az  $y$  tengely párhuzamos a két hasáb belső síkjaival.

A fenti elrendezésben Eötvös az inga két (a hasábokkal párhuzamos állású, longitudinális, illetve azokra merőleges állású, transzverzális) egyensúlyi helyzetet

körüli torziós rezgések esetén mérte a lengésidőt (lásd a 2. ábrát).

A [9] cikk szövege szerint Eötvös az alábbi összefüggéssel határozta meg az  $f$  gravitációs állandót:

$$\frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_t^2} = \frac{13,427}{4\pi^2} f \rho (1 - \varepsilon), \quad (1)$$

ahol  $T_l$  és  $T_t$  – Eötvös jelöléseivel megegyezően – a szemben álló téglafalakra merőleges (longitudinális), illetve párhuzamos (transzverzális) egyensúlyi helyzetek körüli kis lengések periódusideje,  $\rho$  a homogén ólomtömbök anyagának sűrűsége, míg  $\varepsilon$  a rúd méreteitől függő és az oszlopok véges voltából eredő, egy százaléknál kisebb korrekciós tagot jelent (a későbbiekben ennek a mennyiségnek a jelentését pontosítjuk).

Itt jegyezzük meg, hogy a korabeli méréseknél a napjainkban szokásos periódusidőnek a felét tekintették lengési időnek. Ebből adódik, hogy a képletben szereplő 4-es osztó az eredeti cikkben nem szerepel. Később látni fogjuk, hogy a golyók  $m$  tömege kiesik a képletből. Az viszont egyáltalán nem magától értetődő, hogy az (1) képletben az ingarúd  $2l$  hossza sem bukkan fel.

Megmérve a két lengésidőt Eötvös a fenti képlet alapján határozta meg az  $f$  gravitációs állandót, és első mérései szerint az  $f = 6,65 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$  értéket kapta, amely alig tér el a mai legpontosabb  $f = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$  értéktől. (Ez a fizikai állandók értékével foglalkozó nemzetközi bizottság által 2018-ban elfogadott adat. A negyedik tizedesjegyben még a legmodernebb mérések is jelentős szórást mutatnak [5].)

A korábban említett „55 fokos problémához” hasonlóan itt is azonnal felmerül a kérdés: vajon honnan veszi Eötvös az (1) képletben megjelenő, öt értékes jegyre megadott együtthatót? Ezt az értéket a továbbiakban *Eötvös-tényezőnek* nevezzük, és  $\mathcal{E}$ -vel jelöljük.

Az (1) képlet előtt Eötvös ad némi elméleti magyarázatot. Először felvázol egy gondolatkísérletet: képzeljük el, hogy az inga egy véges vastagságú, de végtelen hosszúságú és végtelen magasságú ólomfal *belsejében* leng. Egy ilyen végtelen lemezen kívüli gravitációs tér (az analóg elektrosztatikus problémához, a végtelen fémlemez vagy kondenzátor elektromos teréhez ha-

sonlóan) homogén: az ide helyezett ingára nem hatna a térerősség inhomogenitásából eredő forgatónyomaték. Nem ez a helyzet a fal belsejében: ott (ugyancsak közismert módon) a gravitációs térerősség inhomogén, a fal közepétől kifelé haladva lineárisan növekszik. Eötvös pár sorban eljut az eredményhez: a 2. ábrán látható két helyzetben fellépő lengésidőkre az (1) képlethez hasonló formula adódik, csak a számlálóban az Eötvös-tényező helyett  $8\pi$  áll.

Tangl későbbi összefoglalója [16] és az Eötvös munkásságát angol nyelven népszerűsítő 1959-es cikk [20] ugyanezzel a gondolat kísérlettel kezd, de a  $8\pi$  értéket elemibb, bár hosszadalmasabb érvelés és két ábra segítségével vezeti le.

Furcsállhatjuk, hogy egy Eötvöshöz hasonló vérbeli kísérleti fizikus miért folyamodik ilyen élettől elrugaskodott gondolat kísérlethez. Hiszen ki látott már végtelen méretű falat? És az ólomfal belsejében lengő ingát? De a következő két lépés visszavezet a tényleges kísérlethez.

Az első lépés Eötvöshöz méltóan zseniális: nemcsak az elméleti érvelést teszi áttekinthetőbbé, hanem – mint később látni fogjuk – a tényleges matematikai számításokat is lényegesen leegyszerűsíti. Hagyjunk el a végtelen falból egy négyzet alapú (független irányban még mindig végtelen) hasábot! A négyzet alapja megegyezik a fal vastagságával, így az ólomfal két félvégtelen részre esik szét: majdnem megkapjuk az 1. és a 2. ábrán látott kísérleti elrendezést. Ezzel természetesen megváltozik a most már két részből álló fal gravitációs tere, és a frissen létrejött részben elhelyezett ingára ható forgatónyomaték, így az inga lengésidője is. Az ingára ható, korábban kiszámolt gravitációs forgatónyomatékból le kell vonni az elhagyott négyzetes hasáb anyaga által kifejtett hatást.

Igen ám, de a négyzetes hasábhöz képest a longitudinális és a transzverzális elhelyezkedésű inga pontosan egyformán áll, a hasáb anyaga által kifejtett gravitációs forgatónyomaték a két esetben teljesen egyforma! És mivel bennünket a két hatás különbsége érdekel, az eltávolított négyzetes hasáb anyaga által kifejtett forgatónyomaték a különbség képzésekor kiesik. Ezért az (1) képlet változatlanul érvényes, noha a bal oldalon szereplő lengésidők megváltoztak. Ezt a mesteri gondolatmenetet Eötvös (valamint a szöveget majdnem szó szerint átvevő Tangl és Kolossváry) részletesen el is magyarázza.

Az így módosított képlet számlálójában még mindig  $8\pi$  szerepel. Most kellene figyelembe venni azt a tény, hogy az ólomfalak nem végtelen, hanem véges méretűek.

Eötvös a cikkében [9] nem írja le, hogy hogyan kapta a képletben szereplő 13,427 „mágikus” szorzótényezőt. Ehelyett a kérdést két rövid mondattal intézi el: „Azon véges méretű oszlopokra, a melyeket az előbb leírt módon felállítottam, és tényleg méréseimnél használtam, lényegükben hasonló okoskodások érvényesek. Ez esetben azonban, mint a számítás mu-

tatja, az (1) egyenletben a  $8\pi$  érték helyébe 13,427 volt teendő.”

Tangl Károly elsőéves egyetemi hallgatóként segítette Eötvös kezdeti, gravitációval kapcsolatos méréseit, és később „Vizsgálatok a gravitációról” című munkájában [15] emlékezik vissza a közös munkájukra, de a fenti kérdésre itt sem kapunk választ: „Ez esetben az (1) formula csak annyiban szenved változást, hogy  $8\pi$  helyébe 13,427 lép, amint ezt a részletes számítás mutatja.”

Egyikük sem mond többet az elvégzett „részletes számításokról”. Áttekintve az irodalmi forrásokat sajnos máshol sem találtunk olyan cikket, amelyben bővebb magyarázat lenne az Eötvös-tényező kiszámolására: a későbbi irodalom minden kommentár és magyarázat nélkül átveszi az „Eötvös-tényező” fenti értékét. Geofizikus kollégákkal folytatott személyes konzultáció sem vezetett e számítások nyomára. Úgy látszik, ez a kérdés az utóbbi száz évben senkit sem izgatott. Kénytelenek vagyunk magunk utánaszámolni.

A gravitációs állandó mérésére irányuló kísérlet más furcsaságokkal is szolgál. Meglepő módon – Eötvös közismerten precíz mérései és gondosan megírt cikkei ellenére – arra se találtunk forrást, hogy a mérésében mekkora volt a golyók  $m$  tömege és az ingarúd hosszának  $2l$  értéke. Márpedig magától értetődő, hogy az ingára ható forgatónyomaték függ az ingarúd hosszától.

A másik furcsaságot az jelenti, hogy Eötvös – több hónapi gondos mérés után – elégedetlen volt a kísérlet eredményével, és nem is folytatta azt. Mint írta, két zavaró tényezőt nem tudott kiküszöbölni, így nem érte el az általa eredetileg megkívánt pontosságot. Az egyik gondot a lengő inga hengeres szelencéjében fellépő légáramlások által kifejtett súrlódás és turbulencia okozta, amely befolyásolta az inga lengésidőjét. Ennek kiküszöbölésére az egész berendezést vákuumba kellett volna helyeznie – ekkora vákuumkamra azonban nem állt rendelkezésére. Másrészt nem volt elégedett a téglákból összerakott ólomoszlopok homogén voltával sem, ami kérdéseessé tette az elméletileg meghatározott gravitációs tér értékét. Ezt a nehézséget Eötvös úgy kívánta kiküszöbölni, hogy az ólomoszlopokat két nagy edénybe öntött folyékony higanyal pótolja. Ennyi higanyt azonban nem tudott beszerezni (ne felejtjük el, az ólomoszlopok tömege egyenként 600 kg volt!). E két hibaforrás Eötvös szerint egy százalékosra korlátozta a mérés által elérhető pontosságot. Ráadásul az (1) képletben szerepel még egy  $\epsilon$  korrekciós tényező is, amely a cikk szerint „egy kicsiny, egy százaléknál kisebb, a rúd méreteitől függő és az oszlopok véges voltából eredő correctio tagot jelent”.

Végül tehát Eötvös abbahagyta a kísérleteket, és az addigi méréseket összegezve egy 1 százalékos pontosságú eredményt közölt a gravitációs állandó számértékére. „Jelen közleményemben azonban nem ez értékre, hanem a módszerre fektetem a súlyt” – írta, bízva a kísérlet pontosabb megismétlésének lehetőségében. (A modern mérések aztán megerősítették,

hogy Eötvös eredménye valóban egyszázalékos pontossággal közelíti a gravitációs állandó ma elfogadott értékét.)

A fentiek fényében még furcsábbnak tűnik az (1) képletben megjelenő, öt értékes jegyre megadott Eötvös-féle szorzótényező. Ha az egész mérés pontossága több hibaforrás következtében csak egy százalék, akkor miért használ egy ilyen feleslegesen pontosan kiszámított numerikus állandót? Egyáltalán miért fordított időt és energiát ennek a számnak az ilyen pontos meghatározására?

Eötvös e fontos mérésével kapcsolatban tehát a következő kételyeink és kérdéseink merültek fel:

1. Hogyan, milyen számításokkal kapta Eötvös az  $\mathcal{E} = 13,427$  értéket?
2. Miért nem közölte (általános szokásával ellentétben) az ingarúd hosszának  $2l$  értékét? Vajon milyen rúd-hosszra vonatkozik az  $\mathcal{E}$  Eötvös-tényező megadott értéke?
3. Ha a teljes mérés csak 1 százalék pontosságú, miért volt szükség az  $\mathcal{E}$  Eötvös-tényező öt jegyre pontos meghatározására?

Cikkünk további részében ezeknek a kérdéseknek járunk a nyomába.

## Az ingára ható forgatónyomaték

Vizsgáljunk egy merev testet, amely a súlypontján átmenő, rögzített tengely körül foroghat! A kiinduló helyzettől való eltérés szögét jelölje  $\varphi$ , a tengely irányába mutató egységvektort pedig  $\mathbf{n}$ . A test külső gravitációs térben felvett  $V$  potenciális energiája természetesen függ a  $\varphi$  szögtől:  $V(\varphi)$ . A testre a gravitációs tér által kifejtett  $\mathbf{M}_g$  forgatónyomaték-vektor  $\mathbf{n}$  irányú komponense:

$$\mathbf{M}_g(\varphi) = \mathbf{M}_g \mathbf{n} = -\frac{dV(\varphi)}{d\varphi}, \quad (2)$$

A fenti képlet levezetése megtalálható a *Fizikai Szemle* 2020. év decemberi számában [19].

Az Eötvös-inga esetében a merev test az inga rúdja, a két végére erősített  $m$  tömegű golyókkal, a rögzített forgástengely pedig a függőleges irányú torziós szál.

Eötvös a [9] cikkben levezetés nélkül közölt egy képletet, amely a (2) forgatónyomatékot kifejezi a merev test  $\Theta$  tehetetlenségi tenzorának komponenseivel és az  $U(\mathbf{r})$  gravitációs potenciál  $H_{ij} = \partial_i \partial_j U$  második deriváltjaival. A deriváltak értékét a test súlypontjában kell venni. Az ingára specializálva a képlet a következő alakú lesz:

$$-M_z = \left[ \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \cos 2\alpha \right] \Theta (1 - \epsilon), \quad (3)$$

ahol  $\Theta$  az inga tehetetlenségi nyomatéka a torziós szál mint tengely körül,  $\alpha$  az inga rúdjának a koordináta-rendszer rögzített  $x$  tengelyével bezárt szöge,  $\epsilon$  pedig az ingarúd pontos alakjától és a golyók méretétől függő kicsiny korrekciós tényező. (Ez az  $\epsilon$  nem azonos az (1) képletben szereplő  $\epsilon$  korrekciós tényezővel, bár mindkettő egyaránt kicsiny.)

Az Eötvös képleteiről szóló [8] cikkünkben bemutattuk a (3) formula levezetését. Hangsúlyoztuk azt is, hogy az eredmény akkor érvényes, ha a vizsgált merev test méretei elhanyagolhatók a gravitációs tér változására jellemző karakterisztikus hosszhoz képest.

Eötvös és követői a (3) képletet használták a torziós ingával végzett geofizikai mérések kiértékelésére. Ebben az esetben a cél a gravitációs potenciál  $H_{ij} = \partial_i \partial_j U$  deriváltjainak mérése. A torziós szál felfüggesztésének elforgatásával több esetben meghatározták az egyensúlyi helyzetet, és így egyenletrendszert kaptak a  $H_{ij}$  mennyiségekre. Ezekből aztán következtetni lehetett a környékbeli anyageloszlásra (pl. a föld alatti érclelőhelyek elhelyezkedésére).

A most elemzett mérés során azonban Eötvös más logikát követett: elvileg pontosan ismerte az  $U(\mathbf{r})$  potenciált (hiszen a gravitációs teret keltő anyageloszlást ő maga hozta létre), ezért a mérés során csak a minden képletben szorozóként szereplő Newton-féle  $f$  gravitációs állandó volt az ismeretlen. Ennek meghatározására a korábban említett dinamikus módszer szolgált.

A torziós ingára az  $M_g(\varphi)$  gravitációs eredetű forgatónyomatékon kívül természetesen egy másik forgatónyomaték is hat, amelyet az egyensúlyi helyzetéből kitérített torziós szál fejt ki, és kis kitérések esetén arányos az egyensúlyi helyzettel mért  $\varphi$  szöggel:

$$M_0 = -D_0 \varphi, \quad (4)$$

ahol  $D_0$  a torziós szál direkciós állandója.

Állítsuk be a rendszer kezdeti helyzetét úgy, hogy a rúdnak ebben az állásában a torziós szál forgatónyomatéka éppen kompenzálja a gravitációs tér által kifejtett forgatónyomatékot! Mérjük a  $\varphi$  szöget ettől az egyensúlyi helyzettől, és fejtsük sorba a (2) egyenlet jobb oldalát első rendig az inga egyensúlyi helyzete körül! Ekkor az ingára ható teljes forgatónyomaték arányos lesz a kitérés  $\varphi$  szöggel:

$$M(\varphi) = M_0 + M_g = -(D_0 + D_g) \varphi, \quad (5)$$

ahol a gravitációs tér effektív direkciós állandóját a (2) képlet sorbafejtett alakja adja:

$$D_g = -\left. \frac{dM_g(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{d^2 V(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0}. \quad (6)$$

Fontos megjegyezni, hogy míg a torziós szál  $D_0$  direkciós állandója a (4) képlet értelmében mindig pozitív (hiszen a szál vissza akarja forgatni az ingát az egyensúlyi helyzetbe), addig a gravitációs tér  $D_g$  effektív direkciós állandója pozitív és negatív is lehet.

Legyen  $\Theta$  az inga tehetetlenségi nyomatéka a  $z$  tengely, azaz a torziós szál körül! Ekkor a forgásra vonatkozó mozgásegyenlet (kis kitérésekre):

$$\Theta \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = M(\varphi) = -(D_0 + D_g)\varphi. \quad (7)$$

Ez a harmonikus oszcillátor jól ismert mozgásegyenlete. Megoldása szinuszos rezgés, melynek körfrekvenciája

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{D_0 + D_g}{\Theta}}, \quad (8)$$

ahol  $T$  a torziós rezgés periódusideje. A rezgésidő reciprokának négyzete kifejezhető a fenti képletből:

$$\frac{1}{T^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{D_0 + D_g}{\Theta}. \quad (9)$$

Vizsgáljuk most az inga két különböző egyensúlyi helyzete (jelölje ezeket  $\varphi_1$  és  $\varphi_2$ ) körüli rezgéseket! Mindkettőhöz tartozik egy effektív gravitációs  $D_{gk}$  direkciós állandó ( $k = 1, 2$ ) és egy  $T_k$  rezgésidő. A (9) képletet mindkét esetre felírva, majd kivonva egymásból látható, hogy a torziós szál  $D_0$  direkciós állandója kiesik, és csak a két helyzetre vonatkozó  $D_{g1}$  és  $D_{g2}$  gravitációs direkciós állandók különbsége marad meg:

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{D_{g1} - D_{g2}}{\Theta}. \quad (10)$$

Az effektív direkciós állandók (6) definícióját visszaírva megkapjuk első fő eredményünket:

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = \frac{1}{4\pi^2\Theta} \left( \left. \frac{d^2V(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_1} - \left. \frac{d^2V(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_2} \right). \quad (11)$$

Eötvös a (11) egyenlőség bal oldalát mérte. („A lengési idők lemérése meglepő biztonsággal és pontossággal eszközölhető.”) A jobb oldalon  $\Theta$  az inga (a rúd és a rajta levő tömegek) ismert tehetetlenségi nyomatéka. Az elméleti számítás feladata tehát a rendszer gravitációs energiája második deriváltjai értékének a két egyensúlyi helyzetben való meghatározása. Ez az érték nyilván arányos az univerzális  $f$  gravitációs állandóval. Ha tehát a jobb oldal többi tényezőjét elméletileg kiszámítjuk, a bal oldalt pedig megmérjük, a két oldal összehasonlításával megkapjuk az  $f$  gravitációs állandó értékét. Ez Eötvös „dinamikus” torziós ingás mérésének alapfogalata.

Kérdés, hogy milyen geometriai elrendezésű kísérleti helyzetre alkalmazzuk a fenti képletet – nyilván olyanra, ahol egyrészt a mérés pontosan végezhető el, másrészt a (11) egyenlőség jobb oldalán szereplő deriváltak könnyen kiszámíthatók.

Az eddigiekben nem specializáltuk az ingaként lengő merev test alakját. Általános merev test esetén mind a test  $V(\varphi)$  gravitációs potenciális energiája, mind a  $\Theta$  tehetetlenségi nyomaték egy bonyolult térfogati integrállal állítható elő. Egyszerűbb a helyzet, ha a lengő in-

gát diszkrét tömegpontok együttesének tekintjük. Eötvös épp ezt a közelítést tette: az ingát két  $m$  tömegű, pontszerűnek tekintett golyóként vette számításba, melyeket egy elhanyagolható tömegű és vastagságú,  $2l$  hosszúságú rúd két végére erősített. Ebben az esetben a rúd középpontjára vonatkoztatott  $\Theta$  tehetetlenségi nyomaték egyszerűen  $\Theta = 2ml^2$ . Az ettől az értéktől való eltérést, ami a rúd véges vastagságából és tömegéből, valamint a golyók véges átmérőjéből adódik, Eötvös az (1) képletben szereplő  $(1 - \varepsilon)$  korrekciós tényezőbe sőpörte bele.

Legyen egy pontszerű testekből álló merev rendszer  $K$ -adik tömegpontjának tömege  $m_K$ , a pontba mutató helyvektor pedig  $\mathbf{r}_K$ ! A test egészének  $\varphi$  szögű elfordulása során az egyes helyvektorok a  $\varphi$  szög függvényeként megváltoznak:  $\mathbf{r}_K(\varphi)$ , ez a szögfüggés azonban egyszerű geometriai úton kiszámítható. Tudjuk, hogy egy tömegpont  $V(\mathbf{r})$  gravitációs helyzeti energiája a test  $m$  tömegének és a gravitációs tér  $U(\mathbf{r})$  potenciáljának szorzata. Így a test teljes gravitációs potenciális energiája:

$$V(\varphi) = \sum_K m_K U(\mathbf{r}_K(\varphi)), \quad (12)$$

ahol  $U(\mathbf{r})$  a gravitációs tér potenciálja az  $\mathbf{r}$  vektorral megadott térbeli pontban. (Ne feledjük, hogy  $U(\mathbf{r})$  az  $\mathbf{r}$  pontba helyezett egységnyi tömegű tömegpont gravitációs energiáját jelenti, így  $U$  mértékegysége  $m^2/s^2$ .)

Eötvös ingája esetén a  $K$  index csak az 1 és 2 értéket veszi fel, hiszen az ingát két tömegpontból állónak tekintjük. A 2. ábráról azonban jól látszik, hogy a rendszer az ingarúd mozgásának síkjában a rúd középpontjára nézve tükörszimmetrikus, így a két golyó helyén az  $U(\mathbf{r})$  potenciál azonos lesz, még akkor is, ha a rúd elfordul egyensúlyi helyzetéből. Ezért a (12) képletben elegendő az ingarúd egyik végén levő golyóval számolni, a szummázás pedig csak egy kettes szorzótényezőt eredményez. Hasonlóképpen kell eljárni a gravitációs potenciális energia első és második deriváltjának kiszámításánál is.

Feladatunk tehát arra redukálódott, hogy meghatározzuk az inga két egyensúlyi helyzetét, és e helyzetekben kiszámítsuk az inga egyik végpontjában az  $U(\mathbf{r}(\varphi))$  gravitációs potenciál  $\varphi$  szerinti második deriváltját. Ehhez persze ismerni kell magát az  $U(\mathbf{r})$  gravitációs potenciált.

## A derékszögű hasábok gravitációs tere

Az  $U(\mathbf{r})$  potenciál a newtoni gravitációs elméletben kielégíti a

$$\Delta U(\mathbf{r}) = 4\pi f \varrho(\mathbf{r}) \quad (13)$$

Poisson-egyenletet, ahol  $f$  a newtoni gravitációs állandó,  $\varrho(\mathbf{r})$  a gravitációs teret keltő anyag helyfüggő sűrűsége,  $\Delta$  pedig a Laplace-operátort jelöli. Az egyenlet megoldása:

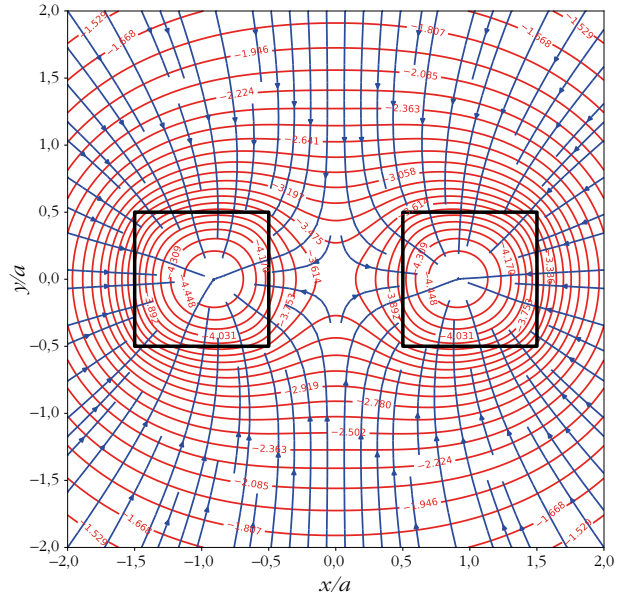
$$U(\mathbf{r}) = -f \int d^3\mathbf{R} \frac{\rho(\mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}. \quad (14)$$

Az  $\mathbf{R}$  vektorváltozó szerinti integrálást a gravitációs teret keltő test(ek) teljes térfogatára kell elvégezni. A képlet jelentése világos: az  $\mathbf{R}$  helyen levő  $\rho(\mathbf{R}) d^3\mathbf{R}$  tömegelemek  $-f/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ -rel arányos gravitációs potenciálját kell összegeznünk az  $\mathbf{r}$  pontban. Homogén sűrűségű test esetén az állandó  $\rho$  érték kiemelhető az integrál alól.

A (14) képletben szereplő integrálás a legtöbb esetben nem végezhető el zárt alakban, így általában nem kapunk analitikus (képlettel megadható) alakot az  $U(\mathbf{r})$  gravitációs potenciálra. Már Newton ismerte az egyik kivételt: ha a gravitációs teret keltő test sűrűségeloszlása gömbszimmetrikus, akkor a potenciál is az: a testen kívül a potenciál értéke  $U(\mathbf{r}) = -fM/r$ ; ahol  $M$  a test teljes tömege,  $r$  pedig az  $\mathbf{r}$  vektor abszolút értéke (itt a koordináta-rendszer origóját a teret keltő gömbölyű test középpontjába helyeztük). E képlet gradienseként adódik Newton közismert  $-1/r^2$ -es gravitációs törvénye.

Egy másik érdekes, fontos, bár kevésbé ismert analitikusan kiszámolható eset a homogén tömegeloszlású, derékszögű téglalakú test gravitációs tere. A képlet trigonometrikus és hiperbolikus függvények inverzeinek (arctg és arth) hat különböző variánsából áll, e függvények pedig az  $(\mathbf{r} - \mathbf{R}_{cs})$  vektorok derékszögű komponenseinek különböző kombinációit tartalmazzák. Itt  $\mathbf{r}$  azt a helyet jelöli, ahol az  $U(\mathbf{r})$  potenciált keressük, az  $\mathbf{R}_{cs}$  vektor pedig végigfut a gravitációs teret keltő téglalatest mind a nyolc csúcsán. E tagokat kell összegezni a téglalatest nyolc csúcsa adatainak behelyettesítésével, így kapjuk végül a teljes formula összesen 48 tagját. A formulát elsőként Friedrich Bessel vezette le 1813-ban [21] a csillagászati távcsövek zenitre tájolási problémáinak vizsgálata során. Később a potenciál gradiense, azaz a gravitációs térerősség komponenseit Sir George Everest angol földrajztudós és geodéta is kiszámította, aki a Nagy Indiai Délkörmérést vezette az 1820-as években (és akiről később a Föld legmagasabb csúcsát elnevezték). A földmérési adatok kiértékelésekor figyelembe kellett venni az indiai fennsík nagy tömegeinek gravitációs hatását, ehhez vezette le Everest a szögletes hasábok gravitációs terét, amelyet először az 1830-ban megjelent könyvében [22] publikált – az eredmény betölti a könyv teljes 97. oldalát. A potenciál képletének részletes felírásától megkíméljük az olvasót – az érdeklődők megtalálják (első és második deriváltjaival együtt) az „Élet a Laposföldön” című cikkünk függelékében [23]. Ugyanitt további irodalmi hivatkozások is találhatóak. (Megjegyezzük, hogy abban a cikkben az  $\mathbf{r}$  és az  $\mathbf{R}$  vektorok jelölése az itt használthoz képest fordított.) A formula igen érdekes és szellemes levezetése Haasz István geofizikus cikkében olvasható [24].

Jelen esetben nem egyetlen, hanem két derékszögű hasáb terét kell vizsgálnunk, így az egzakt képlet nem 48, hanem 96 tagból áll. Szerencsére a *Mathematica*



3. ábra. A két hasáb ( $fa^2$ ) egységekben mért  $U(\mathbf{r})$  gravitációs potenciáljának ekvipotenciális vonalai és az erővonalak a  $z = 0$  síkban

szimbolikus program könnyen megbirkózik mind a potenciál kiszámításának, mind ábrázolásának feladatával (Eötvös minden bizonnyal örült volna, ha e programot használhatja). A 3. ábrán a két hasáb potenciálja és erőtere látható az ingarúd mozgásának  $z = 0$  síkjában. A folytonos (színes ábrán piros) vonalak az  $U(\mathbf{r})$  gravitációs potenciál ekvipotenciális vonalai, míg a nyíllal ellátott (színes ábrán kék) vonalak a potenciál negatív gradiense, azaz a gravitációs gyorsulás erővonalai (a potenciált  $fa^2$  egységekben mértük).

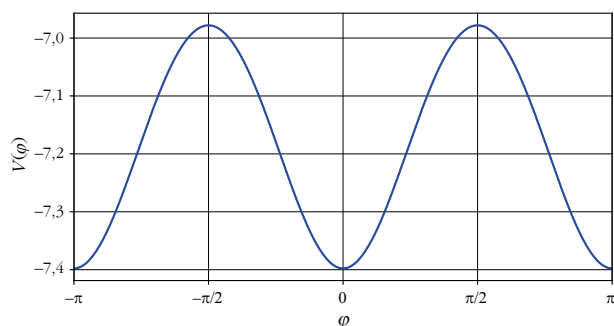
A 3. ábrán jól látható, hogy a két hasáb közötti üres tér középpontja az erőter speciális pontja: az ide helyezett pontszerű testre nulla gravitációs erő hat – hiszen a két téglalatest vonzása itt éppen kiegyenlíti egymást. Ha azonban a pontszerű próbatestet kimozdítjuk az egyensúlyi helyzetből, érdekes dolog történik:  $x$  irányba, azaz a két téglalatest valamelyike felé elmozdítva a testet a közelebbi téglalatest vonzása erősebb lesz a távolabbiénál, ezért a próbatest tovább távolodik a fixponttól, és nekicsapódik a közelebbi téglalagnak. Ha viszont  $y$  irányban, azaz a két téglalatest összekötő vonalra merőlegesen mozdítjuk el a próbatestet, akkor a két téglalatest együttes vonzóereje visszaviszi azt a fixpontba. Az egyensúlyi helyzet körül a gravitációs tér erővonalai hiperbolához hasonlítanak, ezért nevezik az ilyen egyensúlyi helyzetet nyeregpontnak vagy hiperbolikus fixpontnak. A hiperbolikus fixponttal jellemezhető egyensúlyi helyzet instabil: van olyan irány, amely felé a próbatestet elmozdítva a fellépő erők azt eltávolítják a fixponttól. Ez nem véletlen: a (13) Poisson-egyenletből levezethető, hogy tiszta gravitációs (és a vele matematikailag analóg elektrosztatikus) erőterben egy pontszerű részecskének nem létezik stabil egyensúlyi helyzete.

Mi azonban nem pontszerű testet, hanem két véges távolságú pontból álló ingát helyezünk a két hasáb közti

üres tér középpontjába. A 3. ábra alapján látható, hogy ha az ingarudat általános „ferde” állásba helyezzük, akkor mindkét golyóra olyan gravitációs erő hat, amely a rudat az  $x$  tengellyel párhuzamos irányba igyekszik elforgatni. (A két golyóra ható erők vektori összege a szimmetria miatt nulla, de általában forgatónyomaték lép fel.) Az ingának két olyan egyensúlyi helyzete van, amikor a két golyóra ható erők rúdírányúak, azaz nincs forgatónyomatékuk. Az egyik esetben a rúd  $x$  irányú, azaz párhuzamos a két hasábot összekötő egyenessel (ezt a helyzetet nevezi Eötvös longitudinálisnak). Ez az egyensúlyi helyzet stabil: kis kitérések esetén visszatérítő forgatónyomaték lép fel. Más szóval elmondva: ebben a helyzetben a (6) képletben értelmezett  $D_g$  effektív direkciós állandó pozitív. A másik egyensúlyi helyzet az előzőre merőleges,  $y$  irányú (Eötvös transzverzális esete). Ha az inga rúdja párhuzamosan áll a két hasáb közeli lapjaival, akkor a szimmetria miatt a két golyóra ható erő most is rúdírányú, tehát nincs forgatónyomaték. Ez az egyensúlyi helyzet azonban instabil: kis kitérésre mindkét golyót a hozzá közelebbi hasáb felé vonzza a gravitáció, azaz a kitérés tovább növekszik. Ebben az esetben a  $D_g$  effektív direkciós állandó negatív.

A fentieket szemléltetendő a 4. ábrán bemutatjuk a két pontszerű golyóval modellezett inga gravitációs potenciális energiájának függését az elfordulás  $\varphi$  szögtől (a szöget az  $x$  tengelytől mérjük, az energia egysége  $f\varrho a^2 m$ ). Látható, hogy a  $\varphi = 0$  (és a vele ekvivalens  $\varphi = \pi$ ) helyzetben a potenciális energiának minimuma van, az e helyzetekből kitérített rendszer visszatér – ezek az egyensúlyi helyzetek stabilak. Ezzel szemben a  $\varphi = \pi/2$  (és a vele ekvivalens  $\varphi = 3\pi/2$ ) helyzetekben a potenciális energiának maximuma van, az egyensúlyi helyzet instabil.

Ne feledkezzünk meg azonban arról, hogy az ingára nemcsak a gravitációs tér által kifejtett forgatónyomaték hat, hanem a torziós szál  $M_0 = -D_0\varphi$  forgatónyomatéka is. Így az egyensúlyi helyzetek esetén a teljes visszatérítő direkciós erő az (5) képlet szerint a két érték összege. Ha a torziós szál  $D_0$  direkciós ereje elég nagy, az eredő érték mindkét egyensúlyi helyzetben pozitív lesz. Rögtön látjuk azt is, hogy a longitu-



4. ábra. Az inga  $f\varrho a^2 m$  egységekben mért  $V(\varphi)$  gravitációs energiájának szögfüggése a két hasáb gravitációs terében. Az egyensúlyi helyzetek (szélsőértékek) körül a gravitációs energia sorbafejtett alakja  $V(\varphi) = V_0 + D_g \varphi^2/2$ , ahol a két állásban  $D_{gl} = 0,91$ , illetve  $D_{gt} = -0,77$

dinális egyensúlyi helyzet körüli rezgés esetén az eredő direkciós erő – és így a (8) képlet szerint a rezgés körfrekvenciája is – nagyobb lesz, mint a transzverzális helyzet körüli rezgés esetén. A rezgésidő fordítva arányos a frekvenciával, ezért a longitudinális helyzet körüli rezgés periódusideje kisebb, mint a transzverzális eseté. Láthatjuk tehát, hogy Eötvös (1) képletében a bal oldalon valóban pozitív mennyiséget kapunk. (Eötvös méréseiben  $T_l$  és  $T_t$  értéke 640, illetve 860 másodperc körül volt.)

Ez az elemzés tehát valóban elvezetett az előzetesen a 2. ábrán felvázolt két egyensúlyi helyzethez. Számításunkat tehát azzal kell folytatnunk, hogy e két helyzetben kiszámítsuk az  $U(\mathbf{r}(\varphi))$  függvény (6) szerinti második deriváltját. Illetve...

Korábban említettük, hogy egy homogén téglatest gravitációs terének kiszámításához a test nyolc csúcsához tartozó járulékokat kell összegeznünk – esetünkben a két ólomtömb miatt 16 csúccsal kell számolnunk. Ezek mindegyikére valóban szükségünk is volt, amikor a 3. ábra adatait számoltuk ki. Eötvöst azonban nem a potenciál részletes menete érdekelte, hanem a kétféle egyensúlyi helyzetből kiszámítható effektív direkciós állandók különbsége (lásd a (10) képletet). Emlékezzünk vissza ezért Eötvös korábbi trükkjére, amelyet a hipotetikus végtelen fal esetével kapcsolatban mutatunk be: ha a végtelen falból kivágunk az origó körül egy négyzet alapú hasábot, a hasáb anyagának járulékát ki kell vonnunk a kiszámított gravitációs téréből. Ez azonban a longitudinális és a transzverzális állású inga esetén ugyanannyi, ezért a (11) képletben megjelenő különbségből kiesik.

Fordítsuk meg most ezt a gondolatmenetet! Töltsük ki a két ólomhasáb közti négyzetes hasáb alakú teret ólommal (és közben persze hallgatólagosan fogadjuk el, hogy az inga az ólomtömb belsejében is mozoghat)! Jelöljük az inga potenciális energiáját  $e$  módosított konfigurációban  $\bar{V}(\varphi)$ -vel! Ekkor a (11) képletben a  $V(\varphi)$  potenciális energiák deriváltjainak különbségét a fiktív  $\bar{V}(\varphi)$  potenciálok deriváltjainak különbségével pótolhatjuk, hiszen a központi négyzetes hasáb beillesztése az inga mindkét állása esetén ugyanakkora értékkel változtatja meg a potenciált.

A  $\bar{V}(\varphi)$  mennyiség az inga potenciálja a „befoltozott”,  $x$  irányban immár  $3a$  hosszúságú,  $y$  és  $z$  irányban változatlanul  $a$  szélességű, illetve  $2a$  magasságú ólomhasáb terében. De ez az objektum is egy homogén sűrűségű derékszögű téglatest, tehát terének kiszámítására alkalmazhatjuk a hasábok gravitációs terének soktagú formuláját! Ez viszont már csak 48 tagból áll a korábbi 96 helyett. A számolásnál csak az ólomtömbök 8 külső sarkának járulékait kell kiszámítanunk, a belső, az ingához közelebbi sarkok járuléka a különbségképzéskor kiesne. Eötvös trükkjével tehát a számolási munka felét megtakaríthatjuk! És most utólag már jól láthatjuk, miért választotta Eötvös a kísérleti elrendezésben egyforma nagyságúnak az ólomoszlopok szélességét

és egymástól való távolságát, azaz négyzetes alapúnak az ingát környező lyukat: ezzel az első ránézésre véletlenszerűnek tűnő választással megspórolta a kísérlet megelőző számolások felét. (Megjegyzés: a százharminc évvel későbbi drukkerok felvethetnek egy hasonlóképpen szimmetrikus kísérleti elrendezést: egy hosszúkás, hasáb alakú fémtömb közepébe henger alakú lyukat fúrunk. Esetleg Eötvös egyik ötletét megvalósítva egy hosszúkás, hasáb alakú edényt az ólomtömbökkel elentétben valóban homogén higanyal töltünk meg, és ennek közepére behelyezünk egy henger alakú üres edényt. A levegővel – esetleg vákuummal – teli hengernek a tengelye mentén lóthatjuk be a torziós ingát. A szükséges számítások azonosak az Eötvös kísérlete során alkalmazottakkal.)

Az eddigi megfontolásokat összesítve Eötvös mérésének leírására a következő formulát kapjuk:

$$\frac{1}{T_1^2} - \frac{1}{T_2^2} = \frac{1}{4\pi^2} \frac{1-\varepsilon}{2ml^2} 2m \left( \left. \frac{d^2 \bar{U}(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} - \left. \frac{d^2 \bar{U}(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\pi/2} \right), \quad (15)$$

ahol  $T_1$  és  $T_2$  az inga longitudinális, illetve transzverzális egyensúlyi helyzete körüli lengésideje,  $\Theta = 2ml^2$  a korábban elmondottak alapján az inga torziós szál körüli tehetetlenségi nyomatéka,  $\varepsilon$  az ehhez tartozó kicsiny korrekciós tag,  $\bar{U}(\varphi)$  pedig a  $3a$  hosszúságú „kiegészített” hasáb által létrehozott gravitációs potenciál az ingarúd egyik végén levő golyó helyén. Az  $\bar{U}(\varphi)$  gravitációs potenciál és a  $\bar{V}(\varphi)$  potenciális energia közti különbséget a (12) képlet szerint kiemelt  $m$  tényező, a másik golyót pedig a kettes szorzótényező veszi figyelembe. Látjuk, hogy a képletben az  $m$  tömeggel egyszerűsíteni lehet (így nem okoz gondot, hogy beszámolójában Eötvös nem közölte a golyó tömegét), az ingarúd  $2l$  hosszúsága azonban még szerepel az eredményben.

## A pontszerű inga esete

A továbbiakban célunk a (15) formulában a zárójelben szereplő mennyiség elméleti kiszámítása. Ez az érték a (14) képlet szerint arányos az  $f$  gravitációs állandóval, illetve az integrálból kiemelhető állandó  $\rho$  sűrűséggel – ha minden jól megy, akkor végül meg kell kapnunk az (1) képletet, benne az Eötvös-szorzótényezővel.

Kézenfekvőnek tűnik az Eötvös által közölt (3) képlet felhasználása. Ha abban az  $\alpha$  szög helyére behelyettesítjük az  $\alpha = 0$ , illetve az  $\alpha = \pi/2$  értéket, az ingarúd  $2l$  hosszúsága kiesik, és a következő eredményt kapjuk:

$$\varepsilon = \frac{2}{f\rho} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right), \quad (16)$$

ahol a deriváltakat az ingarúd középpontjában kell vennünk. A ((3) képletből az következik, hogy  $D_{gt} = -D_{gt}$ , a különbségképzéskor ezért lép fel a kettes szorzótényező.)

Ezután a sokat emlegetett 48 tagú képlet (pontosabban annak második deriváltja) felhasználásával kiszámíthatjuk a képletben szereplő mennyiségeket. Néhány trigonometriai trükk (arctg értékek összevonása) után ezt kapjuk:

$$\varepsilon = 16 \arctg \left( \frac{8\sqrt{14}}{27} \right) = 13,390. \quad (17)$$

Meglepő módon ez a szám *nem* egyezik az Eötvös cikkében, illetve az (1) képletben szereplő numerikus értékkel. Igaz, az eltérés nagyon kicsi. Valószínűleg a mérési hiba ennél nagyobb volt.

Hát most lehet töprengeni... Ha Eötvös egyszerűen a 13,4 értéket adta volna meg az (1) képletben (összhangban az egész mérés egy százalékos pontosságával), akkor most elégedetten hátradőlhetnénk: Eötvös saját, korábban általunk már levezetett (3) formulája alapján megkaptuk az Eötvös-tényezőt. De az (1) képletben határozottan *nem* ez az érték szerepel, hanem egy öt jegyre megadott, ettől az eredménytől láthatóan eltérő szám...

Vajon mi lehet az eltérés oka? Emlékezzünk vissza a (3) formula levezetésével kapcsolatban tett megjegyzésre: az eredmény akkor érvényes, ha a vizsgált merev test mérete kicsi a gravitációs tér változásának karakterisztikus hosszához képest. Ez a feltétel bizonyosan teljesül a geofizikai mérések esetén. Ott a tanulmányozott kőzettömegek kilométeres nagyságrendjével áll szemben az Eötvös-inga néhányszor tíz cm hosszúságú rúdja. A most elemzett mérés esetében viszont a feltétel nem áll fenn: az inga hossza, a gravitációs teret keltő ólomtömbök mérete és egymástól való távolsága egyaránt a deciméteres nagyságrendbe esik. Nem fogadhatjuk el tehát a kísérlet elemzésére a sorfejtésen alapuló (3) képlet használatát!

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a (3) formula a pontszerű ingára ható forgatónyomatékokat adja meg – de a mi esetünkben az inga határozottan *nem* pontszerű.

Újra kell tehát gondolnunk a kitérített ingarúd végén táncoló golyóra ható forgatónyomaték kiszámításának módszerét.

## A véges hosszúságú inga esete

A gondot az okozta, hogy a (3) formula levezetésekor a gravitációs potenciált és deriváltjait az origóban felvett értékekkel helyettesítettük. Ha az ingarúd mérete, azaz a golyók középponttól mért távolsága összemérhető a gravitációs tér változásának karakterisztikus hosszával, pontosabb számításhoz kell folyamodnunk.

Vegyük fel a  $z = 0$  síkban az  $x$  tengelyhez képest  $\varphi$  szöggel elfordult  $\mathbf{e}(\varphi) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$  egységvektort, valamint az  $\mathbf{e}(\varphi)$ -re merőleges  $\mathbf{f}(\varphi) = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$  egységvektort! Könnyen belátható, hogy  $d\mathbf{e}(\varphi)/d\varphi =$

$f(\varphi)$ , valamint  $df(\varphi)/d\varphi = -\mathbf{e}(\varphi)$ . E jelölést használva az origó középpontú,  $2l$  hosszúságú ingarúd egyik végén levő golyó helyvektora  $\mathbf{r}(\varphi) = l\mathbf{e}(\varphi)$ , és a golyó helyén a gravitációs tér potenciálja  $U(\mathbf{r}) = U(\mathbf{r} = l\mathbf{e}(\varphi))$  lesz. Ezt a kifejezést a közvetett függvények deriválási szabálya segítségével kétszer deriváljuk (az indexes alakot és a néma index konvenciót használjuk):

$$\frac{dU(\mathbf{r}(\varphi))}{d\varphi} = \partial_i U l \frac{de_i}{d\varphi} = l \partial_i U f_i(\varphi), \quad (18a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 U(\mathbf{r}(\varphi))}{d\varphi^2} &= l \frac{d}{d\varphi} (\partial_i U(\mathbf{r}) f_i(\varphi)) \\ &= l \left[ f_i(\varphi) \partial_j \partial_i U l \frac{de_j(\varphi)}{d\varphi} + \partial_i U \frac{df_i(\varphi)}{d\varphi} \right] \quad (18b) \\ &= l^2 f_i f_j \partial_j \partial_i U - l e_i \partial_i U. \end{aligned}$$

A képletben az indexes parciális deriváltak az  $\mathbf{r}$  vektor derékszögű  $x, y, z$  koordinátái szerinti deriváltakat jelölik, a kétszer előforduló indexekre összegezni kell. Fontos megjegyezni, hogy a deriváltak értékét nem az origóban, hanem a golyó aktuális helyzetében kell behelyettesíteni.

A fenti eredményt a korábban elmondottak alapján a négyzetes lyuk „betömésével” kapott derékszögű hasáb  $\bar{U}(\mathbf{r})$  gravitációs potenciáljára kell alkalmaznunk. A (15) képlet szerint a potenciál második deriváltját a  $\varphi = 0$ , illetve a  $\varphi = \pi/2$  helyen kell kiértékelni. Mivel  $\mathbf{e}(0) = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{f}(0) = \mathbf{e}(\pi/2) = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{f}(\pi/2) = (-1, 0, 0)$ , ezért

$$\left. \frac{d^2 \bar{U}(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=0} = \left( l^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} - l \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) \Bigg|_{\mathbf{r}=(l,0,0)}, \quad (19a)$$

$$\left. \frac{d^2 \bar{U}(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\pi/2} = \left( l^2 \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} - l \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) \Bigg|_{\mathbf{r}=(0,l,0)}. \quad (19b)$$

Visszahelyettesítve a (15) képletbe a következő végeredményt kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_l^2} - \frac{1}{T_i^2} &= \frac{1-\varepsilon}{4\pi^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} - l \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) \Bigg|_{\mathbf{r}=(l,0,0)} \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} - l \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) \Bigg|_{\mathbf{r}=(0,l,0)} \right]. \quad (20) \end{aligned}$$

Ez a képlet két fontos jellemzőben különbözik a pontszerűnek tekinthető ingára kapott (16) alaktól. Először is nemcsak az  $\bar{U}(\mathbf{r})$  potenciál második deriváltjai szerepelnek benne, hanem az első deriváltak is. Az utóbbiak, azaz a gravitációs térerősség komponensei az ingarúd két végén levő golyókra összegezve kiejtik egymást, de a forgatónyomatékhoz hozzájárulnak. A másik különbség az, hogy a potenciál deriváltjainak értékét nem az origóban, hanem a golyók egyensúlyi helyzetében, az origótól véges távolságra kell kiszámítani. Ér-

demes megjegyezni, hogy a szögletes zárójelben levő kifejezésnek a nevezőben szereplő  $l$  hosszúság ellenére létezik az  $l \rightarrow 0$  határértéke. Ha figyelembe vesszük, hogy az első deriváltak értéke az origóban, az egyensúlyi helyzetben nulla, akkor könnyen belátható, hogy a hosszúsággal osztott első deriváltak határértéke épp a megfelelő második derivált. Ezért a szögletes zárójelben álló kifejezés  $l \rightarrow 0$  határértéke megegyezik a (16) képlet jobb oldalával, beleértve a kettes szorzótényezőt.

## Az Eötvös-tényező függése az inga hosszától

Most már tényleg nincs más hátra, mint a (3a, a, 2a) élhosszúságú, homogén  $\rho$  sűrűségű derékszögű hasáb 48 tagból álló  $\bar{U}(\mathbf{r})$  gravitációs potenciáljának deriváltjait behelyettesíteni a (20) képletbe. Mivel Eötvös nem adta meg az ingarúd  $2l$  hosszúságát, ezt a paramétert függőben hagyjuk, és az Eötvös-tényező értékét az  $l$  hosszúság függvényében adjuk meg. Pontosabban: normáljuk az ingarúd  $2l$  hosszúságát a két ólomtömb közti  $a$  távolsággal. Ehhez vezessük be a  $t = 2l/a$  változót (melynek értéke 0 és 1 között futhat:  $t = 0$  a korábban tárgyalt pontszerű inga határesetét jelenti, a  $t = 1$  határesetben pedig az inga végén levő golyók éppen hozzáérnének az ólomtömbökhöz). Eljutottunk tehát számolásunk végeredményéhez, megadhatjuk az Eötvös-tényező  $\mathcal{E}$  értékét a  $t$  paraméter függvényében:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \mathcal{E}(t) &= \arctg \frac{3+t}{u} - \frac{3+t}{t} \arctg \frac{1}{(3+t)u} \\ &\quad - \arctg \frac{1+t}{3v} + \frac{1+t}{t} \arctg \frac{3}{(1+t)v} \quad (21) \\ &\quad + \frac{1}{t} \operatorname{arth} \frac{1}{u} + \frac{2}{t} \operatorname{arth} \frac{1}{2u} - \frac{3}{t} \operatorname{arth} \frac{1}{v} \\ &\quad - \frac{2}{t} \operatorname{arth} \frac{3}{2v} + \{t \rightarrow (-t)\}, \end{aligned}$$

ahol

$$u(t) = \sqrt{\frac{7}{2} + \frac{3t}{2} + \frac{t^2}{4}} \quad \text{és} \quad v(t) = \sqrt{\frac{7}{2} + \frac{t}{2} + \frac{t^2}{4}}.$$

A végső képletben szereplő 16 tagnak csak a felét írtuk ki, a többi úgy kaphatjuk meg, hogy a  $t$  paraméter helyébe mindenütt (beleértve az  $u(t)$  és  $v(t)$  mennyiségeket definiáló gyököket is)  $(-t)$ -t írunk.

A (21) képlet az Eötvös-tényező egzakt, közelítésmentes értékét adja meg az ingarúd hosszának függvényében.

Ezt az ijesztőnek tűnő függvényt az 5. ábrán mutatjuk be. A vízszintes tengelyen az ingarúd hosszára jellemző  $t$  paraméter változik 0 és 1 között, a függőleges tengely pedig az  $\mathcal{E}$  Eötvös-tényező értékét mutatja. Az ábrán szereplő szaggatott vízszintes vonal jelentésére még visszatérünk.

A korábbról, a pontszerű ingára vonatkozó (17) képletben szereplő 13,390 számértéket felismerhetjük a görbe kezdőpontjában, a  $t \rightarrow 0$  határértéknél – valóban, ez felel meg a pontszerű ingának. De a függvény legjellemzőbb vonása az, hogy alig függ a  $t$  paraméter értékétől: változása az egész tartományban kevesebb, mint egy százalék. Ez a kis ingadozás pedig beolvasztatható az (1) képletben szereplő  $\varepsilon$  korrekciós tényezőbe. Idézzük fel Tangl Károly egy megjegyzését: „E módszer nagy előnye abban áll, hogy a rúd méretei csak a korrekciótagban szerepelnek s így nincs is szükség azok pontos ismeretére.” [16].

Hasonlítsuk össze ezt a gyenge függést egy másik kísérleti szituációval! Helyezzük el a vízszintes síkban lengő ingát a két derékszögű hasáb helyett két egyforma gömb alakú test között! Legyen a gömbök közti távolság ugyanakkora, mint a gömbök átmérője! A korábban elvégzett számítást könnyen megismételhetjük erre az esetre is, hiszen a gömbök gravitációs tere jól ismert. Ezt az  $U(\mathbf{r})$  függvényt a (20) képletbe helyettesítve az Eötvös-tényezőnek a négyzetes hasáb esetével analóg  $t = l/R$  paramétertől való függésére a következőt kapjuk:

$$\mathcal{E}(t) = \frac{16\pi}{3} \left[ \frac{6}{(4+t^2)^{5/2}} + \frac{12+t^2}{(4-t^2)^3} \right], \quad (22)$$

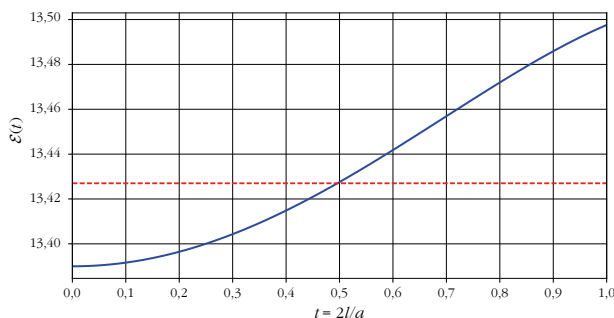
ahol  $t = l/R \leq 1$ .

Könnyen látható, hogy  $\mathcal{E}(t=0) = 2\pi \approx 6,28$  és

$$\mathcal{E}(t=1) = \pi \left( \frac{208}{81} + \frac{32}{25\sqrt{2}} \right) \approx 9,87.$$

A gömbök közt lengő inga esetén az Eötvös-tényezőnek a  $t$  paramétertől való függését a 6. ábra mutatja be. Jól látható, hogy ebben az esetben a  $t$ -függés igen határozott: a vizsgált intervallumban a függvény értéke több mint negyven százalékot változik.

Megtaláltuk tehát annak a magyarázatát, miért tért át Eötvös a gömbökkel végzett kezdeti kísérletek után a szögletes alakú ólomtömbökre. Az itt bemutatott hasonló számításokkal valószínűleg előzetesen megvizsgálta, hogy a kísérlet eredményét mennyire befolyásolják az általa nehezen kontrollálható paraméterek.

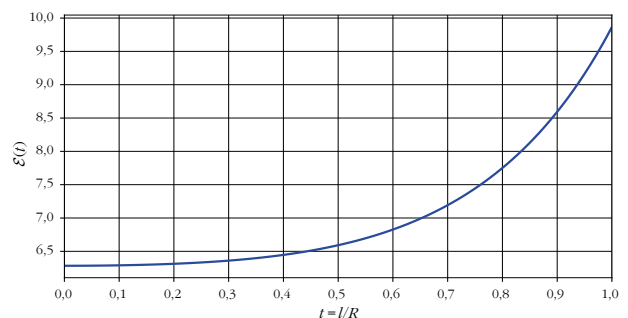


5. ábra. Az Eötvös-tényező függése a torziós inga rúdjának normált hosszától a hasábok közt lengő inga esetében

Az ingarúd hossza nincs pontosan definiálva, hiszen a végére erősített golyók sem pontszerűek. Ha nem sikerül a torziós szálat hajszálpontosan a vonzó testek közti légrés közepére helyezni, az is hasonló hatással jár, mintha a rúd hossza módosulna. Két vonzó gömb közt lengő inga esetén ez a kísérleti bizonytalanság igen nagy, akár tíz százalékos hibát is eredményezett volna a gravitációs állandó értékére vonatkozó végeredményben. Ha viszont derékszögű hasábokat használ a gravitációs tér forrásául, akkor az ingahossz bizonytalansága csak egy százaléknál kisebb hibát okoz. Ezért úgy gondolhatta, hogy érdemes a kísérletet derékszögű geometriával elvégezni (vállalva persze a hasábok gravitációs terének elméleti kiszámításával járó bonyodalmakat).

Mivel úgy éreztük, jó nyomon járunk Eötvös gondolatainak rekonstruálásában, megvizsgáltuk az Eötvös-tényező függését a kísérlet többi paraméterétől is. Korábban már láttuk a trükköt: a számítások egyszerűsítése érdekében lényeges, hogy a két ólomtömb közti hiányzó légrés négyzet alapú legyen (nevezzük a négyzet élét  $a$ -nak, ez lesz tehát a hasábok közti távolság és a hasábok  $y$  irányú szélessége). Szabadon változtatható paraméter viszont a hasábok  $x$  irányú  $b$  hosszúsága és  $z$  irányú  $c$  magassága, valamint az inga lengési síkjának függőleges  $b$  távolsága a hasábok szimmetriasíkjától. Ha mindezeket az adatokat szabad változónak tekintjük, és megismételjük a cikkben leírt számításokat, megkaphatjuk az  $\mathcal{E}(l, b, a, b, c)$  függvényt. A vonatkozó ábrákat és bonyolult képleteket nem mutatjuk be, csak kvalitatív beszámolót adunk.

Ha az inga síkját  $b$  magasságra eltávolítjuk a hasábok  $z = 0$  középsíkjától, az Eötvös-tényező rohamosan csökkenni kezd, az effektus egyre nehezebben lesz mérhető. Optimális tehát a  $b = 0$  érték, amit Eötvös választott. Ha a hasábok  $b$  hosszával és  $c$  magasságával egyaránt a végtelenbe tartunk, akkor az Eötvös-tényező (az arctg függvényeknek köszönhetően)  $8\pi$ -hez közeledik. Ez éppen az az elméleti érték, amelyet Eötvös és követői a mérést bemutató gondolatkísérlet elemzésével kaptak. Ha a  $b/a$  és  $c/a$  paramétereket egynél kisebbnek választjuk, azaz a hasábok keskenyek és laposak lesznek, akkor az Eötvös-tényező csökken, az  $l$



6. ábra. Az Eötvös-tényező függése az ingarúd hosszától a két  $R$  sugarú gömb gravitációs terében lengő inga esetében

paraméterre mutatott érzékenység viszont növekszik. Nem szabad tehát túl keskeny vagy túl lapos hasábokat használni. Az Eötvös-tényező  $b$ - és  $c$ -függésének vizsgálata azonban arra is rámutat, hogy nem érdemes túl nagy értékeket sem választani: az Eötvös-tényező  $b$  és  $c$  függvényében eleinte gyorsan nő, később viszont csak egyre lassabban közeledik a végtelenbeli  $8\pi$  értékhez. Egy kísérleti szakember ilyenkor kompromisszumot köt az elméleti követelmények és a kísérleti lehetőségek (pl. a rendelkezésére álló ólomtéglák mennyisége vagy a laborasztal teherbíró képessége) között. Eötvös ezt tette: akkora  $b$  és  $c$  értékeket választott, amelyeknél az Eötvös-tényező már elég nagy, de csak aránytalanul sok további ólomtéglá beépítésével lenne jelentősen növelhető. Így jutott el a  $b/a = 1$  és  $c/a = 2$  értékekhez, amelyek a [9] cikkben és a 2. ábrán láthatók:  $a = b = 30$  cm,  $c = 60$  cm.

Láthatjuk tehát, hogy Eötvös a kísérlet minden (az utólagos olvasó számára véletlenszerűnek tűnő) paraméterét részletes előzetes számítások és gondos optimalizálás után állapította meg.

## Az Eötvös-tényező értéke

Már csak egy kérdés maradt: honnan kapta Eötvös az (1) képletben szereplő számértéket?

Nézzük meg ismét az 5. ábrát! A  $t = 2l/a$  paraméter 0 és 1 között változhat. Szemeljük ki az intervallum közepét, a  $t = 1/2$  értéket! Ekkor az inga rúdja éppen félig tölti ki a két ólomhasáb közti üres teret. Számítsuk ki a (21) képlet alapján az Eötvös-tényezőt a  $t$  paraméter  $t = 1/2$  értékénél! Az alábbi csodálatos kifejezést kapjuk:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} = & 4 \left[ \operatorname{arctg} \left( \frac{8}{15\sqrt{5}} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{2\sqrt{5}}{3} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{3\sqrt{53}} \right) \right. \\ & - \operatorname{arctg} \left( \frac{24}{\sqrt{53}} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{2}{\sqrt{61}} \right) + 3 \operatorname{arctg} \left( \frac{8}{\sqrt{61}} \right) \\ & - 7 \operatorname{arctg} \left( \frac{8}{7\sqrt{69}} \right) + \operatorname{arctg} \left( \frac{14}{\sqrt{69}} \right) - 4 \operatorname{arth} \left( \frac{2}{3\sqrt{5}} \right) \\ & - 2 \operatorname{arth} \left( \frac{4}{3\sqrt{5}} \right) + 6 \operatorname{arth} \left( \frac{4}{\sqrt{53}} \right) + 4 \operatorname{arth} \left( \frac{6}{\sqrt{53}} \right) \\ & - 6 \operatorname{arth} \left( \frac{4}{\sqrt{61}} \right) - 4 \operatorname{arth} \left( \frac{6}{\sqrt{61}} \right) + 4 \operatorname{arth} \left( \frac{2}{\sqrt{69}} \right) \\ & \left. + 2 \operatorname{arth} \left( \frac{4}{\sqrt{69}} \right) \right] = 13,427546. \end{aligned} \quad (23)$$

Az 5. ábrán a vízszintes szaggatott (színes ábrán piros) vonal mutatja a  $t = 1/2$ -hez tartozó függvényértéket. A kifejezés most kapott egzakt értéke három tizedesjegyre megegyezik az Eötvös által közölt számmal!

## Összefoglalás

Megkaptuk tehát az Eötvös-tényező numerikus értékét. És most már válaszolhatunk a cikk elején feltett kérdéseinkre is:

1. Eötvös igen nagy valószínűséggel a most ismertett számolást követve, egy átlagos ingahosszt feltételezve, a (23) formula értékét kiszámítva jutott az általa közölt számhoz. Meg kell jegyeznünk, hogy bár az ábrák előállításához számítógépet és a *Mathematica* szimbolikus programot használtuk, a cikkben szereplő valamennyi számítást hagyományos módon, „kézzel”, azaz az Eötvös idejében rendelkezésre álló eszközökkel is elvégeztük. Ezzel egyebek között azt akartuk bizonyítani, hogy kellő türelemmel maga Eötvös (vagy valamelyik munkatársa, tanítványa) is megbírkózhatott a 48 tagú kifejezések és származékaik kiértékelésének sziszifuszi feladatával. A cikk írása közben felbukkant apró érdekességeket megismerve egyre inkább az a meggyőződésünk, hogy ez valóban így is történt.
2. Mivel az 5. ábrán látható függvénygörbe szerint az Eötvös-tényező értéke csak igen kevésbé függ az ingarúd  $2l$  hosszától, Eötvös az „Előleges jelentés”-ben nem akarta pontosítani a kísérletileg használt rúd hossz értékét, ez az elért mérési pontosság mellett nem is volt szükséges. Ha elkészült volna a későbbre ígért részletes kísérleti beszámoló, abban valószínűleg további adatok (pl. a rúd hossz mellett a golyók tömege, a használt ólomtéglák pontos sűrűsége stb.) is szerepeltek volna.
3. Eötvös az általunk feltételezett számításokat valószínűleg még a kísérlet tervezésének fázisában végezte el. Ekkor még úgy gondolta, hogy a kísérlet (többi méréséhez hasonlóan) egy-két nagyságrenddel pontosabb lesz a később ténylegesen megvalósulnál. Ezért közölt a kísérlet kiértékeléséhez használandó képletben szereplő együtthatóra egy öt értékes jegyű számot. Csak később, a mérés tényleges megvalósítása során derült ki, hogy nem várt körülmények (az inga körüli légáramlás és az ólomtéglák inhomogén volta) megakadályozták a kívánt pontosság elérését. Ez aztán valószínűleg el is vette a kedvét a kísérlet folytatásától és a leírás pontosításától.

Összefoglalásként ismét szeretnénk tisztelni a 175 éve született Eötvös Loránd, az egyik legnagyobb magyar fizikus emléke előtt, akinek még egy apró megjegyzése és a cikkében indokolatlanul hagyott számérték mögött is ilyen sok, hosszas és aprólékos munkával kibányászható fizikai és matematikai gondolat és érdekesség rejlik.

Köszönetnyilvánítás

Köszönetünket szeretnénk kifejezni Gnädig Péternek, Groma Istvánnak, Patkós Andrásnak, Sólyom Jenőnek,

Szabó Zoltánnak, Szarka Lászlónak, Tóth Gyulának, Ván Péternek és Völgyesi Lajosnak a kézirat olvasása után javasolt hasznos tanácsaikért.

## Ajánlott irodalom

1. Báró Eötvös Loránd-émlékév 2019. [www.eotvos100.hu](http://www.eotvos100.hu)
2. *Eötvös Loránd emlékalbum*, szerk.: Dobszay Tamás, Estók János, Gyáni Gábor és Patkós András, Kossuth Kiadó (2019) ISBN 978-963-09-9929-4. [http://real-eod.mtak.hu/8253/1/001-176\\_tordelt1\\_magyar.pdf](http://real-eod.mtak.hu/8253/1/001-176_tordelt1_magyar.pdf)
3. Báró Eötvös Loránd születésének 175. évfordulója, a rendezvény honlapja: Eötvös175
4. C. Rothleitner and S. Schlamminger: Invited Review Article: Measurements of the Newtonian constant of gravitation, *G. Review of Scientific Instruments* 88 (2017) 111101; <https://doi.org/10.1063/1.4994619>
5. Chao Xue, Jian-Ping Liu, Qing Li, Jun-Fei Wu, Shan-Qing Yang, Qi Liu, Cheng-Gang Shao, Liang-Cheng Tu1, Zhong-Kun Hu and Jun Luo: Precision measurement of the Newtonian gravitational constant. *National Science Review* 7 (2020) 1803–1817. <https://doi.org/10.1093/nsr/nwaa165>
6. Radnai Gyula, Cserti József: Versenyfeladatok az Eötvös-inga bővületében – 1. rész. *Fizikai Szemle* 70/11 (2020) 375–412. <https://tudosnapar.kfki.hu/VfEotvos-inga1.pdf>
7. Eötvös Loránd: A nehézség és a mágneses erő nivőfelületeinek és változásainak meghatározásáról. Az 1900-dik évi párisi physikai congressus elé terjesztett jelentés. *Matb. és Phys. Lapok IX* (1900) 361–385. [http://real-j.mtak.hu/7286/1/MTA\\_MatematikaiEsPhysikaiLapok\\_09.pdf#page=369](http://real-j.mtak.hu/7286/1/MTA_MatematikaiEsPhysikaiLapok_09.pdf#page=369)
8. Cserti József, Dávid Gyula: Az Eötvös-inga képletei. *Fizikai Szemle* 69/7–8(2019) 219–227. [http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/08/fizszem-20190708-cserti-david\\_09\\_56\\_51\\_1567151811.4595.pdf](http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/08/fizszem-20190708-cserti-david_09_56_51_1567151811.4595.pdf)
9. B. Eötvös Loránd: Vizsgálatok a gravitatio és a mágnesség köréből (Előleges jelentés). *Matematikai Természettudományi Értesítő, a M. Tud. Akadémia III. Osztályának folyóirata XIV* (1896) 221–266. [http://real.mtak.hu/103839/1/MatEsTtudErtesito\\_14\\_pages225-270.pdf](http://real.mtak.hu/103839/1/MatEsTtudErtesito_14_pages225-270.pdf)
10. Eötvös Loránd munkái és méltatása, dolgozatok és dokumentumok gyűjteménye (szerk.: Király Péter). <http://tudtor.kfki.hu/eotvos1/eotvos.html>
11. Three Fundamental papers of Eötvös Loránd. Zoltán Szabó (szerk.). Eötvös Loránd Geofizikai Intézet, Budapest, 1998. ISBN: 9637135022. (ford.: Zoltán Szabó) <https://mek.oszk.hu/21700/21757/21757.pdf>
12. Bodoky Tamás, Szabó Zoltán, Baráth István: History of the Roland Eötvös Memorial Collection. *Fizikai Szemle* 69/12 (2019) 403–407. [http://fizikaiszemle.hu/uploads/2020/01/fizszem-201912-bodoky-szabo-barath\\_09\\_43\\_37\\_1579164217.7359.pdf](http://fizikaiszemle.hu/uploads/2020/01/fizszem-201912-bodoky-szabo-barath_09_43_37_1579164217.7359.pdf)
13. História – Tudosnapár, Természettudósokhoz kapcsolódó évfordulók. <https://tudosnapar.kfki.hu/historia/index.php>
14. Kovács László: Eötvös Loránd a tudós-tanár. Berzsenyi Dániel Főiskola Fizikai Tanszék, Szombathely, (2001). <https://mek.oszk.hu/18300/18342/18342.pdf>
15. Eötvös R., Pekár D., Fekete E.: Beiträge zum Gesetze der Proportionalität von Trägheit und Gravität. *Annalen der Physik (Leipzig)* 68 (1922) 11–66. angol fordítás: R. v. Eötvös, D. Pekár and E. Fekete: Contribution to the law of proportionality of inertia and gravitation. *Annales Universitatis Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae. Sectio geologica* 7 (1963) 111–165. [https://matarka.hu/cikk\\_list.php?fusz=137841](https://matarka.hu/cikk_list.php?fusz=137841)
16. Tangl Károly: Vizsgálatok a gravitációról. *Matematikai és Fizikai Lapok* 27 (1918) 130. [https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/MTA\\_Konyvek\\_227795/?pg=114&layout=s&query=gravit%C3%A1ci%C3%B3%C3%B3l](https://adtplus.arcanum.hu/hu/view/MTA_Konyvek_227795/?pg=114&layout=s&query=gravit%C3%A1ci%C3%B3%C3%B3l) (Fizikai oldalszám 115)
17. Péter Gábor, Deák László, Gróf Gyula, Kiss Bálint, Szondy György, Tóth Gyula, Ván Péter, Völgyesi Lajos: Az Eötvös–Pekár–Fekete ekvivalenciaelv-mérések megismétlése. *Fizikai Szemle* 69/4 (2019) 111–116. [http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/04/fizszem-201904-peter-es-tarsai\\_13\\_48\\_05\\_1556624885.0311.pdf](http://fizikaiszemle.hu/uploads/2019/04/fizszem-201904-peter-es-tarsai_13_48_05_1556624885.0311.pdf)
18. Ortvay Rudolf nemzetközi fizikai problémamegoldó verseny, 2019. 27. feladat. Kitzűzők: Radnai Gyula és Cserti József. <https://ortvay.elte.hu/2019/H19.pdf>
19. Radnai Gyula, Cserti József: Versenyfeladatok az Eötvös-inga bővületében – 2. rész. *Fizikai Szemle*, 70/12(2020) 403–412. [https://epa.oszk.hu/00300/00342/00356/pdf/EPA00342\\_fizikai-szemle-2020-12\\_403-412.pdf](https://epa.oszk.hu/00300/00342/00356/pdf/EPA00342_fizikai-szemle-2020-12_403-412.pdf)
20. Bela G. Kolossvary: Eötvös Balance. *Am. J. Phys.* 27(1959) 336–343. <https://aapt.scitation.org/doi/10.1119/1.1934847>
21. F. W. Bessel: Auszug aus einem Schreiben des Herrn Prof. Bessel. *Zach's Monatsliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde XXVII* (1813) 80–85. [https://zs.thulb.uni-jena.de/receive/jportal\\_jpvolume\\_00202765](https://zs.thulb.uni-jena.de/receive/jportal_jpvolume_00202765)
22. G. Everest: An Account of the Measurement of an Arc of the Meridian between the Parallels of 18° 30' and 24° 70', Being a Continuation of the Grand Meridional Arc of India. Parnury, Allen & Co., London (1830) 93–116. [https://books.google.hr/books?id=C7c5AQAAMAAJ&pg=PA93&source=gbs\\_toc\\_r&cad=3#v=onepage&q&f=false](https://books.google.hr/books?id=C7c5AQAAMAAJ&pg=PA93&source=gbs_toc_r&cad=3#v=onepage&q&f=false)
23. Cserti József, Dávid Gyula: Élet a Laposföldön. *Fizikai Szemle* 72/8 (2022) 235–243. [http://fizikaiszemle.hu/uploads/2022/09/fizszem-202208-cserti-david\\_11\\_41\\_39\\_1662630099.5239.pdf](http://fizikaiszemle.hu/uploads/2022/09/fizszem-202208-cserti-david_11_41_39_1662630099.5239.pdf)
24. Dr. Haáz István Béla: Kapcsolat a derékszögű hasáb tömegvonzásának potenciálja és e potenciál deriváltjai között. *Magyar Állami Eötvös Loránd Geofizikai Intézet, Geofizikai Közlemények II/7* (1953) 55–67. [http://epa.oszk.hu/02900/02941/00002/pdf/EPA02941\\_geofizikai\\_kozlemenyek\\_1953\\_02\\_057-066.pdf](http://epa.oszk.hu/02900/02941/00002/pdf/EPA02941_geofizikai_kozlemenyek_1953_02_057-066.pdf)

# ÁRAMLÁSTANI JELENSÉGEK MIKROSZKOPIKUS MÉRETTARTOMÁNYBAN – MIKROFLUIDIKAI RENDSZEREK ÉS ALKALMAZÁSAIK

Bányai Anita<sup>1,2,3</sup>, Bató Lília<sup>1,2</sup>, Leelőssyné Tóth Eszter<sup>1</sup>, Varga Máté<sup>3</sup>, Fűrjes Péter<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>EK-MFA-MRL, <sup>2</sup>OE-ATDI, <sup>3</sup>77 Elektronika Kft.

\* Levelezőszerző: [furjes.peter@ek.hun-ren.hu](mailto:furjes.peter@ek.hun-ren.hu)

## Mikrofluidikai rendszerek

A mikrofluidikai rendszerek 1–1000 µm közötti keresztmetszeti méretekkkel rendelkező csatornákat tartalmazó, kis mennyiségű folyadék (akár  $fl - 10^{-15}$  Liter) mani-

pulálására alkalmas mikroszerkezetek. A mikrofluidika jelentése egyszerre fed le a mikrométeres karakterisztikus méretekkkel rendelkező csatornákból kialakuló áramlások hidrodinamikai jellemzőivel, illetve az azok vizsgálatával foglalkozó tudományágat, valamint a

miniatürizált áramlási rendszerek (csatornák, kamrák stb.) kialakítási technológiáját és a kialakított eszközök alkalmazásait [1].

A mikrofluidikai rendszerek történetét a hatvanas évekig (1965), az első tintasugaras nyomtatók megjelenéséig vezethetjük vissza. A miniatűr tintacseppeket alkalmazó nyomtatás technológiai megvalósítása a mikrométeres átmérőjű fűvőkák mikrotechnológiai kialakításán alapult. A hetvenes években (1979) már miniatűr, szilíciumchip formában létrehozott gázkromatográfiás oszlopokat mutattak be, a nyolcvanas években pedig megjelentek a szilícium mikromechanikai megmunkálásával megvalósított vezérelhető szelepek és pumpák. Nem sokkal később már a teljes analitikai rendszerek miniatürizálásának gondolata ( $\mu$ TAS) is felmerült, előrevetítve a vizsgálati módszerek forradalmasítását, gyorsabb, hatékonyabb, olcsóbb megoldások bevezetésével. A 90-es években – a Humán Genom Projekt igényeinek és eredményeinek köszönhetően is – megjelentek az üvegchipeken kialakított, párhuzamosított kapilláris-elektroforézist megvalósító rendszerek, amelyek felgyorsították a DNS-szekvenálás lépéseit. Ebben az időszakban – az optikai alkalmazások igényeinek megfelelően – a hagyományos szilícium-mikromechanika köréből kilépve újabb anyagrendszerek váltak a mikrofluidikai eszközök elterjedt szerkezeti anyagaivá, mint az üveg, illetve számos polimer is, mint a PMMA (poli-metil-metakrilát) vagy a PDMS (poli-dimetil-sziloxán) [2].

A mikrofluidika kapcsán tehát olyan multidiszciplináris tudományterületről van szó, amely:

1) orvosok, biológusok, vegyészek, fizikusok, villamosmérnökök és sok más területen dolgozó szakember tudásának kombinálására épül, ami feltétlenül szükséges a megfelelő – alkalmazásspecifikus – architektúrák kialakításához, a felületkezelési eljárások kiválasztásához, az érzékelőrendszerek integ-

rálásához vagy a nagy laboratóriumokban bevett kimutatási eljárások adaptálásához, miniatürizálásához,

- 2) nagyban kapcsolódik a félvezető-gyártástechnológiához, ugyanis leggyakrabban a mikro- és nanotechnológiai eljárások (litográfia, vékonyréteg-leválasztások, különböző nedves vagy száraz (plazma-) marások) alkalmazásával alakítják ki az áramlási struktúrákat, illetve az integrált szenzorokat is [2],
- 3) kifejezetten igényli az anyagtudósok, polimertechnológusok, vegyészek, mechatronikai mérnökök és informatikusok közreműködését a laboratóriumi környezetben fejlesztett, tesztelt és prototípusított platformok tömeggyártásba való átültetéséhez [3, 4].

## A mikrofluidikai chipek

A mikrofluidikai chipek mikroszkopikus csatornák változatos rendszerét tartalmazzák, olyan koncepció mentén tervezve és kialakítva, amely alkalmas a megcélzott kémiai (mikroreaktorok), analitikai (Lab-on-a-Chip), sejtenyésztési (Organ-on-Chip) célfeladatok megvalósítására. Az alkalmazott mérettartomáynak megfelelően a lejátszódó kémiai (biokémiai) reakcióknak, analitikai eljárásoknak minimális a minta- és reagensigénye. Precíz technológiai megvalósításukból adódóan biztosítják



**Bányai Anita** a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai és Bionikai Karán szerzett MSc-diplomát orvosi biotechnológia szakon. Jelenleg az Óbudai Egyetem Anyagtudományi és Technológiai Doktori programjának hallgatója, kutatási tevékenységét a HUN-REN Energia-tudományi Kutatóközpont (EK-MFA) Mikrorendszerek Laboratóriumában és a 77 Elektronika Kft. Új Technológiák Csoportjában végzi, ahol mikrofluidikai alapú sejtanalitikai alkalmazások fejlesztésén dolgozik Point-of-Care orvosi diagnosztikai alkalmazásokhoz.



**Bató Lilla** a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Természettudományi Karán szerzett MSc-diplomát fizikus szakon, nanotechnológia és anyagtudomány specializációban. Jelenleg az Óbudai Egyetem Anyagtudományi és Technológiai Doktori programjának hallgatója, kutatási tevékenységét a HUN-REN Energia-tudományi Kutatóközpont (EK-MFA) Mikrorendszerek Laboratóriumában végzi, ahol mikrofluidikai alapú sejtanalitikai és gyógyszerhatóanyag-vizsgálati platformok, Organ-on-Chip rendszerek kutatásával foglalkozik.



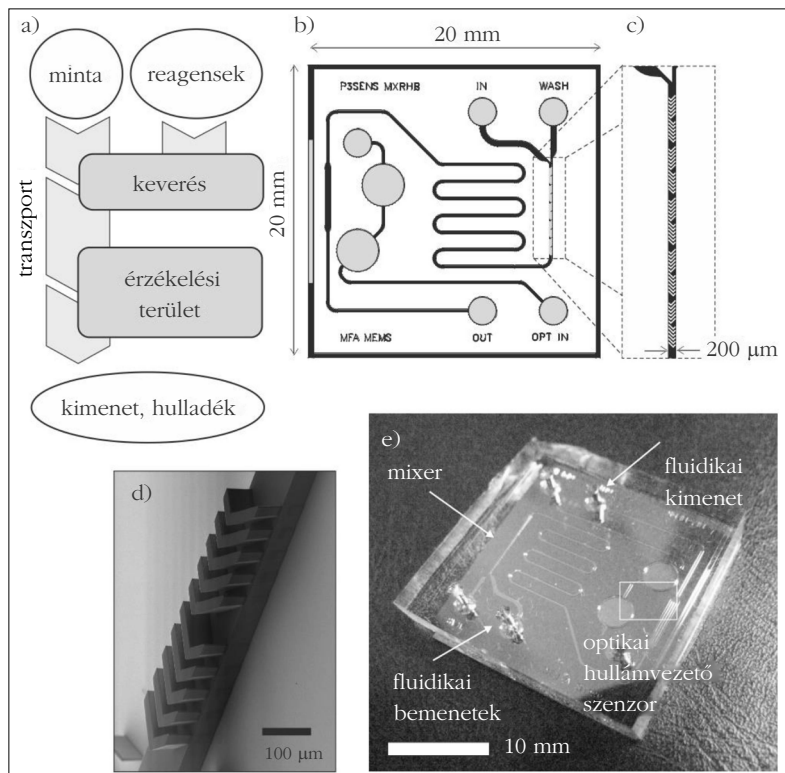
**Leelőssyné Tóth Eszter** a Pázmány Péter Katolikus Egyetem Információs Technológiai és Bionikai Karán szerzett molekuláris bionikus Bsc-, info-bionikus MSc-diplomát, majd PhD-fokozatot. Jelenleg a HUN-REN Energia-tudományi Kutatóközpont (EK-MFA) Mikrorendszerek Laboratóriumának munkatársa, ahol mikrofluidikai rendszerek kutatás-fejlesztésével, ezen belül a mikrocsonnák számítógépes áramlási modellezésével foglalkozik.



**Varga Máté** villamosmérnök, majd orvostech-nikai mérnök és közgazdász diplomákat szerzett a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetemen. Jelenleg a 77 Elektronika Kft.-nél a Point-of-Care szegmens Új Technológiák Csoport vezetője, ahol a Lab-on-a-Chip alapú *in vitro* diagnosztikai (IVD) alkalmazásokhoz kapcsolódó kutatás-fejlesztés szakmai irányítója.



**Fűrjes Péter** a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem (BME) mérnök-fizikus és MBA szakon végzett, majd fizika tudományterületen szerzett PhD-fokozatot. Fő kutatási területe komplex mikrorendszerek – BioMEMS, Lab-on-a-Chip, Organ-on-Chip eszközök – fejlesztése analitikai, orvosi diagnosztikai, terápia-monitorozási alkalmazásokhoz. A HUN-REN Energia-tudományi Kutatóközpont (EK-MFA) Mikrorendszerek Laboratóriumának vezetője, a BME címzetes egy. docense. Eurosensors Fellow, az Eurosensors konferenciák irányítótestületének tagja, az Európai Nanoelektronikai Társaság (AENEAS) tudományos bizottságának tagja.



1. ábra. Optikai hullámvezető szenzorral integrált mikrofluidikai chip a) funkcionális alegységei, b) ezeknek megfelelő layout, c) kiemelve a keverő egységet, illetve d) a lágy litográfias technológiában alkalmazott mikrostrukturált epoxi öntőszerszám (a halszájka keverőszerkezet negatívja – pásztázó elektronmikroszkópos felvétel) és e) a megvalósított eszköz [5]

a folyadékok nagy pontosságú kezelését, ami javulást jelenthet mind a kémiai reakciók kontrollálásának, mind az analitikai feladatok kimutatási pontosságának és reprodukálhatóságának területén. A technológia lehetővé teszi a kritikus szerkezetek multiplikálását, ezáltal a folyamatok könnyebben párhuzamosíthatók, és az egyes kémiai reakciók és analitikai mérések ideje jelentősen rövidíthető. Az automatizálhatóság lehetővé teszi többlépcsős reakciók pontos végrehajtását, illetve olyan komplex folyamatok chipszintű megvalósítását, mint a DNS-amplifikáció és -detektálás, illetve toxinok, diagnosztikai markermolekulák vagy patogén baktériumok kimutatása. Az 1. ábra egy ilyen mintapreparációs és érzékelési funkciót integráló mikrofluidikai chip koncepcióját és architektúráját mutatja be [5].

A mikrofluidikai szerkezetek megvalósíthatóságának kulcskérdése a nagy felbontású megmunkálási módszerek alkalmazása. A laboratóriumi kísérleti vagy prototípuseszközök legyártásához kézenfekvő megoldás lehet a mikromechanikai technológiák, ezen belül is a lágy litográfia alkalmazása. A lágy litográfia olyan replikaöntéses eljárás, amely szilíciumhordozón, litográfias eljárásokkal mikrométeres felbontással kialakított mesterformát, illetve jól kezelhető, elasztikus polimer szerkezeti anyagot alkalmaz. Az öntőforma anyaga leggyakrabban az UV-fényre keményedő, epoxialapú SU–8 fotoreziszt lakk, az alkalmazott szer-

kezeti anyag pedig a kiváló optikai és kémiai tulajdonságokkal rendelkező, szilíciumalapú polimer, a poli-dimetil-sziloxán (PDMS – Dow Sylgard™ 184). Az 1d. ábra a replikaöntéshez használt nagy felbontású SU–8 (Kayaku Advanced Materials) szerkezetet szemlélteti. A laboratóriumokban használt prototípusszintű mikrofluidikai eszközök köréből továbblépve, az ipari sorozatgyártás már legtöbbször a polimermegmunkálás bevett technológiáira (pl. melegpréselés, fröccsöntés), illetve a kompatibilis polimerek (COC – ciklikus olefin kopolimer, polikarbonát és egyéb termoplasztikus polimerek) alkalmazására épül [3, 4]. A gyártástechnológia legnagyobb kihívása és legköltségesebb eleme ebben az esetben a mikrométeres felbontású alakadó szerszámok – fém-szikraforgácsolással, a szilícium mély reaktív ionmarásával történő – kialakítása.

## Laboratórium egy chipen – „Lab-on-a-Chip” technológia

A mikrofluidikai szerkezetek alkalmazásai között gyakran találkozunk a „Lab-on-a-chip” (LoC) [6] rendszerek vagy a „miniatürizált teljes analitikai rendszerek” ( $\mu$ TAS) kifejezésekkel. Az említett miniatürizált eszközök feladata elsősorban az orvosi diagnosztikában bevett laborigényes analitikai feladatok házi orvosi rendelőben, rohamkocsiban vagy betegágy mellett (Point-of-Care – PoC) elvégzése, meggyorsítva ezzel a diagnosztikai döntéshozatalt. Az analitika célja természetesen az, hogy a szükséges helyen és időben, percekben belül, hatékonyan, jellemzően néhány nano- vagy mikroliter reagens és minta felhasználásával történhessen meg a diagnózis felállítása, és a páciens a lehető leghamarabb részesüljön a szükséges orvosi ellátásban. Gondoljunk csak a cukorbetegség esetén a vércukorszint folyamatos ellenőrzésére, a kardio- vagy cerebrovaszkuláris katasztrófák (pl. szívinfarktus, sztrók), a gyors lefolyású bakteriális, vírusos fertőzések (pl. szepszis, agyhártyagyulladás, Covid-19) kimutatására, melyeknél az azonosítás, illetve a terápiás döntéshozatal és az ellátás minden perce számít. A Lab-on-a-Chip eszközök előnyei, hogy

- a teljes bioanalitikai folyamat integrálható és egyszerűsíthető a végfelhasználó szempontjából,
- pontosabb és nagyobb felbontású méréstechnikák definiálhatók célalkalmazásokhoz,
- minimális a reagens- és mintaigény,
- gyorsabb analízist tesznek lehetővé a rövidebb reakcióidők, szeparációs idők miatt,

- támogatják a multiplexált, erőteljesen párhuzamosított és ezáltal nagy áteresztőképességű elemzéseket,
- a hordozható eszközök megteremtik a betegágy melletti (PoC) alkalmazások alapjait,
- globálisan csökkentik az analitikai feladatok fajlagos költségeit.

Természetesen a mikrofluidikai rendszerek koncepcionális célja, hogy minél szélesebb tárházát integrálják a mintapreparációs és az érzékelési funkcióknak, ezáltal egy olyan komplex bioanalitikai eszközt megvalósítva, mely megfelelően magas szelektivitással, alacsony mérési határral és rövid válaszidővel képes kimutatni a teszt eredményét – mindazonáltal a végfelhasználótól már nem feltétlenül igényel komoly szaktudást az alkalmazása. Ennek megfelelően a Lab-on-a-Chip eszköz funkciói közé tartozik a mintagyűjtés, -szállítás, -előkészítés, miniatürizált, integrált mechanikai, kémiai vagy bioszenzorokkal rendelkezik, és ezáltal képes a mintában fellelhető célmolekulák vagy sejtek nagy érzékenységgű minőségi és mennyiségi analízisére. A HUN-REN Energiatudományi Kutatóközpont Mikrorendszerek Laboratóriuma és a 77 Elektronikai Kft. együttműködése is ilyen mikrofluidikai rendszerek fejlesztését célozza, amelyek funkcionalitásukat tekintve alkalmasak a diagnosztikai eszközben a mérési módszernek megfelelő mintaszállítási és mintaelőkészítési feladatok elvégzésére. A mintapreparáció lépései közül kiemeljük a következőket:

- *mintaszállítás* chipen belül (10–100 mm távolságra),
- *keverés* (a mikroszkopikus karakterisztikus méretek miatt az áramlások jellemzően laminárisak – alacsony a jellemző Reynolds-szám –, így a keveredés alapesetben csak diffúzióval valósulhat meg),
- *szeparáció, filtrálás*: részecskék, sejtek méret vagy egyéb tulajdonságok szerinti, passzív (filtereken, hidrodinamikai erőkon alapuló) vagy aktív (elektro-, magneto-, akusztoforetikus stb.) módszerekkel történő válogatása.

## Áramlástan jellemzők a mikroszkopikus mérettartományban

A mikrofluidikai rendszerek analitikai felhasználása során nem csupán a technológiai megvalósítás és az érzékelőfunkcióval való integrálás okoz komoly kihívást, hanem a felület-térfogat arány mikro- és nanométeres méretskálán tapasztalható jelentős megváltozása, ami a felületi (pl. viszkozus) jelenségek és erők dominanciájának kialakulásához vezet a térfogatiakkal (pl. tehetetlenségi) szemben. A felületi és térfogati – viszkozus és tehetetlenségi – erők arányát jellemezhetjük a dimenziómentes Reynolds-számmal (1), mely a különböző skálájú áramlások dinamikájának összehasonlítását is segíti:

$$Re = v(L/\nu), \quad (1)$$

ahol  $v$  a karakterisztikus áramlási sebesség,  $L$  egy jellemző karakterisztikus átmérő,  $\nu$  pedig a folyadék kinematikai viszkozitása. A Reynolds-szám az áramlás tulajdonságait jellemzi: tipikusan 2200 alatti Reynolds-szám esetén azt mondhatjuk, hogy az áramlás lamináris, vagyis réteges és örvénymentes, tehát az áramlási tér adott pontjában a lokális sebességvektoroknak nincs az áramlási irányra merőleges komponense. Ezzel szemben a magasabb Reynolds-számok a turbulens áramlásokat jellemzik. Figyelembe véve, hogy a mikrofluidikai csatornák tipikus átmérője 1–100  $\mu\text{m}$ , a kísérletek során beállított jellemzően néhány  $\mu\text{L/s}$  ( $10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$ ) térfogatáram, egy 100  $\mu\text{m}$  széles és 100  $\mu\text{m}$  magas ( $10^{-8} \text{ m}^2$  keresztmetszeti felülettel rendelkező) mikroszatornában körülbelül 0,1 m/s áramlási sebességet jelent. A Reynolds-szám ebben az esetben tehát víz – vagy emberi vérplazma – viszkozitásával számolva a 10-es nagyságrendbe esik. Ezen a skálán tehát az áramlás kizárólag lamináris, azaz réteget, amiből következően a makroskálán hatékonyan működő, térfogati jelenségeken alapuló keverési vagy szeparálási módszerek (pl. rázás, forgatás, centrifugálás) korlátozottan alkalmazhatók, így ezeket a funkciókat merőben új megoldásokkal kell helyettesíteni.

Az újfajta keverési és szeparálási eljárások kidolgozásához nagy segítséget nyújt számunkra a véges-elem-modellezés (*finite element modelling* – FEM). E modellek az áramlás dinamikáját jelmező, lendületre, energiára és tömegre felírt (2) Navier–Stokes-egyenlet numerikus megoldásán alapulnak:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (2)$$

ahol  $p$  a nyomás,  $\rho$  a sűrűség,  $\mathbf{g}$  a gravitációs térerő vektora,  $\nu$  pedig a kinematikai viszkozitás. Az egyenlet tagjai a bal oldalon sorban a lokális gyorsulást, tömegáramot, a jobb oldalon a nyomásgradiensből származó erőt, molekuláris viszkozitást és a gravitációt fejezik ki. Jól látható, hogy az áramlási tag nemlineáris, ebből következik, hogy az egyenletnek egy adott méretskálán kapott megoldása nem skálázható át egy másik mérettartományra. Az egyenlet numerikus megoldása történhet véges-elemes (FEM) módszerrel, ezt alkalmazza az általunk használt COMSOL Multiphysics program is [7].

A numerikus szimuláció során először a vizsgálandó mikrostruktúra geometriáját hozzuk létre, definiáljuk a kezdeti és peremfeltételeket, létrehozuk a számítási rácsot, a program pedig ezeken a rácsponatokon adja meg a vizsgált egyenlet differenciális alakjának numerikus megoldásait. A számítások eredménye a sebesség-, nyomás-, és koncentrációmező, melyeket grafikusán is megjeleníthetünk. Az itt kapott eredmények nagyban segítik, könnyítik a mikrofluidikai eszközök tervezését, optimalizálását, hiszen számtalan

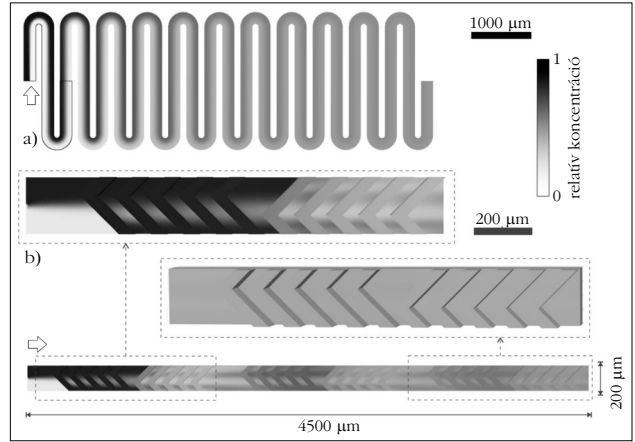
struktúrát kipróbálhatunk még a költséges gyártás és laboratóriumi kísérletek előtt.

## Mintaszállítás mikrocatornákban – a kapillaritást kihasználva

A mikrofluidikai rendszerek egyik legfontosabb funkciója és előnye a precíz, időben és lokálisan is kontrollált folyadéktranszport. A pontos minta- és reagensszállítás lehetővé teszi a reakciók tervezett megvalósítását, az érzékelési feladatok érzékenységének, felbontásának és reprodukálhatóságának növelését. Mikroszkopikus csatornákban történő folyadékszállítás esetén beszélhetünk autonóm vagy kapillárisjelenségeken alapuló, illetve külső – pneumatikus, fecskendő, piezo- – pumpák alkalmazásával megoldott mozgatásról. Autonóm folyadéktranszport esetén a kapilláriserők, a felületi feszültség okozta kapillárisnyomás-változás a minta-áramlás hajtóereje. A helyes kapillárisgeometria és felületmódosítás megválasztásával módosíthatjuk, akár helyfüggő módon beállíthatjuk a lokális áramlási sebességeket, illetve speciális funkcionális elemek beépítésével áramlási határokat, vagy fluidikai egyenirányító eszközöket (diódákat) hozhatunk létre [8]. Ebben az esetben a mozgatott mintamennyiség, illetve a kialakuló áramlási sebességek megválasztására kisebb mozgásterünk van, de mivel ez nem igényel külső pumpát, kompaktabbá, hordozhatóvá tehető az analitikai platform – így ez a különböző gyorsesztek esetén előszeretettel alkalmazott mintaszállítási módszer.

## Keverés a mikroskálán – a lamináris áramlás kihívásai

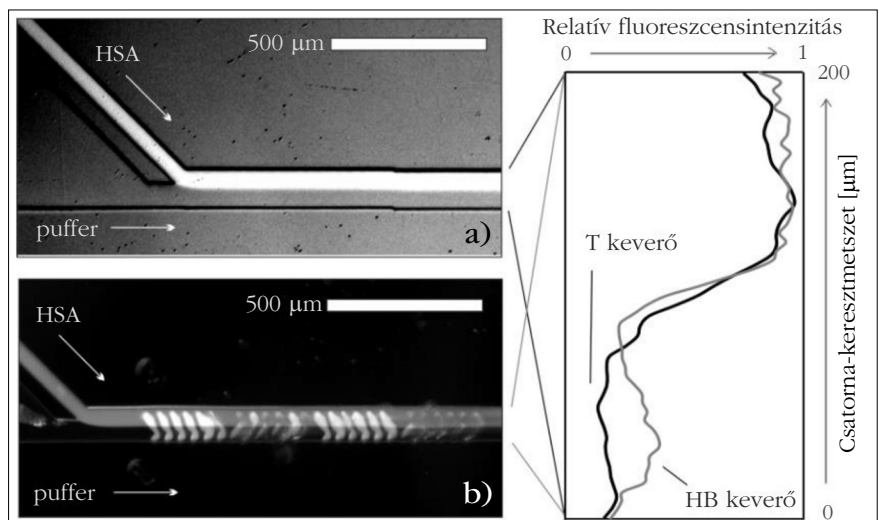
Mikrofluidikai környezetben a jellemzően lamináris áramlás miatt nem triviális két folyadék (pl. minta és reagens) teljes mértékű keveredése. A mikroskálán is alkalmazható keverőszerkezetek működési módszerük alapján két csoportba sorolhatók. Az aktív mikrokeverők a külső energia-befektetéssel működő aktuátorok által létrehozott, a hidrodinamikai folyamatokra szuperponálódó jelenségeket használják ki, mint az akusztoforézis, magneto-forézis, elektroforézis vagy egyéb elektrokinetikai jelenségek. Ezzel szemben passzív mikrokeverőn olyan struktúrákat értünk, melyek az áramlás kinetikus energiáján kívül nem igényelnek más külső energiabefektetést a műkö-



2. ábra. Két folyadék keveredésének szemléltetése (relatívkoncentráció-eloszlás) mikrofluidikai környezetben – számítógépes szimuláció. Egyszerű csatornában a) a folyadékok körülbelül 44000 mikrométer hosszú út megtétele után keverednek el, míg b) a halszállkakeverőben ennek tizede is elég [9]

désükhöz. Ezekben az eszközökben a keverési folyamat kizárólag diffúzió vagy mesterségesen létrehozott transzverzális (oldalirányú) áramláson alapul. A diffúzió alapuló keverés nehézsége, hogy mikroszkopikus környezetben a keveredési felület kicsi, a teljes keveredéshez így nagy utak megtételére, azaz hosszú csatornára van szükség (2a. ábra), mely a chipméret miatt sokszor nem megvalósítható [9].

A kényszerített áramláson alapuló mikrokeverők az áramlás saját magába ágyazásával vagy a geometriából adódó, keresztirányú áramlás létrehozásával növelik a rendelkezésre álló diffúziós felületet, ami jelentősen gyorsítja a keveredést. Egy ilyen szerkezetre jó példa a halszállkakeverő (*berringbone mixer*), mely a mikrocatorna alján elhelyezett halszállkákra emlékeztető, másodlagos csatornák segítségével hoz létre transzverzális áramlást (2b. ábra).



3. ábra. Fluoreszcens humán szérumalbumin- (HSA-) oldat keveredése T-csatornás a) és halszállkakeverőt b) alkalmazó csatornákban. Az oldalirányú másodlagos csatornák okozta transzverzális áramlás már néhány száz µm keveredési út után is emelkedő HSA-koncentrációt hoz létre a pufferoldatban [10]

A halszállakeverőben kialakuló áramlás a váltakozó örvényes (*blinking vortex*) áramláshoz igen hasonló, mely a legegyszerűbb kétdimenziós kaotikus áramlás. Itt a reakcióterben két külön középpont körül felváltva forog a folyadék. A váltakozó elrendezésű halszállak által létrehozott másodlagos áramlás is a két képzeletbeli középpont körül váltakozva forgatja a folyadékot. A 3. ábra demonstrálja a transzverzális áramlások keveredést javító hatását fluoreszcens humán szérumalbumin- (HSA-) oldat és natív puffer mikrocatornáknak történő egymás mellett áramlása esetén [10].

## Áramló részecskék fókuszálása és méret szerinti elválasztása – a Dean-örvények

A tehetetlenségi migráció jelenségét előszeretettel alkalmazzák részecskeszeparálásra, -fókuszálásra, -filtrációra, -dúsításra vagy a részecskék megfelelő pozicionálására, különösen áramlásos citometriás

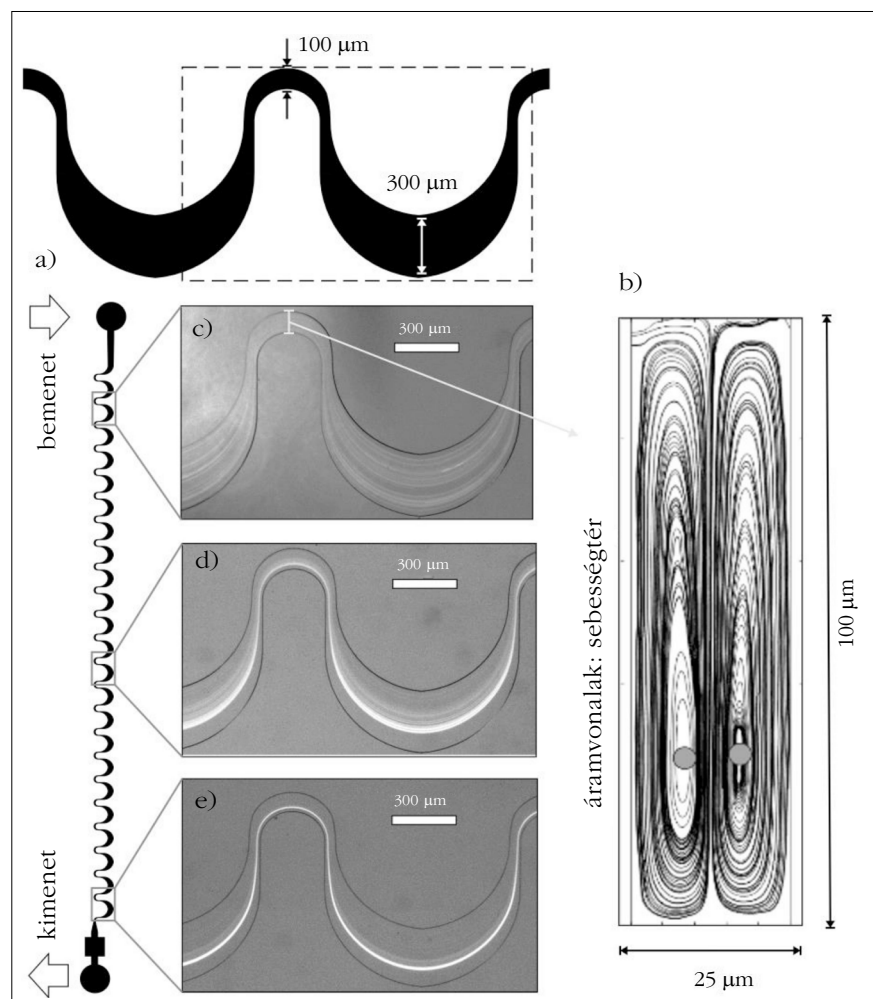
mérések esetén, ahol kritikus, hogy a vizsgálandó sejtek releváns része jusson el az optikai kiolvasás helyszínére. Összefoglalónkban egy passzív, hidrodinamikai jelenségen alapuló szeparációs módszert emelünk ki [11].

Newtoni folyadékok áramlásában is előállhat speciális részecskerendeződés, akár külső erők alkalmazása nélkül. Már a hatvanas években megfigyelték, hogy kör keresztmetszetű csatornában a gömb alakú részecskék viszonylag alacsony Reynolds-számok mellett is egyensúlyi pozíciókba, körgyűrűk mentén rendeződnek. A részecskék egyensúlyi helyzetüket a nyíróerők indukálta emelőerő, illetve a fal hatása okozta emelőerő hatására veszik fel. Az egyensúlyi pozíciók számát és helyzetét a csatornageometria, a részecskeméret és az alkalmazott áramlási sebesség is befolyásolja. A kanyarulatokkal rendelkező – szimmetrikus, aszimmetrikus, spirális – csatornák esetén a részecskék viselkedését az ezekben ébredő, egymással ellentétesen forgó Dean-örvények is méretfüggően befolyásolják. A mikrofluidikai rendszerben kialakuló másodlagos turbulens áramlást és az örvények hatását a dimenzió nélküli Dean-szám ( $De$ ) jellemzi:

$$De = Re_c [D_h / (2R)]^{1/2}, \quad (3)$$

ahol  $Re_c$  a csatornát jellemző Reynolds-szám,  $R$  a csatornagörbület sugara,  $D_h$  a hidraulikus átmérő, melyet a csatorna szélessége ( $w$ ), illetve magasságának ( $b$ ) viszonya alapján az alábbi módon számolunk:  $D_h = 2wb / (w + b)$ .

A 4. ábrán  $4,8 \mu\text{m}$  átmérőjű fluoreszcens polisztirol-részecskék laterális fókuszálódása követhető periodikusan változó keresztmetszetű kanyarulatos csatornában. A kialakuló Dean-örvények középpontjainak megfelelő egyensúlyi pozíciót egyre pontosabban veszik fel a részecskék a csatornában előrehaladva. A Dean-örvényeket a kanyarulatos csatorna keresztmetszetében a 4b. ábra szemlélteti, amely a végelem-modell alapján, a Comsol Multiphysics 5.3.a szoftverrel numerikusan számított sebességteret mutatja [12]. Áramlási szimulációk és kísérleti eredmények is alátámasztják, hogy az áramlási sebesség emelésével, a csatorna-keresztmetszet csökkentésével vagy a csatornahossz megnövelésével emelhető a fókuszálás hatékonysága.



4. ábra. Nem deformálható,  $4,8 \mu\text{m}$  átmérőjű polisztirolgyöngyök laterális fókuszálása periodikus, aszimmetrikusan szélesedő kanyarulatos csatornában. a) Layout és laterális méretek. b) A gyöngyök a csatornában kialakuló Dean-örvényeknek FEM-moddal megfelelő egyensúlyi pozíciókban egyre pontosabban fókuszálódnak a csatornában előre haladva: c), d), e) [12]

A sejtes biológiai minták komoly kihívást jelentenek a mikrofluidikai rendszerben megvalósított paszszív laterális szeparáció esetén: míg a kísérleti stádiumban alkalmazott polisztirolgyöngyök gömb alakúak és nem rugalmasak, a valós sejtek változatos alakúak és mechanikai jellemzőkkel rendelkeznek. Az áramlásban ébredő, kiterjedt testekre ható nyíróerő jelentősen befolyásolja azok csatornában kialakuló mozgásformáját. Az *E. coli* baktérium például pálcika formájú, rugalmas, alakjából adódóan oszcillációs mozgással is haladhat az áramlásban. A vörösvértestek nagyfokú deformálhatósággal rendelkeznek, megnyúlhatnak, zsugorodhatnak, bikonkáv alakjuknak köszönhetően felvehetnek forgó-, pörgőmozgást az áramlásban. Egy gömb alakú *Saccharomyces cerevisiae* élesztőgomba viselkedése azonban nagyban hasonlít a nem deformálható modellgyöngyökéhez. A sejtek kezelhetőségét természetesen nagyban befolyásolja az alkalmazott minta sűrűsége, összetétele, de a mikrofluidikai csatorna átteresztőképessége, az alkalmazott térfogatáramok és a kialakuló lokális sebességértékek is, figyelembe véve esetleges roncsolódásukat.

## Összefoglalás

A mikrofluidikai rendszerek tehát mikroszkopikus, akár a sejtekével összehasonlítható karakterisztikus méretekkel rendelkező csatornahálózatokat tartalmazó mikrorendszerek. A jellemző méretekből adódóan az eszközök előállítására mikromechnikai technológiákon alapuló megoldásokat igényel. Az alkalmazott gyártástechnológiák egyszerre valósítják meg a szerkezet specifikus feladathoz történő adaptációját, a miniatürizációt, a makroszkopikus csatlakoztathatóságot, de az eldobhatóságot is – ami olcsó és nagy tömegű gyárthatóságot is feltételez.

A mérettartomány miatt a hidrodinamikai folyamatokat főképpen a felületi erők dominálják a térfogati erőkkel szemben: a kialakuló áramlás lamináris – így a mintamanipuláció (keverés, szűrés, szeparáció) speciális megoldásokat igényel (pl. geometriai inhomogentások), azonban a kapillaritás kihasználható paszszív, külső beavatkozás nélküli mintaszállításra.

A mikrofluidikai rendszerek előnyös tulajdonságait – mint a minimális minta- és reagensigény, pontos és tervezhető manipuláció, az érzékelők integrálhatósága – egyre több alkalmazás használja ki, mint a kémiai mikroreaktorok, miniatürizált teljes analitikai rendszerek ( $\mu$ TAS), chiplaboratóriumok (Lab-on-a-Chip), sejt- és szövettenyésztő eszközök (Organ-on-Chip). Ezek a multidiszciplináris kutatási területek kombinálásával fejlesztett felhasználóbarát platformok forradalmi áttörést hozhatnak az orvosi diagnosztikában, a személyre szabott terápia tervezésében (personal medicine), de a gyógyszerhatóanyag-fejlesztésben és -tesztekben is.

## Köszönetnyilvánítás

A közlemény megírását, illetve a kapcsolódó kutatómunkát Magyarország kormánya támogatta a Nemzeti Kutatási, Fejlesztési és Innovációs Alapon (NKFIA) keresztül a VEKOP-2.2.1-16-2017-00001 (Gyors hűgűti baktériumelemző mérőkészülék fejlesztése – *Rapid urine bacteria analyzer* – RUBA) és az INBIOM TKP2021-EGA-04 (Innovatív bioérzékelési módszerek egészségügyi alkalmazásokhoz) projektek során. Bányaai Anita doktori munkáját a KDP-2020 Kooperatív Doktori Program támogatta. Köszönjük a Mikrorendszerek Laboratórium és a 77 Elektronika Kft. résztvevő dolgozóinak a fejlesztett mikrofluidikai eszközök mikro-mechanikai technológiákkal történő megvalósításában és karakterizációjában nyújtott segítségét.

## Irodalom

- Whitesides : The origins and the future of microfluidics. *Nature* 442 (2006) 7101. DOI: 10.1038/nature05058
- Convery N., Gadegaard N.: 30 years of microfluidics. *Micro Nano Eng.* 2 (2019) 76–91. DOI: 10.1016/j.mne.2019.01.003
- Sollier E., Murray C., Maoddi P., Carlo D. D.: Rapid prototyping polymers for microfluidic devices and high pressure injections. *Lab. Chip* 11/22 (2011) 3752–3765. DOI: 10.1039/C1LC20514E
- Konstantinou D., Shirazi A., Sadri A., Young E. W. K.: Combined hot embossing and milling for medium volume production of thermoplastic microfluidic devices. *Sens. Actuators B Chem.* 234 (2016) 209–221. DOI: 10.1016/j.snb.2016.04.147
- Fürjes P. et al.: PDMS microfluidics developed for polymer based photonic biosensors. *Microsyst. Technol.* 21/3 (2015) 581–590. DOI: 10.1007/s00542-014-2130-y
- McRae M. P., Rajsri K. S., Alcorn T. M., McDevitt J. T.: Smart diagnostics: Combining artificial intelligence and *in vitro* diagnostics. *Sensors* 22/17 (2022) Art. sz. 17. DOI: 10.3390/s22176355
- COMSOL Multiphysics® Simulation Software, <https://www.comsol.com/comsol-multiphysics>, utolsó megtekintés: 2023.01.19.
- Holczer E., Fürjes P.: Effects of embedded surfactants on the surface properties of PDMS; applicability for autonomous microfluidic systems. *Microfluid. Nanofluidics* 21/5 (2017) 81. DOI: 10.1007/s10404-017-1916-5
- Nguyen N.-T.: *Micromixers: Fundamentals, Design and Fabrication*. William Andrew, 2011.
- Tóth E. L., Holczer E. G., Iván K., Fürjes P.: Optimized simulation and validation of particle advection in asymmetric staggered herringbone type micromixers. *Micro-machines* 6/1 (2015) Art. sz. 1. DOI: 10.3390/mi6010136
- Sajeesh P., Sen A. K.: Particle separation and sorting in microfluidic devices: a review. *Microfluid. Nanofluidics* 17/1 (2014) 1–52. DOI: 10.1007/s10404-013-1291-9
- Bányaai A., Tóth E. L., Varga M., Fürjes P.: Geometry-dependent efficiency of Dean-flow affected lateral particle focusing and separation in periodically inhomogeneous microfluidic channels. *Sensors* 22/9 (2022) Art. sz. 9. DOI: 10.3390/s22093474

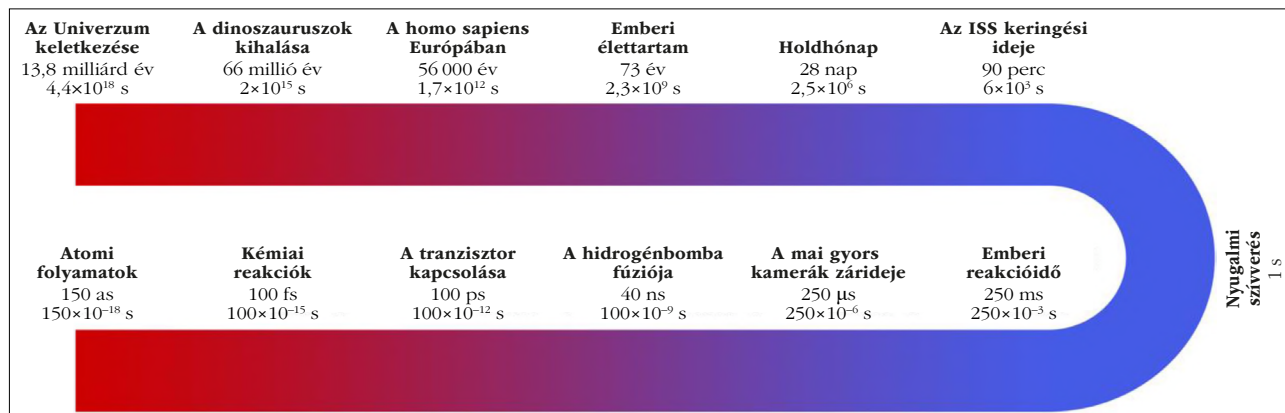
## KRAUSZ FERENC, AZ ATTOFIZIKA ÚTTÖRŐJE

Dombi Péter<sup>1,2</sup>, Varjú Katalin<sup>2,3</sup><sup>1</sup> HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont, Budapest,<sup>2</sup> ELI-ALPS Lézeres Kutatóintézet, <sup>3</sup>Szegedi Tudományegyetem Optikai és Kvantumelektronikai Tanszék, Szeged

*Krausz Ferenc* a Budapesti Műszaki Egyetemen folytatott villamosmérnöki, illetve az Eötvös Loránd Tudományegyetemen elméleti fizikai tanulmányokat. A bécsi Műszaki Egyetemen 1991-ben doktorált, 1993-ban habilitált, majd ugyanitt professzornak nevezték ki. 2003-ban a garchingi Max Planck Kvantumoptikai Intézet igazgatójává nevezték ki, 2004 óta pedig a müncheni Lajos Miksa Egyetem Kísérleti Fizika Tanszékét is vezeti. 2007 óta a Magyar Tudományos Akadémia külső tagja, 2019 óta pedig a budapesti Molekuláris Ujjlenyomat Kutatóközpont ügyvezetője.

A 2023. évi fizikai Nobel-díjat az elektronok atomokban, molekulákban és szilárd anyagokban történő mozgásának attoszekundumos spektroszkópiával történő tanulmányozásáért ítelték oda. Az idei díjazottak, Krausz Ferenc, Anne L’Huillier és Pierre Agostini kísérleteikkel olyan fényfelvillanásokat (ún. attoszekundumos fényimpulzusokat) hoztak létre, amelyek elég rövidnek bizonyultak ahhoz, hogy pillanatfelvételeket készítsenek az elektronok rendkívül gyors mozgásáról.

Ismert, hogy az atomok és molekulák világában lejátszódó folyamatok annál gyorsabbak, minél közelebb kerülünk az anyagok elemi építőköveihez, minél kisebb rendszereket vizsgálunk. A mikroelektronikai eszközök, integrált áramkörök legjobb esetben is néhány száz pikoszekundumos kapcsolási sebességgel bírnak. Egyes, fény által indukált kémiai reakciók femtoszekundumos időskálán zajlanak le. Az ehhez kapcsolódó mérés technikát az 1999-es kémiai Nobel-díjjal ismerték



1. ábra. A természet időskáláinak szemléltetése



*Dombi Péter*, az MTA doktora 2005-ben szerzett PhD-fokozatot a bécsi Műszaki Egyetemen Krausz Ferenc témavezetése mellett. Jelenleg a HUN-REN Wigner Fizikai Kutatóközpont kutatóprofesszora és a szegedi ELI-ALPS Lézeres Kutatóintézet osztályvezetője. Kutatási területei a lézerfizika, a nanooptika és az ultragyors fényanyag-kölcsönhatások.



*Varjú Katalin* PhD, az ELI-ALPS Lézeres Kutatóintézet tudományos igazgatója, a Szegedi Tudományegyetem Optikai és Kvantumelektronikai Tanszékének docense. Kutatási területe az attoszekundumos impulzusok keltése és alkalmazásai.

el (Ahmed Zewail). Az atomi elektronok – kis tömegüknek köszönhetően – még ennél is ezerszer gyorsabban mozognak, így jutunk el az attoszekundumos skálához. Például az alapállapotú hidrogénatom Bohr-modelljében az elektronhoz rendelhető pályaidő 150 attoszekundum. Az 1. ábra azt is jól illusztrálja, hogy milyen elképesztően rövid időtartamokról van szó: 2,2 attoszekundum úgy aránylik 1 másodperchez, mint 1 másodperc a világegyetem korához.

Felmerül a kérdés, hogy milyen eszközzel lehet az ilyen gyors folyamatokat vizsgálni. A lézertechnológia rohamos fejlődésének köszönhetően az 1980-as évekre festéklézerekkel akár 6 femtoszekundumos lézerimpulzusok is elérhetővé váltak, melyek aztán a femtokémiai kutatásokat is lehetővé tették. Az 1980-as években azonban még senki sem tudta, hogy femtoszekundumos lézerekkel – kihasználva a nagyon intenzív lézertereket – attoszekundumos impulzusokat is elő lehet állítani.

Ahhoz, hogy az attoszekundumos tudomány kialakulhasson, két fontos lézerfizikai fejlesztésre volt szükség, amelyet utóbb a rövid impulzusokkal keltett nemlineáris kölcsönhatás követett az „atto”-tudományhoz vezető úton. Femtoszekundumos lézerek már a hetvenes évek óta a kutatók rendelkezésére álltak, azonban a nyolcvanas években két olyan fontos fejlesztés is történt, amely lehetővé tette a jelentős impulzusrövidítést és az impulzusenergia növelését. Ezek azután a korábbiaknál nagyságrendekkel nagyobb lézerimpulzuscsúcsteljesítményhez vezettek. Az egyik ilyen fejlesztés a 2018-ban Nobel-díjjal elismert fázismodulált impulzuserősítés (*chirped pulse amplification*, CPA) elve volt. Rövid lézerimpulzusok több ezerszeres időbeli nyújtásával, majd az impulzusok lézernerősítő utáni összenyomásával napjainkban akár petawattos csúcsteljesítményű lézerimpulzusok is elérhetők. Másrészt pedig egy új lézereközeg, a titánionokkal adalékolt zafír (szokásos jelöléssel: Ti:zafír) 1988-as felfedezése hatalmas lökést adott a nagy intenzitású, többfokozatú lézernerősítők fejlesztésének. Ez a lézereközeg minden

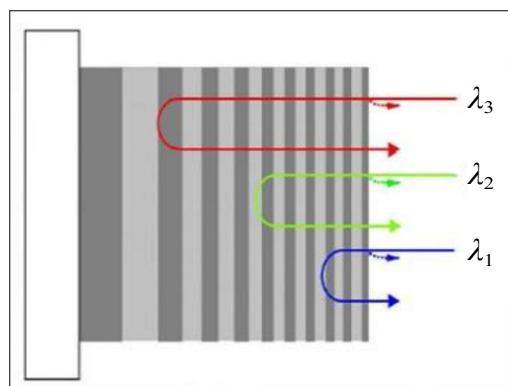
korábbiánál rövidebb, jól erősíthető femtoszekundumos impulzusok előállítását teszi lehetővé.

Krausz Ferenc már az 1990-es évek legelején, a Bécsi Műszaki Egyetemen folytatott kutatásai során felismerte a Ti:zafír technológiában rejlő hatalmas potenciált. Számos lézerfizikai fejlesztést valósított meg annak érdekében, hogy ezek a lézerek minél rövidebb impulzusokat biztosítsanak. Ebben az időszakban született meg – jelentős budapesti hozzájárulással – a korszakalkotó találmány, a 2. ábrán bemutatott fáziskorrigáló lézertükrök is (*chirped mirror*; „csörpölt tükör”), melyet Krausz Ferenc és Szipőcs Róbert jegyeznek feltalálóként. Az első ilyen tükröket 1993-ban Ferencz Kárpát állította elő a Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézetben.

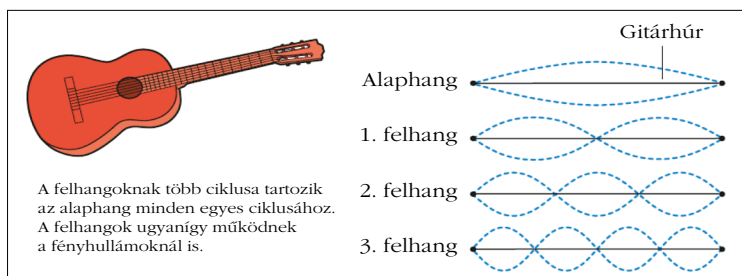
A csörpölt tükör technológiája abból a felismerésből fakad, hogy az ultrarövid lézerimpulzusok spektruma kezelhetetlenül szélessé válik. Egy 4 femtoszekundumos impulzus spektruma lefedheti akár a teljes látható tartományt, a kéktől a vörösig terjedő spektrális komponenseket egyaránt tartalmazhat. Ezeknek a terjedési sebessége pedig annyira különbözik, hogy a lézerimpulzus bármilyen közegen (akár a levegőn) történő áthaladása során időben szétszűszik. Ezt a káros hatást kompenzálja a csörpölt tükör (2. ábra), amely az átlátszó (normális diszperziójú) közegek diszperzióját kompenzálja: a lézerimpulzus vörös spektrális komponenseit késlelteti a kékekhez képest. Ez a technológia is hozzájárult ahhoz, hogy Krausz Ferenc a bécsi intézetet a lézerfizika vezető kutatóhelyévé fejlessze.

Azonban az is világossá vált, hogy a femtoszekundumos lézerimpulzusok időtartama nem csökkenthető minden határon túl. A fényhullám oszcillációs periódusánál, az ún. optikai ciklusnál lényegesen rövidebb lézerimpulzusok nem állíthatók elő – éppen a fent már említett extrém optikai sáv szélesség miatt. A Ti:zafír technológiánál mérvadó 800 nm-es központi hullámhossznál az optikai ciklus hossza 2,66 femtoszekundum, ennél rövidebb impulzusok nemigen állíthatók elő. Ahhoz, hogy femtoszekundumos impulzusok helyett attoszekundumosak álljanak rendelkezésünkre, a látható tartományban működő lézerek fényét sokkal magasabb frekvenciájú, sokkal alacsonyabb hullámhosszú sugárzássá kell konvertálni.

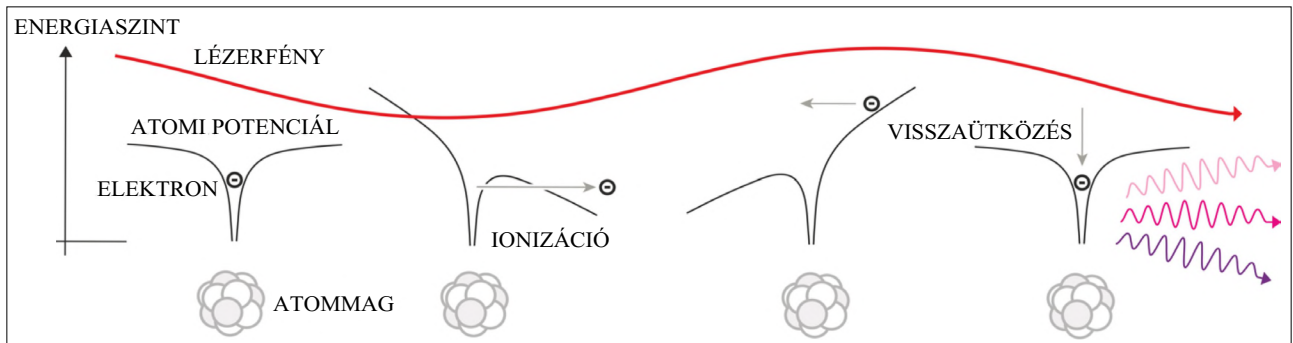
Ehhez jött kapóra Anne L’Huillier-nek és munkatársainak az az 1988-as felfedezése, amely szerint intenzív femtoszekundumos impulzusok nemesgázatomokkal



2. ábra. „Made in Hungary” – a csörpölt tükör. A széles spektrumú rövid lézerimpulzus különböző spektrális komponensei a dielektrikum-rétegstuktúra különböző mélységeiből verődnek vissza. A tükör (negatív) diszperziója a rétegvastagságok optimalizálásával így majdnem tetszőlegesen szabályozható,  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$



3. ábra. Felhangok egy gitárhúron. Az ábra az első három alacsonyrendű felhanghoz kapcsolódó állóhullámot mutatja be



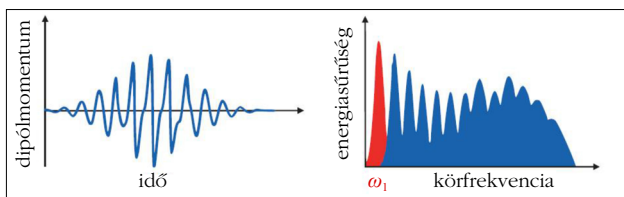
4. ábra. A magasrendű optikai felharmonikuseltés folyamata, melynek során az infravörös lézerefény XUV tartománybeli sugárzássá alakul át nemesgázatomokkal való kölcsönhatás során

kölcsönhatva nagyon magasrendű felharmonikusokat kelthetnek, akár a századik rend körüli tartományig. A folyamat teljesen analóg pl. az akusztikával. Egy gitárhúr rezgéseinél is megjelennek a felhangok, a 3. ábrán bemutatott módon.

Ugyanez történik a fényhullámokkal is, ha azok nemesgázatomokkal hatnak kölcsön. Ilyen esetben viszont nemcsak a 3. ábrán bemutatott, alacsonyrendű felharmonikusok keletkeznek, hanem akár a 100. rend környékén található, 8 nm-es hullámhossz közeli fényhullámok. Ez már az ultraibolyán is túli spektrális tartomány, a szakirodalomban ezt a lágy röntgen és ultraibolya közötti sugárzást az 1980-as évektől extrém ultraibolya (XUV) tartománynak is nevezik.

A magasrendű felharmonikusok keltését az atomok intenzív lézertérbeli ionizációja teszi lehetővé, amit a 4. ábrán mutatunk be. A fókuszált lézernyaláb által biztosított külső elektromos tér olyan mértékben torzítja az atomi potenciált, hogy a leggyengébben kötött elektron alagutazással kilép az atomból. Az oszcilláló tér miatt azonban az elektron visszatér, az ionnal rekombinálódik, és a mozgása során gyűjtött pluszenergiát magasharmonikus fotonok kisugárzásával adja le.

Az XUV-sugárzás keltése tehát végeredményben annak köszönhető, hogy az intenzív femtoszekundumos lézerimpulzus által ionizált elektron és az atomtörzs együttese a lézerefény elektromos terében oszcilláló elektromos dipólusként viselkedik. Az intenzív kényszererő miatt az oszcilláció nem tökéletesen harmonikus (5. ábra), így a keltett dipólsugárzásban megjelennek a felharmonikus komponensek, akár a gitárhúr rezgéseinél.



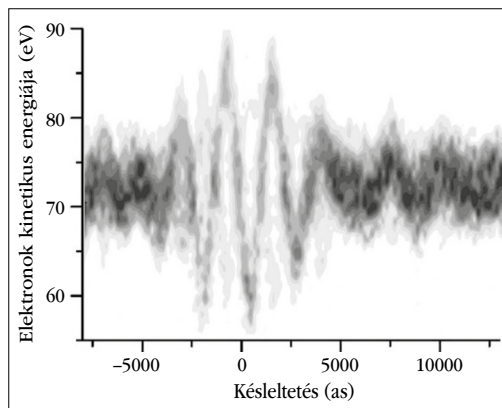
5. ábra. Az  $\omega_1$  körfrekvenciájú lézerefény magasrendű felharmonikusainak kialakulása. Bal oldalon a felharmonikus frekvenciákat is tartalmazó, nem szinuszosan változó dipólusmomentum. Jobb oldalon a 12 spektrális komponensből álló felharmonikus-spektrum jellemző részei: gyorsan csökkenő intenzitású, alacsony rendű harmonikusok, állandó erősségű plató és a spektrum végét jelző levágás

A korai felharmonikuseltési eredményeket látva, Farkas Győző és Tóth Csaba, a budapesti Szilárdtestfizikai és Optikai Kutatóintézet munkatársai 1992-es cikkükben elsőként fogalmazták meg azt az állítást, hogy a felharmonikus sugárzást időben felbontva attoszekundumos impulzusokból álló vonulatot kell észlelnünk. Az állítás bizonyításához nem voltak adottak a kísérleti feltételek, közel 10 év volt szükséges az előrejelzés bizonyításához.

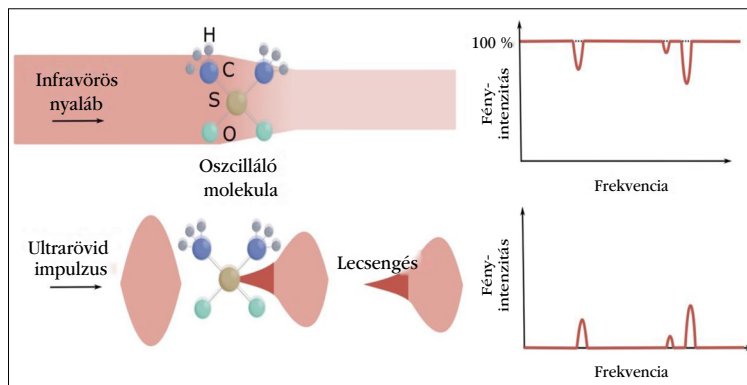
A 2001-es év hozta el azt az áttörést, amikor Krausz Ferencnek és Pierre Agostininek két különböző kísérleti módszerrel, egymástól függetlenül sikerült bizonyítani, hogy a felharmonikuseltés (a megfelelő spektrális szűrés után) attoszekundumos impulzusokat eredményez. Pierre Agostiniék egy spektrális tartományban alkalmazott interferometriai módszerrel bizonyították 250 attoszekundumos impulzusokból álló XUV impulzusvonulat létét. Krausz Ferencék pedig egy időtartománybeli módszerrel karakterizálták az izolált 650 attoszekundumos impulzusokat. Néhány évvel később Krausz Ferenc akkor már a garchingi Max Planck Kvantumoptikai Intézetben 80 attoszekundumos impulzusokat állított elő, amire még a Guinness Rekordok Könyve is felfigyelt és oklevéllel jutalmazott. Azóta pedig a világrekord Svájcba vándorolt, és 2017 óta 43 attoszekundum a valaha előállított legrövidebb fényimpulzus hossza.

Az impulzusok rövidegénél azonban sokkal fontosabb az, hogy milyen új fizikai mérés technikát tesznek lehetővé az attoszekundumos fényforrások. Attoszekundumos gyorsaságú változás például a látható fény elektromos terének a változása, hiszen például a 700 nm-es vörös fény oszcillációs periódusa 2,33 femtoszekundum, vagyis a fényhullám attoszekundumos időskálán változik. Attoszekundumos módszerekkel Krausz Ferencék 2004-ben tették először közvetlenül láthatóvá a fényhullámot. A 6. ábra egy infravörös lézerimpulzus elektromos terének attoszekundumos pontosságú oszcillációját mutatja meg. A lézerimpulzus elektromos terének pillanatnyi vektorpotenciálját közvetlenül az elektronok kinetikus energiájába tudták transzformálni nemesgázatomok ionizálásának segítségével.

Az attoszekundumos fényforrásokat elektronok ultragyors folyamatainak megméréseire is felhasználjuk



6. ábra. Ultrarövid infravörös lézerpulzus elektromos terének vektorpotenciálja attoszekundumos pontossággal megmérve



7. ábra. Hagyományos abszorpciós spektroszkópiai elemzés (felül) és Krausz Ferenc rövid impulzusokra épülő új módszere, a térfeloldott spektroszkópia vizsgálati elve (alul). Ez utóbbi az ultrarövid lézerpulussal gerjesztett molekula választ mérli bármiféle zavaró háttér nélkül

atomok és molekulák esetén. Az attoszekundumos mérés-technika az elmúlt húsz évben lehetővé tette olyan kérdések megválaszolását is, amelyekre korábban nem létezett kísérleti vizsgálati módszer. 1905-ben Albert Einstein publikálta a fényelektromos hatás első magyarázatát, de akkoriban lehetetlen volt meghatározni a hatás szempontjából releváns időskálákat. A kutatók sokáig azt feltételezték, hogy a hatás azonnali. A Krausz-csoport egy úttörő kísérletben azt találta, hogy amikor a neonatomot 100 eV-os fotonok (attoszekundumos impulzusok) ionizálják, időbeli késleltetés van a 2s és 2p szintről kilépő elektronok kibocsátása között. Attoszekundumos mérés-technikával azt is meghatározták, hogy a 2p elektron 21 attoszekundummal lassabban hagyja el a neonatomot, mint a 2s elektron. Az ilyen fotoemissziós késések az elektronfelhő kollektív dinamikájának jelei.

A 2017-ben felépült szegedi ELI-ALPS Lézeres Kutatóintézet is az attoszekundumos folyamatok vizsgálatát tűzte ki célul, erre utal az Attosecond Light Pulse Source (attoszekundumos fényimpulzusforrás) elnevezés is. A három (prágai, szegedi és bukaresti) ELI-infrastruktúra közül a szegedi épült kifejezetten azzal a céllal, hogy az attoszekundumos fizika témakörében kínáljon kísérleti lehetőségeket érdeklődő kutatóknak az egész világból, hogy az attoszekundumos mérés-technikához fejlesztett berendezésekkel elektronok ultragyors folyamatait vizsgálhassuk a legkülönbözőbb atomi és molekuláris rendszerekben, illetve újabban pedig már szilárdtestekben, nanorendszerekben és azok felületén is.

Krausz Ferenc 2019-ben Budapesten megalapította a Molekuláris Ujjlenyomat Kutatóközpontot, melynek célja az élvonalbeli femtoszekundumos lézerfejlesztés és az ultragyors mérés-technika új szintre emelése annak érdekében, hogy emberi vérminták elemzésével szív- és érrendszeri, valamint rákbetegségek korai stádiumban diagnosztizálhatók legyenek.

A vérminták elemzéséhez Krausz Ferencék egy forradalmian új módszert használnak, melyet térfel-

dott spektroszkópiának (*field-resolved spectroscopy*) nevezték el. A hagyományos spektroszkópiai módszerektől eltérően nem a spektrális tartományban mérik a folyadékminták válaszjelét, hanem ultrarövid lézerpulzusokkal gerjesztik azokat, és a gerjesztő impulzus elhaladása után a komplex molekuláris rendszer által kisugárzott infravörös fénycsilló mérlik meg az időtartományban, majd ezt a jelet elemzik mesterséges intelligencia segítségével. Az időtartományban mért jel Fourier-transzformáltja a spektroszkópiaival ekvivalens információt ad, azonban háttérmentes mérési lehetőséget biztosít (7. ábra).

Az utóbbi időben nyolc különféle ráktípust vizsgáltak már meg a molekuláris ujjlenyomat módszerével, és a módszer mind a nyolcra valamilyen szinten érzékenynek bizonyult. Ezekkel a felismerésekkel azt a kérdést igyekeznek megválaszolni, hogy a térfeloldott spektroszkópiai módszer alkalmazható-e egy széles körű egészségmegőrzési program alappilléreként, széles populációk egészségi állapotának monitorozására. Így a rendszeres vérvételből és az infravörös fényimpulzusokkal megmért molekuláris ujjlenyomatokból megállapíthatnák azt, hogy kik azok, akiknél egyes megbetegedések korai jelei tapasztalhatók. A meggyőző bizonyítékok megszerzése a következő 6–8 év feladata.

Köszönetnyilvánítás

Köszönjük Rácz Péternek és Bánhegyi Baláznak az 1. és a 7. ábra elkészítését.

Irodalom

1. Krausz Ferenc: Atomok és elektronok mozgásban. *Fizikai Szemle* 2002/1
2. Dombi Péter: Femtokémiából attofizika? *Mafigyelő, a Magyar Fizikusok Egyesületének lapja* 2005/2, 6–7.
3. Farkas Győző: Attoszekundumos időtartamú fényimpulzusok. *Fizikai Szemle* 2006/12
4. Varjú Katalin: Attoszekundumos impulzusok. *Fizikai Szemle* 2008/3
5. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2023/advanced-information/>
6. <https://www.nobelprize.org/uploads/2023/10/popular-physics-prize2023.pdf>

# A PÁRHUZAMOSOK IDŐNKÉNT DURVÁN EGYMÁSBA METSZENEK (EÖTVÖS LORÁND ÉS KÁRMÁN TÓDOR)

Patkós András – ELTE, Atomfizikai Tanszék

A magyar tudomány e két kiemelkedő alakjának együttes szerepeltetése bármely, fizikához kapcsolódó írásban értelmetlennek tűnne, de legalábbis meglepő. Tudósi pályájuk térben és időben elkerülte egymást. Eötvös a XIX. és a XX. század fordulóján a gravitáció természetének felderítésében elért eredményeivel, majd a geofizika tudományának létrehozásával írta be nevét a fizikatörténetbe. Kármán a XX. század elején a repülés áramlástan alapjainak feltárásával lett elismert tudós, miközben az éppen születő kvantumfizika körüli kutatásokba is belekóstolt. Majd a század derekán a szuperszonikus repülés technikájához, a modern rakétatechnika, végül az asztronautika tudományának megteremtéséhez is alapvetően járult hozzá.

Érdeklődési területüket tekintve eltérő, időben kitérő tudományos munkásságuk együttes tárgyalására második ránézésre sincs indok. A tanárképzésről vallott eltérő felfogásuk vezetett az 1918–19-es háborús és forradalmi idők káoszában bemutatásra méltó konfliktushoz.

## Atyáik versengő pedagógiai eszményeihez hű fiúk

Az összecsapást negyed századdal megelőzően Eötvös Loránd, atyja szellemi örökségét kiteljesítve, vezető szerepet játszott a modern magyar iskolaügy előremozdításában és a szaktanárok professzionális szervezeteinek kialakításában. A miniszteri felelősséget Eötvös József alkotásának, a népiskolai rendszernek kiteljesítésére törekedve vállalta el. Rövid minisztersége alatt megnövelte a népiskolákra és a tanítók bérezésére fordított

költségvetési tételeket. Az 1890-es évtized elején a matematika- és fizikatanárokat szakmai társulatba szervezte, és az önképzésükre fórumot teremtő folyóirat létrehozását támogatta.

Kármán Tódor édesapjának, a Tudományegyetem gyakorlógimnáziumát (a Mintagimnáziumot) 1872-ben életre hívó Kármán Mórnak célja egy önálló tanári karral rendelkező, a tanári mesterség gyakorlásához szorosan kapcsolódó önálló oktatási programot követő tanárképző intézet létrehozása volt. A Bölcsészkar és a Műegyetem fiókinstitúcióként működő Tanárképezde szervezeti és személyi megújítása révén remélte az általa Németországban megismert korszerű pedagógiai elvek felsőoktatási műhelyének létrehozását. Erőfeszítései nem jártak sikerrel. Az atyja beteljesíttelen reformjavaslatának célba juttatására kínálkozó esélyt megragadva vállalt Kármán Tódor az őszirózsás forradalom után igazgatói tisztet a vallás- és közoktatásügyi minisztériumban, majd lett a Tanácsköztársaság oktatási népbiztosságának egyetemekért felelős helyettes népbiztosa.

Eötvös Lorándnak és Kármán Mórnak a tanári személyiségre vonatkozó nézetei lényegesen különböztek. Eötvös a szaktudományi ismeretek elsőbbségét vallotta. A jól felkészített középiskolai tanár legyen alkalmas akár egyetemi oktatói és kutatói működésre. Az 1870-es évtized végétől Eötvös aktívan képviselte a bölcsészettudományi kar álláspontját, miszerint a szaktanári mesterséget elsősorban a szaktanszékeken működtetett szemináriumokon sajátítsák el a tanárnak készülő hallgatók. Szerinte a tanárvizsgálati eljárásra a jelöltek optimálisan a szakterületi professzoruk irányításával készülhetnek fel.

Kármán Mór az iskola elsődleges feladatát a diákok személyiségének fejlesztésében látta. A szaktantárgyi ismeretek fontosságát e fejlődésbeli hasznosságuk mértéke szerint értékelte. A népiskolák és gimnáziumok növekvő pedagógusigényével lépést tartó tömeges tanárkibocsátásra képes intézményrendszer létrehozását szorgalmazta. A Mintagimnáziumban végzett gyakorlótanításnak elsődleges fontosságot tulajdonított a tanári eszköztár elsajátításában. A Tanárképző Intézet önálló tanári karára és önálló, bár a bölcsészkarral egyeztetett tanítási programjára tett előterjesztéseivel ezeket az elveket kívánta a tanárképzés centrumába állítani.



Patkós András fizikus, emeritusz professzor, az MTA rendes tagja, az ELTE Fizikai és Csillagászati Intézet Atomfizikai Tanszékének vezetője. Kutatási területe: kvantumtérelméleti szimmetriásértés, véges hőmérsékletű kvantumterek, újraösszegezt perturbációs sorok, renormalizációs csoport, fázisátalakulások az univerzumban.

Evárta, hogy a szaktantárgyak előadási programját illesszék a tanárképzés igényeihez, ám ezt az egyetemi autonómia nevében a bölcsészeti kar visszautasította.

## A tudóstanár eszményének felülkerekedése

A bölcsészeti kar és az Országos Közoktatási Tanács közötti kötélhúzás (utóbbinak 1883-ig Kármán Mór volt a titkára) az 1890-es évek közepére eldőlt a bölcsészkar javára. 1896-ban Eötvös Lorándot nevezték ki a Budapesti Középiskolák Tanárképző Intézetének igazgatójává, és a tanárképzést az ő javaslatát követve szabályozták 1899-ben. A tanári felkészítésben a szaktantárgyi ismeret elsőbbségének mintaadó intézménye lett az 1895-ben megnyílt Eötvös József Collegium.

A Tanárképezde működési szabályaira először az 1870-es évek végén, majd az 1890-es évtizedben újból benyújtott előterjesztések, amelyeket Kármán Mór fogalmazott meg, anélkül tűntek el a bürokrácia útvesztőiben, hogy a szakmai közvélemény értesült volna létezésükről. Kármán Mór 1897 és 1902 között súlyos idegösszeomlásokon esett át. Ezt követően feladta tanári működését a Mintagimnáziumban. A tanárképzést és a pedagógusi hivatást taglaló munkásságának visszhangtalansága miatt érzett elégedetlenséggel hunyt el 1915-ben.

## Egymásba metsző párhuzamosok: Kármán Tódor forradalmi kísérlete atyja elveinek megvalósítására

1918 novemberében Kunfi Zsigmond miniszter Balassa József nyelvész bízta meg az új, egységes és önálló tanárképző intézet megszervezésével. A miniszter és több munkatársa az I. világháború előtt a Társadalomtudományi Társaságban tartott előadásai révén megismerték Kármán Mór tanárképzési elveit. A Budapesti Középiskolai Tanítóképző Főiskola 1919 májusában kezdte meg működését. Önálló tanári karába az 1919 áprilisában kelt rendelet nyomán Kármán Tódor kézzel ellátott okmánnyal nevezték ki egyetemi tanárnak, többek között a 36 éves Babits Mihályt, a 34 éves Benedek Marcellt, a 27 éves Hauser Arnoldot, a 26 éves Mannheim Károlyt és a 32 éves Pólya Györgyöt.

A tanárképzés területén az új intézmény abszolút dominanciára törekedett. A főiskolán az összes tanárszaknak saját tanszéket hoztak létre. A modern társadalomtudomány tanítására szociális pszichológiai és szociális biológiai tanszék alapítását is tervbe vették. A Főiskola mellett gyógypedagógiai gyakorlóiskolát kívántak működtetni. A tanárvizsgálati bizottságokat az új egyetemi tanárok behívásával újjáalakították. Egy jú-

lius 14-én kelt rendelettel az Eötvös József Collegiumot is beolvasztották a Főiskola szervezetébe. Az Eötvös Collegium *de facto* felszámolását jelentő rendelet végrehajtására a Tanácsköztársaság augusztus 1-i elbukása miatt nem került sor.

Az intézményt (mint a Tanácsköztársaság időszakában a többi felsőoktatási intézményt is) az ún. intézményi tanács vezette. A Főiskola elnöki tisztére Kövesligethy Radó csillagászt, az MTA tagját nyerték meg. A tanácsnak tagja volt még Beke Manó matematikus, a bölcsészeti kar korábbi dékánja is. A magyarországi habilitációval (egyetemi előadási joggal) nem rendelkező Kármán Tódor politikai pozíciója alapján lett tag. A tanárképzés ügye melletti személyes elkötelezettségének jeleként értékelhető, hogy nem a jóval nagyobb presztízsű Tudományegyetem vagy a József Műszaki Egyetem vezető testületeiben való részvételt ambicionálta (mellesleg az utóbbiról, ahol egy évet töltött diákként, elég rossz véleménye volt). Nemzetközi hírű tudományos teljesítménye alapján nem kérdőjelezhető meg rátermettsége a természettani (fizika) tanárvizsgáló bizottságban vizsgáztatóként történt közreműködésére.

A forradalmi kísérlet bukását követően Kármánnak az egyetemi autonómiát sértő jelenléte ezekben a szakmai testületekben mind személyére, mind a vele együttműködők fegyelmi eljárásának kimenetelére negatív következményekkel járt.

## Eötvös Loránd utódlása: a párhuzamosok másodszor is metszik egymást

Pedagógiai törekvései mellett 1919 májusában Kármán Tódor fizikusi pályája is keresztezte Eötvös Lorándnak az április 9-én bekövetkezett halálával le is zárult párhuzamos pályáivét. A Tudományegyetem bölcsészkar tanácsa május 13-i határozatában Kármán Tódort javasolta az Eötvös halálával megüresedett professzori állás betöltésére a Kísérleti Fizikai Tanszéken.

Kármán nem foglalta el az állást, ám helyettes népbiztosként közvetlen szellemi háttérrel és anyagi támogatást adott a két kísérleti fizikai intézetet az ő felhatalmazása alapján vezető 34 éves Hevesy Györgynek az intézet laboratóriumainak modernizálásához. Az egyetem már 1918 novemberében előterjesztette javaslatát Hevesy nyilvános tanári kinevezésére egy újonnan létrehozandó fizikai-kémiai tanszék élére, ám a kinevezési okiratot csak május 3-án írta alá éppen Kármán. Személyes kapcsolatukat is kihasználva Hevesy az éppen születő modern fizika fejleményeit az oktatási programba integráló fejlesztésekben megkerülte és mellőzte az Eötvös utódlására természetes ambícióval pályázó tanítványokat, Pekár Dezsőt és Rybár Istvánt.

A Tanácsköztársaság bukása után Hevesyt eltávolították az egyetemről. Az ehhez vezető kari, majd egyetemi határozatot Pekárnak és Rybárnak az igazo-

ló (fegyelmi) bizottság előtt tett tanúvallomásaira alapozták. Egyetemi magántanári címét és előadási jogát azzal az indoklással vonták meg, hogy az egyetemi autonómiát sértő módon „a bolsevista Kármán Tódorról közvetlenül együttműködve, a törvényesen kinevezett vezető kíméletlen félretolásával” irányította a Fizikai Intézetet. Hevesy végül 1920-ban csatlakozott Niels Bohr új atomfizikai intézetéhez Koppenhágában. Folytatta az izotópos nyomjelzés módszerének fejlesztését, amiért elnyerte az 1943-as kémiai Nobel-díjat.

Kármán Tódor néhány heti bujkálás után visszatért az aacheni Rhein-Westphalische Technische Hochschule repüléstudományi tanszékének élére. Pekár Dezső lett a Tudományegyetemről 1920-ban leválasztott Eötvös Loránd Geofizikai Intézet alapító igazgatója. Rybár Istvánt 1922-ben kinevezték a Gyakorlati Fizikai Tanszék vezetőjének. Az összekuszálódott életutak párhuzamosan folytatódtak.

A Budapesti Középiskolai Tanítóképző Főiskola megszűnt. Kövesligethy Radó ellen még évekig tanítási szilencium volt érvényben. Beke Manót eltávolították az egyetemről csakúgy, mint Hevesy tanársegédeit, Polányi Mihályt és Selényi Pált.

Helyreállították az Eötvös Loránd elképzeléseit követő tanárképzési és tanárvizsgálati rendet, amelyet 1924-ben törvényi erővel kiterjesztették az ország összes tanárképző intézményére. Az Eötvös Collegium tagjai közül számos, a XX. század magyar közoktatását meghatározó befolyásoló tanárszemélyiség került ki. A tudós fizikatanárrá lett kollégiumi tagok közül kiemelkedik Vermes Miklós, Párkányi László és Sas Elemér személye. Hasonlóan meghatározó volt Bakos Tibor, Varga Tamás és Hódi Endre munkássága a matematika közoktatásában.

A tudóstanár eszme legtisztább megtestesítője Novobátzky Károly volt. Ő negyedszázadon át, 1921 és 1945 között a Kölcsey Gimnáziumban tanított matematikát és fizikát. Szakfelügyelőként is működött. Rendszeresen látogatta az Ortway-kollokvium előadásait, és nemzetközi figyelmet kiváltó szakcikkekkel közzölt a kor vezető szakfolyóiratában, a *Zeitschrift für Physik*ben. 1945-ben egy ugrással váltott a Tudományegyetem Elméleti Fizikai Intézetének vezetői posztjára. Tanítványi körének, Károlyházi Frigyesnek, Marx Györgynek és Nagy Károlynak erős szellemi befolyása a XX. század legvégéig sikeresen fenntartotta a szaktudományi ismeretek primátusát a szaktanárok képzésének tartalmi és szervezeti kérdéseiben.

Az elmúlt évtizedekben lényegesen megváltozott a szaktanári kiválóságról alkotott társadalmi kép. Önmagában mind Eötvös Loránd, mind Kármán Mór tanárideálja korszerűsítésre szorul. Megítélésem szerint a magyar pedagógusképzésből mindmáig hiányzik az Eötvös és Kármán elképzeléseit modern elvárások szerint egységbe foglaló vízió és arra épülő gyakorlat. Ezért ennek az írásnak a végére nem összefoglalás, még kevésbé konklúzió, hanem inkább egy kérdőmondat kívánczik. Megteremthető-e Eötvös Loránd és Kármán Mór szaktanárfelfogásának korszerűsített szintézise?

\* \* \*

*Forrás:* Ez az előadás az ELTE Eötvös József Collegiumnak Eötvös Loránd 175. születésnapja alkalmából tartott ünnepi megemlékezésén hangzott el 2023. szeptember 4-én. Rövidített változata a „Fizikusok bolyongása a történelemben” című írásomnak, amely a „Céltudatos bolyongásaim” című kötetemben jelent meg (203–240. o., Typotex, 2023).

## XXVI. ORSZÁGOS SZILÁRD LEÓ FIZIKAVERSENY – 3. rész

Sükösd Csaba

BME, Nukleáris Technikai Intézet

Az előző két részben bemutattuk a XXVI. Országos Szilárd Leó Fizikaverseny elődöntőjében, illetve a döntőben feladott elméleti és számítós feladatokat, valamint megoldásaikat. A mostani, befejező részben a döntő kísérleti és számítógépes szimulációs feladatát, valamint a verseny eredményét ismertetjük. A kísérleti feladatra és a számítógépes feladatra is másfél-másfél óra állt rendelkezésre. A kísérleti feladat ötlete és a végrehajtásához szükséges eszközök kifejlesztése Gulyás Attilát (HUN-REN Energiatudományi Kutatóközpont), a mintatartók elkészítése pedig dr. Borbély Venczel tanár

urat dicséri. A szimulációs feladat ötlete dr. Tarján Péter tanár úrtól származik, a kódolást pedig – mint egy kivétellel minden esetben a korábbi szimulációs feladatok esetében is – dr. Sükösd Csaba, a versenybizottság vezetője végezte. A feladat tesztelésében és a végső változat kidolgozásában nagy szerepet vállalt dr. Tarján Péter, dr. Papp Gergely és dr. Halász Máté versenybizottsági tag is. Köszönjük dr. Perkó Zoltán segítségét is. Mind a kísérleti, mind a számítógépes feladatot a paksi Energetikai Technikum és Kollégium (ESZI) termeiben hajtották végre a diákok.

## Kísérleti feladat – műtrágyaminta $K_2O$ -koncentrációjának meghatározása a $^{40}K$ aktivitáskoncentrációjának mérésével

Közismert, hogy iskolákban nehéz nukleáris jellegű méréseket végrehajtani. Ennek két fő oka van. Egyrészt hiányoznak a működőképes mérőeszközök (sajnos csak kevés iskolában van működőképes sugárzásmérő detektor), másrészt az osztálytermekbe csak nagyon kis aktivitáskoncentrációjú anyagokat – főleg természetes eredetű sugárforrásokat – szabad bevinni, azokkal pedig általában csak hosszú mérési idő után lehet valamilyen – a természetes háttérsugárzási szinttől megkülönböztethető és kiértékelhető – mérési eredményt kapni. Erre pedig egy tanórán általában nincs elég idő. Az Országos Szilárd Leó Fizikaverseny is küzdött ezekkel a problémákkal, emiatt „igazi” radioaktív mérés csak elég régen (legutóbb 2015-ben) tudtunk beiktatni a verseny döntőjének a programjába. Szerencsére az EMMI által a BME NTI közvetítésével a 2021 és 2022-es években adott anyagi támogatásnak köszönhetően az Országos Szilárd Leó Verseny kísérleti eszközei 20 db jó minőségű Geiger–Müller-számlálóval bővültek. Így 2023-ban a versenybizottságnak ismét lehetősége volt nukleáris mérésen alapuló kísérleti feladat kitűzésére. A fent említett második kihívással is meg kellett birkózni: olyan mérést kellett kifejleszteni, amely az alacsony aktivitáskoncentráció ellenére viszonylag rövid idő alatt végrehajtható. Ebben segített Gulyás Attila ötlete, amely szerint a mérendő mintának körül kell vennie a detektort, mert ez jelentősen megnöveli a detektálási hatásfokot. A kialakított mintatartó a környezeti minták gamma-spektruskópiájában használt, úgynevezett Marinelli-geometria egy adaptációja, amelynek optimális geometriai méreteit több, előzetesen végrehajtott kísérlettel határoztuk meg. Ezek során arra is tekintettel voltunk, hogy ezeket a mintatartókat lehetőleg olcsón, mindennapi anyagokból – az iskolákban is – el lehet készíteni (1. ábra).

A káliumot tartalmazó anyagok a radioaktív  $^{40}K$ -tartalom miatt sugároznak. Bár a  $^{40}K$  csekély előfordulása miatt relatíve alacsony aktivitáskoncentráció van jelen, a mennyisége mégis mérhető, gamma-sugárzást



*Sükösd Csaba* (1947) a BME címzetes egyetemi tanára, az ELFT elnökségi tagja. Kísérleti magfizikus, aki kísérleti munkáját nagyrészt külföldi kutatóintézetekben végezte. Kutatási területe a magreakciók, óriásrezonanciák és némely asztrofizikailag releváns magreakció vizsgálata radioaktív ionnyalábokkal. Marx György tanítványaként részt vett a 70-es évek MTA oktatási kísérletében. Azóta is szoros kapcsolata van a fizikatanárok közösségével, több tanári és oktatással kapcsolatos program vezetője.



1. ábra. A XXVI. Országos Szilárd Leó Verseny kísérleti fordulóján használt mintatartó. A joghurtos edénybe töltött káliumtartalmú műtrágya körbeveszi a szürke csöbe helyezhető Geiger–Müller-számlálócsövet

mérő érzékeny eszközökkel. Ezért a mérés során káliumtartalmú műtrágyák sugárzását mértük. Ennél a geometriánál a detektálási hatásfok nem számítható ki egyszerűen (mint pl. a detektortól távol lévő pontforrás esetén), ezért csak valamilyen relatív mérésben lehetett gondolkodni.

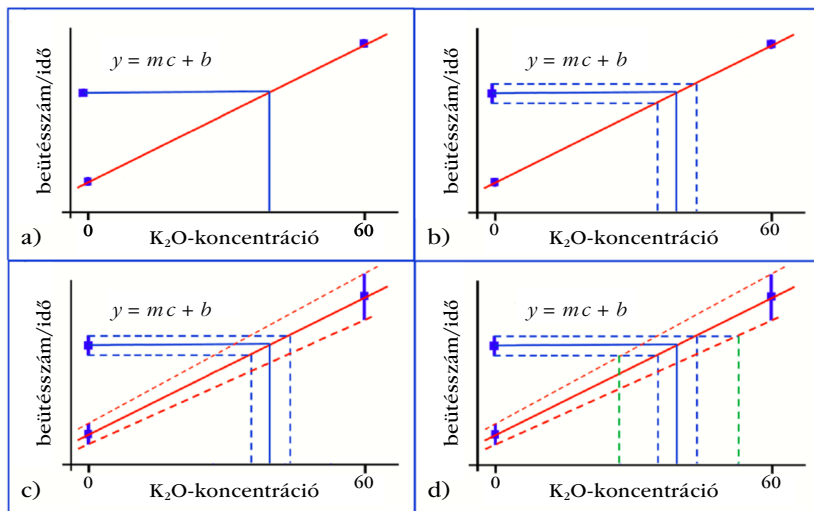
A mérési feladat során a mérőedénnyel három műtrágyamintát kellett mérni: két ismert (0% és 60%)  $K_2O$ -tartalmú etalonmintát, amellyel a mérőeszköz be-szabályozását/beállítását lehetett elvégezni, illetve egy ismeretlen  $K_2O$ -tartalmú mintát. A feladat az ismeretlen minta  $K_2O$ -tartalmának a meghatározása volt.<sup>1</sup> Természetesen a meghatározott érték bizonytalanságát is meg kellett adni. Odafigyeltünk a munkavédelemre is: a műtrágyák töltögetése során – az esetleg keletkező por belélegzésének elkerülése érdekében – a versenyzőknek szájmazskot és védőszemüveget kellett viselniük.

A detektor (végablakos GM-szonda) ebben a mérési összeállításban csak gamma-sugárzást mér, a gamma-fotonok beütéseit számolja, összegezi. A beütések összegzésével szimultán mérjük az időt. Ha  $t$  idő alatt  $N$  beütést mérünk, akkor a beütési sebesség  $N/t$ . A beütési sebesség arányos a  $^{40}K$ -aktivitás koncentrációjával, ezáltal az anyag  $K_2O$ -koncentrációjával. Az arányosság jó közelítéssel lineárisnak vehető.

Az összefüggés egyenlete:

$$N/t = mc + b, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Bár a műtrágyák általában több különböző vegyület (klorid, nitrát, karbonát stb.) formájában tartalmazhatnak káliumot, az egységesítés végett a koncentrációt gyárilag úgy adják meg, mintha  $K_2O$  formájában lenne jelen minden kálium.



2. ábra. Az ismeretlen koncentráció meghatározása (a) és bizonytalanságának becslése (b, c, d)

becsléséhez egy nem annyira egzakt, de jóval egyszerűbben érthető, „grafikai” megoldást javasoltunk, és a 2. ábrát mutattuk a versenyzőknek.

Az ábra a)–d) részei a kiértékelés lépéseit mutatják. Az a) részről, az ismeretlen koncentráció értékének meghatározásáról már szoltunk. A b) résznél csak az ismeretlen minta mért értékének bizonytalanságát vesszük figyelembe, mintha a konverziós egyenes paramétereinek nem lenne bizonytalansága. Az ábra c) és d) része világossá teszi, hogy a végső koncentráció értékének bizonytalanságát az etalonminták mért beütésszám-sebességi értékeinek a bizonytalansága is befolyásolja.

amely megteremti kapcsolatot a GM-szonda beütési sebessége ( $N/t$ ) és a műtrágyaminták  $K_2O$ -koncentrációja (c) között. Itt  $m$  a lineáris arányosság egyenesének meredeksége,  $b$  a tengelymetszete. Ez utóbbi a természetes háttérsugárzással van kapcsolatban.<sup>2</sup>

Az ismeretlen minta  $K_2O$ -tartalmának meghatározását a 2a. ábra mutatja. A két etalonminta alapján az egyenes paramétereit könnyen meghatározhatók, és ebből az ismeretlen minta beütésszám-sebességének ismeretében a koncentrációja könnyen kiszámítható.

Nehezebb feladat volt a meghatározott koncentráció bizonytalanságának a megadása. Itt figyelemmel kellett lenni arra, hogy a mért beütési sebességeknek van statisztikus bizonytalansága, hiszen a GM-szonda beütésszámai Poisson-eloszlás szerint szórnak a várható érték körül.  $\sigma_N = \sqrt{N}$ , vagy a relatív bizonytalanság:  $\sigma_N/N = 1/\sqrt{N}$ . A mért időtartamok relatív bizonytalansága ennél nagyságrendekkel kisebb, ezért a beütési sebesség relatív bizonytalanságát elsősorban a mért beütésszámok relatív bizonytalansága szabja meg. A mérési útmutatóban azt kértük, hogy a versenyzők annyi ideig mérjenek egy ponton, ameddig a mért pontok relatív bizonytalansága kb. 5% alá nem kerül (ehhez kb. 400 beütést el kellett érni).

Ezeket figyelembe véve a 2. ábrán látható pontok egy másik mérés során fölfelé és lefelé is eltérhetnek valamennyire. Ezeket jelzik a 2b–d. ábrán lévő intervallumok, bizonytalansági sávok. Az, hogy a szórások végső eredményre gyakorolt hatását korrekt matematikai statisztikai módszerekkel kiszámítsuk, meghaladta volna a középiskolában elvárható szintet. (A metrológiailag pontos kiértékelésről Gulyás Attila készül írni egy cikket a Fizika Tanítása rovatba.) Így a végső koncentrációérték bizonytalanságának a

## Értékelés (dr. Borbély Venczel „Hogyan kellett?” előadása alapján [1])

A „Hogyan kellett?” előadáshoz Gulyás Attila – aki nem tudott részt venni az ismertetésen – a következő üzenetek átadását bízta dr. Borbély Venczelre:

- A bizonytalanság nem hiba és a hiba nem bizonytalanság!
- A bizonytalanságnak a hibahatárhoz van köze.
- A hosszabb méréssel közvetlenül a mérés precizitása nő, nem a pontossága (a kettő nem ugyanaz!).
- A kitűzött feladatban csak és kizárólag a bizonytalanság és annak terjedése szerepelt.
- A bizonytalanságok becslésére három matematikai módszert is használtak a versenyzők:
  - az ajánlott ábra alapján elvégzett kiértékelés (2. ábra),
  - intervallumos formula, differencia-differenciál,
  - voltak, akik deriváltak is.

Dr. Borbély Venczel bemutatott egy tipikus mérési eredményt is (1. táblázat), és elmondta, a legtöbb versenyző az 1 perces „próbamérés” alapján jól számolta ki, hogy mennyi ideig kell mérni az egyes pontokat a kb. 5%-os statisztikai bizonytalanság eléréséhez. Voltak azonban versenyzők, akik a 0%-os etalonnál kapott kb. 20–25 percet túl soknak tartották, és ezért inkább csak „felszorozták” a rövidebb idő alatt mért értéket. Ez természetesen hibás, hiszen ezzel a relatív bizonytalanság nem „javult meg”.

Általánosságban elmondható, hogy az idén sokkal jobb jegyzőkönyvek születtek, mint tavaly. Az ismeretlen minta – gyártó által megadott – 24%-os koncentrációjára általában 17% és 37% közötti értékeket kaptak, ami – figyelembe véve a lehetséges mérési bizonytalanságokat – elfogadható eredmény. Arra a kérdésre, hogy a statisztikai bizonytalanságokon túl mi-

<sup>2</sup> A kívülről jövő természetes háttérsugárzást a minta befolyásolhatja (csökkentheti), hiszen a detektort körülveve leáramlykolhatja azt. Ezért mértünk 0%-os koncentrációjú mintával és nem „üresen” (minta nélkül).

$c$ K <sub>2</sub> O-koncentráció [%]	$N_0$ beütések 1 perc után	$t$ mérési idő [perc]	$N$ beütések száma	$\sigma/N$ relatív bizonytalanság [%]	$N/t$ beütési ráta [1/perc]
0	15	25	380	5,1	15,2
60	100	4	409	4,9	102,2
ismeretlen	47	8	399	5,0	49,9

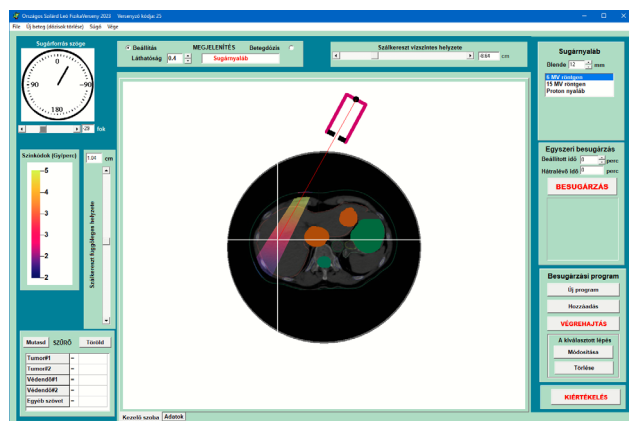
lyen egyéb hatások befolyásolhatják a meghatározott érték pontosságát, a következő válaszok születtek:

- Az etalonminták megadott koncentrációjának is van bizonytalansága (hibahatára).
- A különböző koncentrációjú minták eltérő granulátumos szerkezete eltérő önabszorpciót jelenthet.
- Nem mindig tudjuk egészen pontosan ugyanaddig tölteni az edényt.
- Az ismeretlen minta egy műtrágyakeverék. Nem biztos, hogy tökéletes az elkeveredés, lehetnek benne inhomogenitások.

Meg lehetett volna még említeni azt, hogy a beütésszám-sebességet koncentrációvá konvertáló függvény nem biztosan tökéletesen egyenes, valamint azt, hogy a GM-cső kicsit „lötyögött” a csőben (kb. 1 mm különbség az átmérőkben), és emiatt kicsit változhatott a detektálási hatások a különböző mérések között.

Örülünk annak, hogy a versenyzők legtöbbször jól értelmezte a feladatot, és hogy a bizonytalanságok megbecslése, kiszámítása, valamint az eredmények értékelése sokak számára is fontos része volt a mérő-kutató munkának.

Az útmutató szerint összesen 25 pontot lehetett elérni. A legmagasabb elért pontszám a szenior kategóriában 24 pont, a junior kategóriában 23 pont volt. Azaz mindkét kategóriában voltak nagyon jó dolgozatok. Az átlag a szenioroknál  $18,65 \pm 4,25$  pont, a junioroknál  $16,10 \pm 4,25$  pont volt.



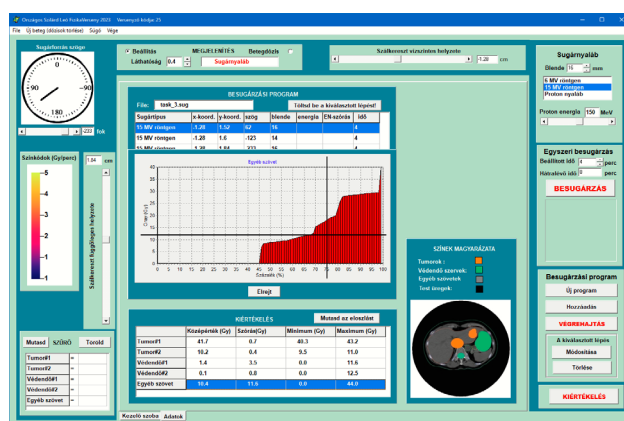
3. ábra. A sugárterápia szimulációjának egyik képernyője. A képernyő közepén lévő terület a „kezelőszoba”, közepén a beteg röntgenképével, a bejelölt tumorokkal és védendő szervekkel

## Számítógépes, szimulációs feladat – sugárterápia szimulációja

A számítógépes feladatot is az ESZI termeiben másfél óra alatt hajtották végre a diákok. A versenybizottság Szilárd Leóra emlékezve választotta ezt a szimulációt, aki 125 éve született, és aki élete második részében sugárbiológiai kutatásokat is végzett. Többek között saját hólyagrákjának a sugárkezelését is megtervezte. Életének évekkel később szívroham vetett véget. A boncoláskor kiderült, hogy a rák teljesen eltűnt a sugárkezelés következtében.

A szimulációs feladatban két májdaganat (tumor) külső sugárkezelését (teleterápiáját) kellett elvégezni két dimenzióban (2D). Ehhez kétféle energiájú röntgensugárzást és protonterápiát használhattak a versenyzők. A feladatot nehezítette, hogy a tumorok közelében védendő szervek (gyomor és gerincvelő) is voltak, amelyek csak szigorúan korlátozott sugárdózist kaphattak. A szimuláció során az emberi test 2D keresztmetszeti röntgenképével kellett dolgozni; a sugárforrás a testhez képest mozgatható volt, ami különböző irányokból különböző méretű sugárnyalábokkal való besugárzásokat tett lehetővé.

A 3. ábra mutatja a programban lévő „kezelőszoba” elrendezését és a legtöbb kezelőszervet. A röntgenképben lévő narancsszínű területek a sugárkezeléssel elpusztítandó májdaganatok, a zöld színűek pedig a



4. ábra. A kiértékelési képernyő mutatja az egyes szövetfajtákat ért dózisoszt. Ennek segítségével lehetett ellenőrizni, hogy mennyire teljesülnek az egyes szövetfajtákra előírt dóziserőtekek a besugárzás program végrehajtása után

védendő szervek. A fentről ferdén jövő sugárnyaláb által a testben leadott dózisintenzitást a nyaláb menti színek jelzik (a színek kódok értelmezése a képernyő bal oldalán látszik).

A versenyzők részletes használati utasítást kaptak a program kezeléséről, ezt itt most mellőzzük. (A részletes utasítások a program súgójából is elérhetők.)

Az előírt dózisokat a versenyzőknek egy „besugárzási program” megtervezésével kellett előállítaniuk. A besugárzási program akárhány lépésből állhatott, és használhatták mind a 6 MV, mind a 15 MV röntgenforrást, valamint a széles energiatarományban (50–240 MeV) változtatható energiájú protonnyalábot is. Változtathatták a blende méretét, a besugárzás idejét, irányát, középpontját.

A besugárzási program végrehajtása (és a „Kiértékelés” gomb megnyomása) után az „Adatok” panelre váltott a képernyő, és a kezelőszoba helyett az egyes szöveteket ért sugárdózisok kiértékelését (átlagát, szórását, maximum- és minimumértékeit, valamint eloszlását) lehetett megfigyelni (4. ábra). Ezen a panelen lehetett kezelni a besugárzási program egyes lépéseit is.

## Értékelés (dr. Tarján Péter előadása alapján [1])

A szimulációs feladat megizzasztotta a versenyzőket. A feladatot tökéletesen (25 pontra) megoldani senkinek sem sikerült, de születtek nagyon szép jegyzőkönyvek. A szenioroknál az átlagos pontszám és szórás  $11,00 \pm 4,79$  volt, a junioroknál ugyanez  $9,60 \pm 4,67$ . Mindkét csoportban ez kisebb volt, mint a tavaly elért eredmények, ezért úgy ítéljük meg, hogy ez a szimulációs feladat nehezebbnek bizonyult a tavalyinál. A szenioroknál 1-1 versenyző ért el 22, 19 és 18 pontot, a junioroknál a legmagasabb pontszám 15 volt, ezt három versenyző érte el. A feladat eléggé összetettnek tűnt a versenyzők számára ahhoz, hogy ne kezdjék el nyomogatni a programot az útmutató elolvasása nélkül. Az olvasással párhuzamosan azonban sokan próbálgatták is a programot – helyesen – így a szokásosnál keve-



5. ábra. A Verseny ünnepélyes eredményhirdetése

sebb idő ment el a feladattal és a programmal való ismerkedéssel.

Bár a feladatleírásban részletesen meg volt határozva, hogy az egyes szervek és szövetek hány százaléknak mekkora dózist kell kapniuk (daganatok), illetve kaphatnak (védendő szervek), ezeket a versenyzők nem vették nagyon komolyan; megelégedtek azzal, hogy csak megközelítették az előírt értékeket. Ez volt a legfőbb oka annak, hogy csak viszonylag alacsony pontszámok születtek. Voltak meglehetősen sajátos megoldások is. Néhány versenyző nem használta ki a protonnyaláb Bragg-csúcsában rejlő lehetőségeket, és nem bajlódott azzal, hogy a Bragg-csúccsal végigpásztázza a tumorokat, hanem a Bragg-csúcsot a tumorok közé az „Egyéb szövet”-re pozícionálta. Így a tumorok kisebb dózist kaptak, de azt egyenletesebben. Hosszú besugárzási idővel ez is működő taktikának bizonyult, bár az „Egyéb szövet”-ek így a korlátnál magasabb dózist kaptak.

A szimulációs program a verseny után felkerült a webre az Országos Szilárd Leó Fizikaversenyen használt korábbi szimulációs programok mellé [2].

## Koszorúzás

A verseny kísérleti és szimulációs fordulói után a résztvevők megkoszorúzták Marx György professzornak, az Országos Szilárd Leó Fizikaverseny alapítójának és első vezetőjének emléktábláját a paksi Energetikai Technikum és Kollégium földszinti aulájában. Ez a Pakson tartott Országos Szilárd Leó Fizikaversenyek állandó programpontja az emléktábla 2017-es felavatása óta. Ebben az évben egy poszterrel megemlékeztünk még a verseny névadójáról, Szilárd Leóról is, aki 125 évvel ezelőtt született. A posztert *Mester András* tanár úr, a versenybizottság tagja készítette [3].

## A verseny eredményei

A verseny ünnepélyes eredményhirdetését Pakson, az ESZI nagy előadótermében tartottuk, a feladatmegoldások ismertetése után.

2023-ben a következő diákok érték el a legjobb helyezéseket (100 pont a maximum):



6. ábra. A budapesti ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium versenyzői a Marx György Vándordíjjal, valamint *Horváth Norbert* tanár úr a Delfin-díj plakettjével

## Szenior kategória (11–12. osztályosok):

- I. **helyezett:** *Budai Csanád Gyula* (77 pont), Deák Téri Evangélikus Gimnázium (Budapest, tanára *Horváth Gabriella*)
- II. **helyezett:** *Nemeskéri Dániel* (75 pont), ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium (Budapest, tanárai *Zsigri Ferenc* és *Deák Márta*)
- III. **helyezett:** *Hajós Balázs* (73 pont), ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium (Budapest, tanárai *Zsigri Ferenc* és *Gyertyán Attila*)

## Junior kategória:

- I. **helyezett:** *Szilágyi Barnabás* (68 pont), Pannonhalmi Bencés Gimnázium (Pannonhalma, tanára *Ernyey Dániel*)
- II. **helyezett:** *Muraközi Péter* (65 pont), Czuczor Gergely Bencés Gimnázium és Kollégium (Győr, tanárai *Csonka László* és *Tóth Kristóf*)
- III. **helyezett:** *Jávor Bence* (64 pont), Városmajori Gimnázium (Budapest, tanára *Horicsányi Attila*)

A záróülést és a díjátadást megtisztelte jelenlétével *Süli János* országgyűlési képviselő, korábbi miniszter, *Szarvas Krisztián* a Paks II. Atomerőmű Zrt. műszaki igazgatója, *Leber Ferenc*, Paks város alpolgármestere, *dr. Ormos Pál* akadémikus, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat elnöke és *dr. Fábián Margit*, a Magyar Nukleáris Társaság titkára. Jelen volt, díjakat adott át és hozzászólt még *Fajszi Bulcsú*, a versenyt támogató Hiflylabs Zrt. egyik tulajdonosa és alapítója, *Csajági Sándor*, a Szilárd Leó Tehetséggyűjtő Alapítvány elnöke, valamint *Csanádi Zoltán*, az Energetikai Technikum és Kollégium igazgatója.

A junior kategória díjait Süli János és Leber Ferenc, a szenior kategória díjait pedig Szarvas Krisztián műszaki igazgató adta át. Mindkét kategória első három helyezettje a Szilárd Leó Tehetséggyűjtő Alapítvány pénzjutalmát és érmeit is kapta, melyeket Csajági Sándor kuratóriumi elnök, valamint Fajszi Bulcsú nyújtott át a díjazottaknak.

Ebben az évben több különdíj átadására is sor került. Az Eötvös Loránd Fizikai Társulat (ELFT) idén is egy-egy éves előfizetést ajánlott fel a *Fizikai Szemle* folyóiratra a két kategória első öt helyezettjének, valamint az első három helyezettnek a „Hazalátogatott Wigner Jenő” c. könyvet, melyeket dr. Ormos Pál akadémikus, az ELFT elnöke adott át. A Magyar Nukleáris Társaság (MNT) könyvjutalmakat ajándékozott a versenyzőknek, valamint kedvezményes részvételi jegyeket az MNT által szervezett Nukleáris Szaktáborra a két kategória első három helyezettjének, amelyet dr. Fábián Margit, az MNT titkára adott át.

Dr. Papp Gergely kutatófizikus, a 2004. évi Országos Szilárd Leó Verseny ezüstérmese, jelenlegi versenybizottsági tag saját alapítású különdíjakat (juttatmányokat) ajánlott fel néhány versenyzőnek egyes feladatokban elért kiemelkedő teljesítményük elismeréseképpen. Dr. Papp Gergely távollétében az általa felajánlott díjakat dr. Tarján Péter, a versenybizottság tagja hirdette ki.

A záróülésem a tanulói díjak, különdíjak és oklevelek átadása után került sor az idei *Szilárd Leó Tanári Delfin-díj* átadására, amelyet minden évben a tanárok pontversenyében legjobb eredményt elért felkészítő tanárnak ítél oda a versenybizottság. Ebben az évben a Delfin-díjat *Horváth Norbert*, a budapesti Baár-Madas Református Gimnázium tanára vehette át. Mivel a tanár úr már 2016-ben is kapott Delfin-díjat, ezért ebben az évben csak egy plakettet kapott, és természetesen a díjjal járó pénzjutalmat. Gratulálunk!

A *Marx György Vándordíjat* – amelyet minden évben a pontversenyben legkiválóbb eredményt elért iskolának ítél oda a versenybizottság – a tavalyi évhez hasonlóan – az idén is az *ELTE Apáczai Csere János Gyakorló Gimnázium és Kollégium* (Budapest) nyerte el. Gratulálunk!

## Köszönetnyilvánítás

Az ünnepélyes eredményhirdetésen dr. Sükösd Csaba köszönetet mondott a paksi ESZI valamennyi munkatársának, akik minden évben fáradhatatlanul és nagy lelkesedéssel dolgoznak azért, hogy a verseny döntője zavartalan legyen. Továbbá köszönetét fejezte ki a Versenyt támogató Kulturális és Innovációs Minisztériumnak, az Emberi Erőforrás Támogatáskezelőnek, a Nemzeti Tehetségprogramnak, a Szilárd Leó Tehetséggyűjtő Alapítványnak, a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Nukleáris Technikai Intézetének, a Magyar Nukleáris Társaságnak, az Eötvös Loránd Fizikai Társulatnak, a Paksi Atomerőműnek, a Hiflylabs Zrt.-nek, valamint minden támogatónak és különdíjat felajánló szervezetnek és személynek a Verseny megrendezésében nyújtott segítségükért. Külön köszönet illeti a Versenybizottságot és mindazokat a helyi szervezőket és tanárkollégákat, akik lelkesen és fáradságot nem ismerve dolgoztak a verseny sikeréért.

## Hivatkozások

- <https://youtu.be/x3e5bUfGxmi> (A „Hogyan kellett megoldani?” videofelvétele)
- <https://sukjaro.hu/scs/letoltesek/oszlv-szimulaciok/>
- [https://sukjaro.hu/SzilardVerseny/pages/letoltheto/Szilard\\_poszter.pdf](https://sukjaro.hu/SzilardVerseny/pages/letoltheto/Szilard_poszter.pdf)

# fizikaiszemle.hu

A honlapon megtalálhatja régebbi és új lapszámainkat, valamint számos mellékletet!

## A BUDAPESTI EÖTVÖS 175 EMLÉKHELYTÚRA

Szarka László Csaba

Abból következően, hogy Eötvös Loránd (Buda, 1848. július 27. – Budapest, 1919. április 8.) 71 évet élt, születésének és halálának 25 évenkénti évfordulóit négy évvel követik egymást. Ilyen volt 1944 és 1948, 1969 és 1973, 1994 és 1998, ilyen 2019 és 2023, valamint ilyen lesz majd 2044 és 2048 is. Minden generációnak jut tehát egy kettős feladat: az első áprilisi, a második júliusi súlyponttal.

A 2019-es Eötvös 100 emlékévé 2019 januárjától lényegében egészen 2021 októberéig (a Gesztenyés kerti Eötvös-szobor felavatásáig) tartott. Az Eötvös-örökséget fontosnak tekintő személyek és szervezetek alig egy évvel később újra megmozdultak, és bátorítottak az Eötvös 100 koordinációs testület Eötvös 175-ként való újjáélesztésére. Nyilvánvaló volt, hogy a 2023-as pénzügyi helyzetben, ráadásul 1848 többi nagyszerű évfordulójának árnyékában semmi remény nincs központi támogatásra. Miután a 2019-es a háttérrel biztosító MTA Könyvtár és Információs Központ (a 2019-es Eötvös 100 projekt gazdája), grafikus tervezőnk (*Jubász Márton*, Sopron) és informatikusaink (*Márkus Zsolt* és *Weisz Zsolt*, SZTAKI) egyformán kifejezték együttműködési készségüket, biztos tapasztalatok alapján indulhatott el a munka. Felfrissítettük az [eotvos100.hu](http://eotvos100.hu) honlapot („eotvos175”-tel kiegészítve azt), az arculatot (logó és plakát formájában), kiküldtük az első körlevelet a teljes „Eötvös 100” levelezőlistára, és elkezdtük gyűjtögetni a beérkező elképzeléseket. Csak azoknak a programoknak az összehangolására vállalkozhattunk, amelyeket az önként közreműködő szervezetek saját erejükből képesek voltak valósítani. Két koordinációs megbeszélés (március 7. és április 12.) alapján kirajzolódott az Eötvös 175 program íve: a tudományos emlékülést és az életutat összegző konferenciát annak az 1906-os budapesti nemzetközi konferenciának (Internationale Erdmessung) szeptemberi időpontjához időzítettük, amely

meggyőzte a tudományos világot arról, hogy Eötvös csavarási mérlege nemcsak laboratóriumban, hanem terepen is alkalmazható.

A nyár közepi születésnap (július 27.) méltó megünneplésének módja azonban hosszan tartó fejtörést okozott – annak ellenére, hogy már előkészületben volt két kiváló júliusi program: az ELKH (a mai HUN-RES) jóvoltából a Földfizikai és Űrtudományi Kutatóintézet július 13–17. között „Eötvös 175” kiállítást rendezett az International Union of Geodesy and Geophysics (IUGG, az Internationale Erdmessung utódszervezete) berlini világkonferenciáján [1], a Magyar Turista Egyesület pedig július 29-re megszervezte Eötvös jégcsákányának elhelyezését a dobogókői báró Eötvös Loránd Menedékházban [2]. Azután a június 12-ei koordinációs ülésre megszületett egy magától értetődő javaslat a méltó megemlékezésre: legyen július 27-én Budapesten egy Eötvös Loránd-emlékhelytúra, amely Eötvös életútjának és munkásságának egy nap alatt bejárható állomásait fűzi fel csokorba! Minden részletkérdéshez találtunk lelkes és hozzáértő együttműködőket. A krisztinavárosi Havas Boldogasszony római katolikus plébániatemplom – Eötvös Loránd megkeresztelésének helye – pedig nemcsak a záró hálaadó misét fogadta be, hanem az Eötvös Loránd Geofizikai Alapítvány elnökének azt a hirtelen született felvetését is, hogy a templom előterében Eötvös Loránd megkeresztelését emléktábla hirdesse (a Széchenyi István, Semmelweis Ignác házasságkötését és Liszt Ferenc vezénlyését megörökítő három emléktábla társaságában).

Június végére megjelent a külsejében is elegáns programfüzet [3]. A kerek órákban kezdődő negyedórás előadásokról és megemlékezésekről tömegközlekedéssel időben oda lehetett érní a következő állomásra. Az *1. táblázatban* az emlékhelytúra állomásait soroljuk fel.

A sajtóban is meghirdetett egész napos rendezvény látogatottsága állomásonként 20 és 50 között mozgott. A sajtóvisszhang leginkább a Hegyvidék TV-nek [4], a *Magyar Kurirnak* [5] és a Magyar Katolikus Rádióknak [6] köszönhető. A közreműködő partnerek természetesen saját honlapjukon is beszámoltak a nap eseményeiről, az [eotvos100.hu](http://eotvos100.hu)-n igyekeztünk mindezeket összegyűjteni [7]. A krisztinavárosi templomban felállított emléktábla még ezeknél is maradandóbban (kőbe vésve) hirdeti báró Eötvös Loránd 1848. augusztus 5-ei megkeresztelésének emlékét.



Szarka László Csaba geofizikus-mérnök, az MTA rendes tagja. Az MTA Geodéziai és Geofizikai Kutatóintézet kutatója (1977–2010), az MTA Titkárság Kutatóintézeti Főosztály vezetője (2010–2015), az MTA CSFK főigazgatója (2016–2018), soproni egyetemi tanár (2000–2018). 2019-től nyugdíjas; a HUN-REN Tudományos Tanácsának tagja. Elektromágneses geofizikával és környezeti kérdésekkel foglalkozik. A 2019-es Eötvös 100 és a 2023-as Eötvös 175 koordinációs testület elnöke.

A 2023. július 27-ei budapesti Eötvös 175 emlékhelytúra állomásai

1. táblázat

Idő	Helyszín	Téma	Előadó
8:00–8:15	XII. Svábhegy, Eötvös József park	Nyitóelőadás Eötvös József (Eötvös Loránd édesapja) mellszobránál	Kis Domokos Dániel
9:00–9:15	XII. Gesztenyés kert	Programismertetés, kiselőadás, virág-elhelyezés, sajtótájékoztató Eötvös Loránd szobránál	Szarka László, Pályi András
9:20–10:00	Az Eötvös-szobortól a Süss Nándor sétányig	Vezetett séta a Gesztenyés parkban	Kis Domokos Dániel
10:00–10:15	XII. Süss Nándor sétány	Eötvös 175 és Süss 175 a MOM-emlékmű előtt	Imre László
11:00–11:15	V. Piarista utca 1.	Eötvös Loránd gyermekéveiről	Koltai András
11:30–11:45	V. Egyetem tér 1–3.	BEAC-elnök és ifjúságnevelő	Székely Mózes, Kis Domokos Dániel
12:00–12:15	V. Ferenciek tere 6.	A pontosság bűvöletében: Eötvös Loránd élete és munkássága – kiállításbemutató	Schlay Georgina
14:00–14:15	V. Bródy Sándor u. 8.	Kultuszminiszter és turisztaszervező	Kis Domokos Dániel
14:20–15:00	A Puskin utcán át a Trefort-kertig	Vezetett séta Eötvös Loránd nyomában az ELTE D és B épületéhez	Devescovi Balázs, Kis Domokos Dániel
15:00–15:15	V. Múzeum krt. 4/D	Kiselőadás a Trefort-kertben, az Európai Fizikai Társulat Fizikatörténeti Emlékhely táblája előtt, Eötvös Loránd gravitációs méréseiről	Groma István
16:00–16:15	V. Széchenyi tér 9.	Akadémiai elnöki munkájáról	Babus Antal
17:00–17:15	VIII. Fiumei úti Sírkert	Kiselőadás és koszorúzás Eötvös sírjánál	Tóth Zsolt
18:00–19:00	I. Krisztina tér 2. (Havas Boldogasszony róm. kat. plébániatemplom)	Hálaadó mise, majd emléktábla-avatás Eötvös Loránd keresztelőjének helyszínén	Dankó Ferenc, Pályi András

Köszönet az előadóknak (*Kis Domokos Dániel, Pályi András, Imre László, Koltai András, Székely Mózes, Schlay Georgina, Devescovi Balázs, Groma István, Babus Antal* és *Molnár Andrea, Tóth Zsolt*), hogy az általuk elmondottakat írásban is megküldték. Az emléktúra hangulatát a beszédek mellett néhány fénykép illusztrálja. És mintha az aznapi evangélium [8] is kifejezetten báró Eötvös Lorándról szólna.

Irodalom

- <https://hun-ren.hu/en/news/hungarian-researchers-organized-an-exhibition-titled-eotvos175-at-the-28th-general-assembly-of>,

- <https://hun-ren.hu/hirek/magyar-kutatok-a-berlinben-megrendezett-28th-general-assembly-of-iugg-n-eotvos175-cimmel>
- [https://magyarturistaegyesulet.hu/2023-08-14\\_eotvos-175-megemlekezes/](https://magyarturistaegyesulet.hu/2023-08-14_eotvos-175-megemlekezes/)
- [https://media.eotvos100.hu/mediagyujtemeny/eotvos175/Eotvos175\\_program\\_0627e.pdf](https://media.eotvos100.hu/mediagyujtemeny/eotvos175/Eotvos175_program_0627e.pdf)
- <https://frissvideok.hu/regionalis/1702759-video-rendhagyoturaval-emlekeztek-a-175-eve-szuletett-eotvos-lorandra>
- <https://www.magyarKurir.hu/hazai/emlektablavattak-melyen-vallasos-eotvos-lorand-tiszteletere-szuletese-175-evfordulojan>
- <https://www.katolikusradio.hu/archivum.php?firstaudioid=18&mev=2023&mho=08&mnap=04&mora=18&mperc=04>
- <https://eotvos100.hu/>
- <https://www.magyarKurir.hu/mai-evangelium-2023-julius-27>

Az Eötvös Társulat jelen van a **facebook** -on!



<https://www.facebook.com/pages/Eötvös-Loránd-Fizikai-Társulat/434140519998696?fref=ts>

Vásárosnaményi báró Eötvös József és barkóczy Rosty Ágnes házasságából négy gyermek született, az első lányuk, Ilona még a pesti oldalon jött világra, és ott is keresztelték meg, de röviddel ezután a család átköltözött Budára, e plébánia vonzáskörébe, a svábhegyi Eötvös-villába. Jolántát (Jolánt), Lorándot és Máriát tehát itt keresztelték meg, sőt Jolánta és Mária a házasságát is itt kötötte. (Több forrás szerint a házaspárnak volt még egy gyermeke, Eötvös András, aki azonban a világhálón fellelhető adatok alapján még az egyéves korát sem érte meg.)

Eötvös Loránd tehát a svábhegyi Eötvös-villában született vagy egy másik villában a környéken, mert egyes információk arra mutatnak, hogy akkor még nem készült el teljesen az épület. Már ha a dátumra ránézünk, akkor is láthatjuk, hogy nem voltak mindennaposak a születésének a körülményei... Édesapja – aki emberileg és szakmailag is kimagasló példakép lehetett a számára – egy nagyon megindító levelet küldött neki huszadik születésnapja alkalmából, mivel akkoriban Loránd Heidelbergben tanult.

„Ma töltöd be huszadik évvedet. A nap, melyen születted, éltem egyik legkínosabb napja volt. Anyád a szülés következtében életveszélyben forgott. Benn a városban a felséges nép lázongott és míg feleségem betegágyánál ülve, remény és kétségbeesés között számoltam érütéseit, a Pest-Budai tornyokról a vészharang hangjai tölték meg az éji csendet, és egyik üzenet jött a másik után, mely minisztertanácshoz szólított. Sohasem szenvedtem többet, mint ezekben az órákban; míg hajnal felé Balassa tudtomra adá, hogy anyád veszélyen kívül van; s őt megcsókolva, a városba lesiettem.



*Pályi András* geofizikus, szeizmikusszervényfeldolgozó az OKGT SZKÜ-nél (1969–1971), operációkutató a CSVFM Számítástechnikai Intézetnél (1971–1975), az OKGT és a jogutód MOL Rt. munkatársa nyugdíjazásáig (1975–2006). Különböző beosztásokban vett részt a hazai felszíni geofizikai módszerekkel végzett szénhidrogén-kutatás koordinálásában, irányításában. 2000-től az Eötvös Loránd Geofizikai Alapítvány elnöke.

Úgy látszik, hogy a végzet most ki akarja egyenlíteni akkori szenvedéseimet és úgy rendelé, hogy éppen általad, ki ekkor öntudatlanul kínjaimat okoztad, éltem legfőbb örömeit átvegyem. Tartson az ég sokáig, tartson testi és lelki egészségben, úgy, hogy Önmagaddal megelégedve érezd magadat. Többet nem kívánok, mert meg vagyok győződve, hogy magad iránt sokkal követelőbb vagy, mint én valaha lehetnék.”

Vajon mik voltak azok a legfőbb atyai örömök, amelyeket éppen a fiától kapott meg Eötvös József? A Példabeszédek könyvéből (Péld 1,8–9) vett részlet ad választ: „Hallgass, fiam, apád intésére, és ne hagyd el anyád tanítását, mert ékes koszorú ez a fejedén és ékszer a nyakadon!” Hogy Eötvös Loránd egész életében hűen követte az atyai jótanácsokat és az anyja iránti önzetlen szeretet jellemezte, ez lehetett édesapja nagy öröme.

Loránd rengeteg sok talentummal született: kiváló szellemi tehetséggel, rajztehetséggel, költői vénával, amit versekbe is öntött ifjú korában – ezeket a verseket halálának 100. évfordulóján, 2019-ben meg is jelentették. Ám ha levelezését vagy közéleti szereplését figyeljük, a tőle származó beszédek és írások is mind-mind erről a művészi színvonalú nyelvezetről tanúskodnak.

Eötvös Loránd talpig becsületes ember volt, mindenkinék megadta a kellő tiszteletet, de önmaga értékeit és saját függetlenségét mindenek fölött őrizte. Híressé vált önzetlenségével, amit jól mutat, hogy nem védette le találmányait. Ha a ma embere kitalálná helyette az Eötvös-ingát, biztos, hogy meggazdagodna, mert egyből szabadalmaztatná, és a befolyt összegből fényes életet élne. Eötvös sem az ingát, sem más tudományos eredményét nem szabadalmaztatta, önzetlenül adott tanácsokat és az ingához való alkatrészeket is, hogy mások is előállíthassák.

Eötvös Loránd az általa másfél évtizeden át vezetett Magyar Tudományos Akadémia szerepét úgy határozta meg, mint a kikötőben lévő világítótoronyét, amelynek az a rendeltetése, hogy mindig világítson, és mindig segítse a biztos révbe érést a tudomány tengerét szelő hajóknak. Maga Eötvös Loránd volt az a világítótorony, akinek a személyiségét illő és szükséges megőrizni, eredményeit és példaértékű tulajdonságait felvillantani az utókor számára.

Szerkesztőség: 1092 Budapest, Ráday utca 18. földszint III., Eötvös Loránd Fizikai Társulat. Telefon/fax: (1) 201-8682

A Társulat Internet honlapja <http://www.elft.hu>, e-postacímje: [elft@elft.hu](mailto:elft@elft.hu)

Kiadja az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, felelős kiadó Groma István főtítkárs, felelős szerkesztő Igloi Ferenc főszerkesztő.

Kéziratokat nem őrzünk meg és nem küldünk vissza. A szerzőknek tiszteletpéldányt küldünk.

Nyomdai előkészítés: Hock Gábor. Nyomdai munkálatok: OOK-PRESS Kft., felelős vezető: Szathmáry Altília ügyvezető igazgató.

Terjeszti az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, előfizethető a Társulatnál vagy postautalványon a 10200830-32310274-00000000 számú egyszámlán.

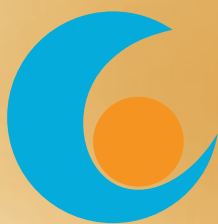
Megjelenik havonta (nyáron dupla számmal), egyes szám ára: 1200,- Ft (dupla számé 2400,- Ft) + postaköltség.

**HU ISSN 0015-3257** (nyomtatott) és **HU ISSN 1588-0540** (online)





A felvételeket Szarka László Csaba készítette



léèòŁÖçë  
pòáäĹêÇ=iÉ½  
càòáâ~îÉêëÉáó



## A XXVII. Országos Szilárd Leó Fizikaverseny meghirdetése

**Az Országos Szilárd Leó Fizikaverseny célja a fizika – és ezen belül is a nukleáris és a modern fizika – iránt érdeklődő tehetséges tanulók felfedezése.**

A Magyar Nukleáris Társaság, a paksi Energetikai Technikum és Kollégium, a Szilárd Leó Tehetséggondozó Alapítvány, az Eötvös Loránd Fizikai Társulat, valamint a Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem Nukleáris Technikai Intézete meghirdeti a XXVII. Országos Szilárd Leó Fizikaversenyt.

**Nevezhetnek** a határon innen és túl magyar nyelven fizikát tanuló, középfokú oktatásban résztvevő diákok iskolái a **Jelentkezési Lap** kitöltésével és e-mailen történő elküldésével a **sukosd@reak.bme.hu** címre. A versenyen történő részvétel részletes feltételei megtalálhatók a Verseny honlapján:

**<https://szilardverseny.hu/orszagos-verseny/verseny-meghirdetese>. Jelentkezési lap** letölthető: **<https://sukjaro.hu/SzilardVerseny/JelentkezésiLap.xlsx>**

**Nevezési díj nincs, a nevezés határideje: 2024. január 15.**

**Az első forduló időpontja: 2024. február 19., 14:00–17:00,**  
**helyszíne: a benevezettek iskolája.**

**A második (döntő) forduló időpontja: 2024. április 19–21.**  
(péntek déltől vasárnap délig),  
**helyszíne: Paks, Energetikai Technikum és Kollégium**



forók: Molnár Gyula

**A döntőbe** az első fordulóban legjobb eredményt elért húsz Szenior, és tíz Junior **kategóriájú tanulót** hívja be a Versenybizottság.

A Verseny honlapja – **<https://szilardverseny.hu>** – tartalmazza a kategóriák meghatározását, segítséget a felkészüléshez és a díjazást.

A verseny mindkét fordulójában **10-10 elméleti/számításos feladatot** kell a versenyzőknek megoldani. A döntőben ezen kívül még **kísérleti és számítógépes szimulációs feladatot** is kapnak a versenyzők.

A döntőbe jutott versenyzők helyezésüknek megfelelően értékes jutalmakat kapnak. Információnk szerint a **BME felvételi többletpontokat** ad a Szenior kategória első 10 helyezettjének a 2024-től induló új felvételi rendszerben (reméljük, hogy ezt más egyetemek is követik majd).

Várjuk a kihívást vállaló, tehetséges fiatalok jelentkezését!

A Versenybizottság nevében

*Dr. Sükösd Csaba, a BME c. egy. tanára,  
a Versenybizottság vezetője*



**mnt**



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS  
MINISZTERIUM

**ESZJ**

Nemzeti  
Tehetség Program