Magyar Tudomány 181(2020)11, 1495–1508
DOI: 10.1556/2065.181.2020.11.7

MIÉRT NINCS VÉGTELEN, CSAK HATÁRTALAN A MATEMATIKÁBAN – AVAGY HOGYAN BÉKÍTHETŐ MEG EGY FORRADALOM?
Érvek Wittgenstein érvei mellett

WHY THERE IS NO INFINITY, ONLY LIMITLESSNESS IN MATHEMATICS – OR HOW A REVOLUTION CAN BE RECONCILED?
Arguments for Wittgenstein's Arguments

Székely László
a filozófiatudomány kandidátusa, Bölcsészettudományi Kutatóközpont Filozófiai Intézet, Budapest

ÖSSZEFOGLALÁS

Brouwer és különösen Wittgenstein elemzéseit követve amellett érvelünk, hogy a tényszerű matematikában nincsenek végtelen mennyiségek, csak vég-„telen" tulajdonságok a „határtalanság" értelmében. Ennek ellenére Brouwer, Weyl és Wittgenstein forradalmi programjával szemben egy helyesen értelmezett, nem metafizikai matematika érdekében nincs szükség arra, hogy a transzfinit mennyiségek klasszikus elméletét kiküszöböljük: elég oly módon megváltoztatni a matematikai formalizmus verbális leírását, hogy ennek során csak a „határtalanság" fogalmát használjuk mint véges konstrukciók sajátosságát. Ugyanakkor a határtalan matematikai tárgyak elmélete erősen kapcsolódik a mennyiségi végtelen intuitív képzetéhez – sőt ezen intuitív képzet vezeti azt. A határtalan tárgyak az intuícióban adott végtelent szimbolizálják, és ezáltal Cantor matematikája Bach zenéjéhez vagy Pilinszky János költészetéhez hasonlóan a transzcendens felé mutat. Az, hogy ez az intuíció csupán hamis illúzió-e, mely a nyelv elbűvölő jellegéből fakad, mint amiképpen ezt Wittgenstein állítja, vagy értelmezhető a transzcendens világ evilági megnyilvánulásaként, nem tartozik tanulmányunk tárgyához.

ABSTRACT

In line with Brouwer's and especially Wittgenstein's analysis, we argue that in factual mathematics there is no infinite quantities but only in-'finite' properties in the sense of limitlessness. However, in contrast to the revolutionary program by Brouwer, Weyl and Wittgenstein, for a correctly interpreted, non-metaphysical mathematics one need not eliminate the classical theory of transfinite quantities: it is enough to change the verbal description of mathematical formalism by using only the term of limitlessness as property of finite constructions. At the same time the theories of unlimited mathematical objects are firmly connected with, even guided by, the human intuition of quantitative infinity. The unlimited objects symbolise the intuitively given infinity and through this symbolisation Cantor's mathematics points toward the transcendent, similarly to Bach's music or János Pilinszky's poetry. The question whether this intuition is only a false illusion emerging due to the enchanting character of language, as Wittgenstein claims, or it can be interpreted as a this-worldly appearance of a transcendent world, does not belong to the subject of this essay.

Kulcsszavak: matematika, végtelenség, határtalanság, metafizika, transzcendens, Cantor, Wittgenstein, Bach zenéje, Pilinszky János költészete

Keywords: mathematics, infinity, limitlessness, metaphysics, transcendent, Cantor, Wittgenstein, Bach's music, János Pilinszky's poetry

> „A végtelen lényegének végleges megvilágítása messze túlmutatva a speciális szaktudományos érdekeken az emberi értelem becsületének megőrzése érdekében vált szükségessé." (David Hilbert, 1926, 163.)

> „Ez a rendszer [az analízis hagyományos rendszere] önmagában nem tartható […] Bouwer – ez a forradalom!" (Hermann Weyl, 1921, 56.)

> „i) A végtelen összességek a szó semmilyen értelmében nem léteznek (azaz sem reálisan, sem ideálisan) […] ii) Ennek ellenére úgy kell folytatnunk a matematikai tevékenységet, mint szokásosan, azaz úgy kell cselekednünk, mintha a végtelen összességek valóban léteznének." (Abraham Robinson, a non standard analízis kidolgozója, a matematikai modellelmélet egyik megalapozója, 1964-ben: Robinson, 1965, 230.)

> „A filozófia mindent úgy hagy, ahogyan az van" (Ludwig Wittgenstein, *Philosophische Untersuchungen* § 124.)

Témaválasztásunk a matematika történetében nem járatos, illetve a matematikán belüli különböző törekvéseket nem ismerő érdeklődőkben meglepetést válthat ki. Hát nincs végtelen sok természetes szám? – kérdezheti a matematikát középiskolás fokon jól ismerő, nem matematikus olvasó. Hiszen a végtelen halmazok és mennyiségek integráns részét képezik a cantori halmazelméletnek és korrigált, axiomatikus változatának! – kiálthat föl a matematikai irányzatok vitájában nem járatos, platonista módon gondolkodó szakmatematikus. De a filozófiatörténészek is gyakran hivatkoznak arra, hogy az európai gondolkodás csak a *potenciális mennyiségi végtelen*t ismerte el egészen addig, míg Georg F. Cantor „egzakt módon", „tudományosan" be nem bizonyította az aktuális mennyiségi végtelen létezését.

Ám van itt egy fölöttébb zavaró – a mennyiségi végtelen szokványos matematikai és filozófiai tárgyalásában kifejezetten elhallgatott – tényező: e végtelen aktualitását és matematikai legitimitását többek között olyan kiváló matematikusok tagadták, mint Leopold Kronecker, Émile Borel, Henri Poincaré, Luitzen Egbertus Jan Brouwer, Hermann Weyl, az ifjabb Andrej Andrejevics Markov, vagy a non standard analízis kidolgozója, Abraham Robinson. S itt nem alkalmazható a nagy, de az új eredményeket megemészteni nem képes tudósok általánosan elterjedt kliséje sem, hiszen Brouwer és Weyl éppenséggel ifjú lázadok voltak, akik még az általuk nagy öregként tisztelt Hilberttel is szembefordultak – de az is abszurd föltételezés, hogy olyan kiváló matematikusok, mint Henri Poincaré, Émile Borel vagy Abraham Robinson dilettánsak lettek volna e területen.

Arra, hogy a mennyiségi végtelennel kapcsolatos most jelzett leegyszerűsítések mily erősen hatnak a mai magyar gondolkodásban, karakterisztikus példával szolgál Komorjai László *A metafizika és a végtelen* című, 2015-ben megjelent – egyébként színvonalas – tanulmánya (Komorjai, 2015). Ebben a szerző elfelejti megemlíteni azt a tárgya szempontjából jelentőségteljes tényt (vagy nem tud róla?!), hogy az általa érintett végtelenfogalom a cantori elmélet platonista értelmezésének, azaz nem a tiszta matematikának, hanem egy adott metafizikának fogalma. Jelen írásunk célja, hogy a szűk terjedelmi korlátok között megvilágítsa a mennyiségi végtelennel szembeni szkeptikus álláspontok hátterét, s ily módon a tárgykörrel kapcsolatos leegyszerűsítések ismételgetése helyett ösztönözze annak megismerését. Ennek során csak a végtelen számsorozatokra fogunk reflektálni, de megjegyezzük, hogy a gondolatmenet „lefelé”, azaz a végtelen oszthatóság és a valós számok folytonosságának fogalma tekintetében is alkalmazható. S persze nem térhetünk ki a végtelen fogalmával összefüggő tiszta egzisztenciális bizonyítások problémakörére sem, mely utóbbiak kiküszöbölése a konstruktivista matematika fő motivációja.

Bár Magyarországon igen erős Ludwig Wittgenstein kultusza, úgy tűnik, e kultusz képviselőinek egy része a mennyiségi végtelennel kapcsolatos fönt jelzett hamis képzetet követi, azaz Wittgenstein-rajongóként sem ismeri az osztrák filozófus matematikafilozófiáját. A jelen írás ezen egyoldalú – sokszor már-már sznob – Wittgenstein-kultusz korrekciójára is irányul.

PREMATEMATIKA, POSZTMATEMATIKA, MATEMATIKAI NARRATÍVA

Bár gondolatmenetünk nélkülük is jól követhető, tárgykörünk jobb megértéséhez hozzájárulhat, ha bevezetjük a jelen alcímben szereplő fogalmakat, melyekben a „pre” és a „poszt” jelző természetesen nem idői meghatározottságként, hanem logikailag értendő.

„Prematematika” alatt azokra a nem matematikai – módszertani, ismeretelméleti, ontológiai és metafizikai – megfontolásokra utalunk, melyek megszabják, hogy miképpen kell művelni a matematikát. A legjellegzetesebb prematematikai elv az ellentmondás kizárásának elve. Ám nemcsak ilyen triviális követelmények tartoznak a prematematika fogalma alá. Bármily sikeres is volt a Newton–Leibniz-féle differenciál- és integrálszámítás, annak idején a matematikusokban erős szkepszis fogalmazódott meg vele szemben a benne szereplő „végtelen kicsiny" fogalma miatt. Más tényezők mellett ez a szkepszis mint prematematikai megfontolás is motiválta a 19. század eleji matematikát e fogalom kiküszöbölésére – ami azután Augustin Caushynak és követőinek köszönhetően sikerrel járt. Ám szintén prematematikai iránymutatás Abraham Robinsonnak mottónkban idézett kijelentése, amennyiben a 19. század eleji matematikusoktól eltérően megköveteli a végtelen matematikai bevezetését, de csak azzal a föltétellel, ha tudatosítjuk: valójában nem létezik. E követelmény azért is tanulságos, mert magában foglal egy posztmatematikai elemet: a matematikai elméletben ugyan jelen lehet a végtelen fogalma, ám hibás ennek alapján létezésére következtetni: bár nem kell a végtelent kiküszöbölni a matematikai elméletből, a kész elméletet úgy kell hagyni „ahogyan az van", ám az elmélet fogalmi elemzése során tisztában kell lennünk azzal, hogy ez a végtelen csak „tettetett".

S ezen a ponton vezethetjük be a matematikai narratíva fogalmát, melyet a 20. század egyik legnagyobb matematikusának, David Hilbertnek a matematikai végtelenről szóló szép gondolatvezetésű tanulmánya segítségével világíthatunk meg legjobban (Hilbert, 1926). Hilbert ebben közismerten kiáll a Cantor által teremtett matematikai „paradicsom" mellett, ugyanakkor a matematikai alapjai, a matematika tulajdonképpeni „magja" tekintetében finitista-formalista prematematikai elveket fogalmaz meg. Eszerint a matematikának eredendően jelentés nélküli, véges jelekből és az azokból véges szabályok által képezhető formulákból, jelsorozatokból kell állnia. Egy matematikai tétel akkor és csak akkor érvényes, ha az axiómákként lerögzített véges jelsorozatokból az újabb jelsorozatok képzési szabályainak alkalmazásával megalkotható. Persze Hilbert egyáltalában nem azt állítja, hogy a matematikusok ne értelemmel bíró matematikai képzetekkel és elvont képekkel (számokkal, számsorozatokkal, algebrai struktúrákkal, függvényekkel, egyenletekkel, geometriai alakzatokkal stb.) foglalkoznának. Követelménye a matematikai bizonyításra, illetve a valóban egzakt matematikára vonatkozik. Azt fogalmazza meg éles elméjűen, amit a matematikusok többsége már korában is tudott vagy sejtett: egy matematikai tétel igazsága az axiomatikus fölépítésű – tehát valóban egzakt – matematikában nem azon múlik, hogy milyen képzeteket, képeket, szavakat, illetve értelmet hordozó elbeszélést fűzünk a jelekhez és jelsorozatokhoz, hanem csupán az axiómákból mint jelsorozatokból való levezethetőségen. Arra mutat rá, hogy a matematikai formalizmushoz kapcsolódó matematikai szóhasználat és a matematikusok képzetei nem érintik a matematikai állítások bizonyítottságát. Az általunk „posztmatematikai"-ként meghatározott elemzés pedig *csupán a szóhasználatra, a „narratívára" irányul:* azt elemzi *anélkül, hogy érintené a szigorú értelemben vett matematikai elméletet.*

Megközelítésünk a következőekben szigorúan „posztmatematikai” lesz: tárgyunkat nem a szigorú értelemben vett matematikai elmélet, hanem csupán a hozzákapcsolt uralkodó elbeszélésben szereplő „mennyiségi végtelen” fogalma fogja képezni. Hacsak nem utalunk ennek ellenkezőjére, a „cantori elmélet”, vagy „Cantor elmélete” kifejezéssel mind az eredeti cantori, mind annak későbbi, Ernst Zermelo és Abraham Fraenkel által axiomatizált változatára utalunk.

AZ AKTUÁLIS MENNYISÉGI VÉGTELEN FOGALMÁRA IRÁNYULÓ KRITIKA KÉT FŐ MOZZANATA

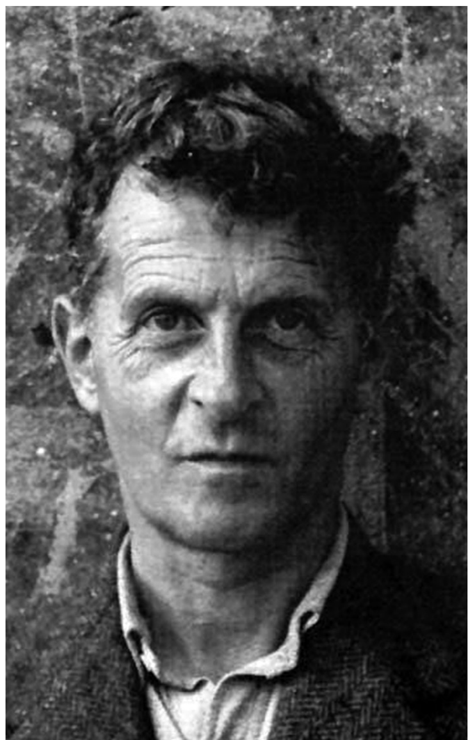
A „mennyiségi végtelennek” mind általában vett, mind matematikai fogalmával kapcsolatosan két jelentős kritikai észrevétel tehető. Mivel ezek legtalálóbb módon Wittgenstein matematikai reflexióiban fogalmazódtak meg, a következőekben tőle idézünk néhány vonatkozó megjegyzést:

i)
„Azt is mondhatjuk: nincs út a végtelenhez – még végtelen út sem […] A végtelen útnak ugyanis nem »végtelenül messze lévő« vége van, hanem nincsen vége.” (Wittgenstein, 1930, XII/123: 146.)

„Rendben, a fasornak végtelennek kell lennie. De ha végtelen, akkor ez pontosan azt jelenti, hogy nem sétálhatsz el a végéig. (Ex hypothesi nem.) … Azaz a végtelen fasornak nincs vége valahol »végtelen messzeségben«: nincs vége.” (Wittgenstein, 1930, XII/123: 146.)

„Ami a vég nélküliségben végtelen, az a vég nélküliség maga.” (Wittgenstein, 1930, XII/145: 167.)

ii)
„Képzeljünk el egy embert, aki végtelen ideje él, és aki éppen azt mondja nekünk: »épp most írtam le a π utolsó számjegyét, és az kettő«. Élete minden napján leírt egy számjegyet, mégpedig oly módon, hogy


Ludwig Wittgenstein Swansea-ben 1947-ben

(Wikipedia Közkincs: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:50._Wittgenstein_in_Swansea_(taken_by_Ben_Richards).jpg azok leírását sohasem kezdte el, és éppen most jutott a végére. Ez nyilvánvalóan nonszensznek tűnik, és a végtelen összesség fogalmának »*reductio ad absurdum*«-a." (Wittgenstein, 1930, XII/145: 166.)

„»Ismerheti-e Isten a π valamennyi számjegyét?« … A válasz minden ilyen esetben úgy hangzik, hogy: a kérdés értelem nélküli." (Wittgenstein, 1930, XII/128: 149.)

A VÉGTELENSÉG ÉS A „VÉG"-TELENSÉG FOGALMÁNAK ALAPVETŐ KÜLÖNBÖZŐSÉGE

Az első csoportba tartozó kritikai megjegyzések a „végtelen" szó bizonytalan használatára hívják föl a figyelmet. Nyilvánvaló, hogy e szót alkalmazhatjuk egy adott, jól meghatározott összesség vagy tárgy *mennyiségi* jelzőjeként, mégpedig ugyanoly módon, mint amikor kijelentjük, hogy a Budapest és Bécs közötti távolság 240 km, vagy egy adott katonai ezred hivatalos állományi létszáma 1023 fő. De használhatjuk a vég nélküliség, a befejezetlenség értelmében is. S könnyű belátni, hogy az első fogalom annyiban mindenképpen metafizikai, amennyiben végtelen nagyságú tárgyakkal, végtelen elemmel bíró összességgel tapasztalatilag sohasem találkoztunk, azaz e képzetek *az intuíció* és *a metafizika* világához tartoznak. Ezzel szemben a vég nélküliség nem mennyiségi, hanem *minőségi* meghatározottság, és mindig *véges állapot*ot ír le. Például egy út adott pontján maga az út továbbhalad, nincs vége. Hasonlóképpen: egy végtelen számsorozat bármely nagy sorszámú véges tagját válasszuk is, az nem a számsorozat végén lesz, hanem újabb tag követi.

Wittgenstein elsőként idézett sorai arról szólnak, hogy amikor a matematikai narratíva a cantori elmélet kapcsán végtelenségről beszél, és ennek során a végtelenre mint mennyiségre hivatkozik, *kategóriahibát* követ el: a végnélküliséget, a „vég nélküli továbbfolytathatóság"-ot, azaz az ebben az értelemben vett határtalanságot és nyitottságot tévesen értelmezi át olyan mennyiségi tulajdonsággá, mint amilyen például egy adott virágcsokorban lévő rózsaszálaknak vagy egy könyv lapjainak száma. Wittgenstein észrevételének szellemében kategóriahibát követünk el, ha például azt állítjuk, hogy a természetes számok halmazának elembeli mennyisége ugyanúgy konkrét mennyiség (a megszámlálható végtelen), mint egy adott rózsacsokor rózsaszálainak száma (mondjuk öt). Csak annyit állíthatunk, hogy a természetes számok halmaza, illetve sorozata határtalan, nyitott: bármikor továbbfolytatható, bármikor bővíthető újabb elemekkel, tartalmazzon is bármily nagyszámú véges elemet, illetve jusson is el fölsorolásunk bármily nagy (de sohasem „végtelenedik", hanem mindig véges) sorszámú elemhez.

Hát nincs végtelen sok természetes szám? Vajon nem végtelen sok tagot foglal-e magában a természetes számok sorozata, vagy az $1/n^2$ sorozat? – vethetjük ellen Wittgensteinnek. S valóban: kijelenthetjük, hogy ezek végtelen elemű halmazok. A kérdés viszont nem ez, hanem az, hogy min alapul ezen állítás, és mi az ontológiai (létbeli) státusza az így adódó kijelentésben szereplő végtelen összességeknek.

A fizikai világban ezek nem léteznek: még az sem bizonyítható, hogy ha végtelen sok természetes szám nem is, de legalább megszámlálhatóan végtelen sok elemi részecske létezne a kozmoszban. (A mai fizikusok közül sokan egyenesen tagadják ezt.) Akkor talán az ember által alkotott kulturális-szellemi világban vannak jelen e végtelen elemű sorozatok, végtelen sok tagjukkal? Nyilvánvalóan nem. Ennek belátására játsszunk el Wittgenstein hasonlatával: tegyünk föl egy végtelen idő óta élő személyt, aki eddigi (tehát végtelen) élete során minden nap leírta a π következő tizedes jegyét. Ez a személy vagy a végére ért a π tizedesekben történő kifejtésének, vagy nem. Ha igen, ismerjük a π utolsó tizedes számjegyét, ami nonszensz. Ha nem, akkor meg kell adnunk, hogy hányadik konkrét jegynél tart, ami szintén nonszensz, hiszen már végtelen idő óta tevékenykedik, ezért véges sorszámú jegynél nem tarthat, „végtelenedik" jegy pedig nincs. Minthogy a π tizedesjegyeinek sorozatához hasonlóan sem a természetes számoknak, sem pedig az $1/n^2$ sorozatnak sincs sem „végtelenedik" sem utolsó tagja, a már végtelen idő óta elképzelhetetlen nagy sebességgel számolni tudó intelligens gépek vagy más csillagrendszerek gyorsan számoló értelmes lényei sem adhatták meg vagy számolhatták ki ezeket. Ezért egy ilyen sorozat összes lehetséges tagja nem létezhet evilági, a fizikai kozmoszban élő és természetfölötti képességekkel nem rendelkező lények szellemi-kulturális világában sem.

Ha azt állítjuk, hogy a természetes számok sorozata ténylegesen (aktuálisan) végtelen sok tagot számlál, akkor ez a végtelen sokaság csak egy harmadik tartománynak alkothatja részét, mely ugyanúgy lehet az ideák platóni világa, mint amiképpen egy isteni jellegű, transzcendens létező mozzanata, mely a keresztény kultúrkörben magának Istennek elméje. Ami Cantort illeti, úgy tűnik nem gondolta teljesen végig az általa transzfinitnek – „végesen túli"-nak –, de az elterjedt szóhasználatban továbbra is „végtelen"-nek nevezett mennyiségek létezésével kapcsolatos ezen problémát, mivel úgy vélte, hogy nemcsak azok fogalma, hanem maguk e mennyiségek is jelen vannak mind az emberi elmében, mind a fizikai világban. Ugyanakkor arról is ír, hogy azok egyúttal örökkévaló, transzcendens létezéssel is bírnak egy platóni típusú harmadik világban (Cantor, 1893, 181.), illetve Isten elméjében (Cantor, 1895). Ezen utóbbi álláspontot jellegéből következően röviden „teoplatonista"-ként jellemezhetjük, és a Cantorral foglalkozó szakirodalom sokoldalúan bizonyította, hogy halmazelméletének szigorúan matematikai aspektusa szorosan összefonódott számára a mennyiségi végtelen transzcendens létezését állító ezen fölfogással (vö. pl. Dauben, 1979). Ezt az összefonódást azután az axiomatikus halmazelmélet megszüntette, és Hilbert többek között ezt használta ki a cantori elméletet védelmezve, amikor is az axiomatikus halmazelmélet formuláihoz (tehát a tulajdonképpeni szigorú matematikához) csatolt cantori transzfinit

Georg Cantor, a transzfinite mennyiségek elméletének megalkotója 1870 körül

(Wikipedia Közkincs: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/67/Georg_Cantor3.jpg)

mennyiségeket – azoknak Cantor által állított platonista realitásával szemben – (nem metafizikai, hanem kantiánus értelemben) „ideálisként" határozta meg (Hilbert, 1926, 174–176., 190.).

Cantor elméletét tehát egy adott metafizikai csomagolásban fejtette ki, s ezáltal összemosta a matematikát annak filozófiai értelmezésével. Tragédiája, hogy ezt a két összefonódott aspektust nem tudta egymástól megkülönböztetni, aminek nyomán a mennyiségi végtelent ért minden fogalmi kritikát matematikája elleni támadásként élt meg, s ez súlyos lelki-szellemi megrázkódtatást okozott számára. Az axiomatikus halmazelmélet viszont leválasztotta a tiszta matematikát annak metafizikai interpretációjáról, ám ezt az uralkodó matematikai nyelvhasználat, oktatás és népszerűsítés még mindig nem vette tudomásul: még ma is többnyire platonista fölfogásban tárgyalja Cantor elméletét. Persze ez egy lehetséges értelmezés, hiszen a cantori elméletet tekinthetjük valamely harmadik világ elemeinek leírásaként, és matematikai termékenységét megokolhatjuk ezen hipotetikus harmadik világ létezésével. Ám *e világnak föltételezése már nem a matematika, hanem a metafizika területére tartozik, és természetéből következőleg nem bizonyítható. A platonista harmadik világ – vagy Isten elméje – a végtelen sok természetes számmal, a transzfinit számosságú halmazokkal és más matematikai objektumokkal lehet előföltevés, hipotézis, metafizikai meggyőződés vagy hit tárgya, de sohasem válhat matematikai tétellé.*

A MENNYISÉGI VÉGTELEN FOGALMI ELLENTMONDÁSOSSÁGA

Előbbi fejtegetéseink nyomán az is látható, hogy a végtelen elemű matematikai sokaságok létezését állító platonista fölfogás nem szünteti meg a mennyiségi végtelen fogalmának ellenmondásos voltát. Éppen az ellenkezője igaz tehát annak a filozófiatörténészek körében elterjedt állításnak, miszerint Cantor bebizonyította volna e fogalom ellentmondás-mentességét: Wittgenstein előbb idézett példái nyomán – de azoktól függetlenül is – belátható, hogy a végtelen, lezárt összességek fogalma kikerülhetetlenül ellentmondásos. Ha föltesszük, hogy egy platonista harmadik világban léteznek mennyiségi értelemben végtelen elemű halmazok, melyeknek végtelensége ugyanolyan konkrét, jól megragadható mennyiség, mint például egy könyv lapjainak konkrét száma, óhatatlanul olyan létszférát föltételezünk, melynek viszonyai az emberi értelem számára ugyanúgy fölfoghatatlanok, mint amiképpen Isten végtelenségének hagyományos teológiai fogalma ilyen. A népszerűsítő irodalomban tárgyalt matematikai végtelenségparadoxonok kifejezetten a platonista narratíva szövegösszefüggésében lépnek föl, és a mennyiségi végtelen platonista fogalmának paradox voltát – fölfoghatatlanságát – illusztrálják. (Szokásos tárgyalásuk során persze elhallgatásra kerül, hogy bennük immár nem magáról a tulajdonképpeni matematikáról, hanem annak platonista interpretációjáról van szó.)

A prematematikai és posztmatematikai kritika megkülönböztetése, valamint a matematikai narratíva fogalma segítségével arra is választ kapunk, hogy a mennyiségi végtelen fogalmi ellentmondásossága ellenére miképpen lehet az axiomatikusan korrigált cantori halmazelmélet jelenlegi tudásunk szerint logikailag-formálisan ellentmondásmentes. (Ne felejtsük el: a matematikai elméletek ellentmondás-mentességének abszolút bizonyítása általában nem lehetséges.) *Az axiomatikus halmazelmélet nem azonos a platonista metafizikával, és azt nem is előföltételezi vagy foglalja magában:* attól még, hogy a matematika egyik lehetséges filozófiai értelmezése az emberi ész számára fogalmi ellentmondást generál, magában a matematikában nem keletkeznek ellentmondások. *Az axiomatikus halmazelmélethez kapcsolt platonikus elbeszélés nem érinti az elmélet axiómáit, levezetéseit, tételeit: a narratívában használt fogalmak ellentmondásos jellege nem okoz logikai ellentmondást magában a matematika tudományában.*

EGY „FORRADALOM" MEGBÉKÍTÉSE

Láthattuk, hogy a mennyiségi végtelennel kapcsolatos problémák nem magában a cantori matematikában lépnek föl, hanem csupán annak platonista interpretációjában – így például a formalista interpretációban eleve nincs jelen e fogalom. Ám nem szükséges föltétlenül a formalista utat követni kiküszöbölése érdekében. Sőt, bár Wittgenstein a maga posztmatematikai kritikájával a matematikusokat a cantori matematika elvetésére és helyette új matematika kidolgozására kívánta ösztönözni, éppen ő mutatott utat ahhoz, hogy miképpen dolgozható ki egy olyan nem formalista interpretáció, amely a cantori matematikát változatlanul megőrizve kiküszöböli a mennyiségi végtelen fogalmát.

Ez az értelmezés – Brouwer, Weyl és Wittgenstein radikális, a matematika megújítására irányuló elképzeléseivel szemben – a matematikát változatlanul hagyva csupán a hozzákapcsolt narratívát érinti, és középpontjában a végtelenségnek mint „vég"-nélküliségnek, mint határtalan továbbfolytathatóságnak fogalma áll. Mert ugyan a platonikus harmadik világ létezése csupán bizonyíthatatlan föltevés, illetve metafizikai meggyőződés, a határtalan továbbfolytathatóság, illetve bővíthetőség mint véges matematikai sokaságok tulajdonsága, tényszerűen, vitathatatlanul jelen van. Így – mint láthattuk – bármily nagy (de természetesen mindig szükségszerűen véges) természetes számot adunk is meg, a természetes számok képzési szabálya olyan, hogy újra és újra létrehozhatunk újabb és újabb, az eddigieknél nagyobb természetes számokat. S hasonlóan, a természetes számok bármely nagy elemszámú véges halmaza álljon is rendelkezésünkre, az mindig bővíthető további természetes számokkal. Lehet, hogy ez azért van így, mert létezik a platonista harmadik világ és azon belül a megszámlálhatóan végtelen sok természetes szám – ám ez metafizikai hit, posztulátum vagy meggyőződés kérdése. Az viszont *tényszerű, vitathatatlan evilági adottság, hogy a természetes számok vég nélküli továbbképezhetősége és bármely véges halmazuknak vég nélküli bővíthetősége minden platonista föltételezés nélkül is fönnáll, és a természetes számok képzési szabályának – tehát egy véges, evilági, minden transzcendenciától mentes szabálynak – tulajdonságából fakad.*

Wittgenstein elemzéseire, valamint a matematika és a matematikához csatolt narratíva különbözőségének tényére alapozva tehát a mennyiségi végtelen problematikus fogalma a matematika megújítására irányuló „forradalmi" törekvések nélkül is, pusztán „posztmatematikai" úton, a narratíva korrekciójával eltüntethető. Azt, amit Wittgenstein vég nélküli továbbfolytathatóságként ír le, a természetes számok esetében jellemezzük „alef nulla" tulajdonságként, anélkül hogy föltennénk végtelen sok természetes szám létezését. Ha pedig egy halmaz tetszőleges adott eleméhez kölcsönösen egyértelműen hozzárendelhető valamely természetes szám, az ilyen halmazokat is minősítsük „alef nulla" tulajdonságú halmazoknak. Így például a $2*n$ alakú természetes számok (tehát a páros természetes számok) sokasága esetében minden $2*n$-nek megfeleltethető az „n" és minden „n"-hez ugyanezen $2*n$ rendelhető hozzá. Így a $2*n$ alakú természetes számok sokaságát szintén alef nulla tulajdonságúként kapjuk meg. Vegyük észre, hogy e fogalmi revízióval nem csupán a szóhasználat változott: az „alef nulla" tulajdonság fogalma ugyanis nem foglalja magában, hogy a természetes számok vagy a páros számok összessége lezárt, végleges halmaz, mint amiképpen azt sem, hogy ezen összességek elemszáma végtelen volna: elég csupán az emberiség által eddig megkonstruált és a jövőben elvben megkonstruálható természetes számok és páros számok halmazairól beszélni, melyek szükségképpen mindig végesek.

Ha a határértéket valóban határértékként gondoljuk el, és nem állítjuk azt, hogy a kérdéses sorozat a végtelenben eléri, „megérinti" magát a határértéket, továbbá ha a fönti logikát és nyelvhasználatot kiterjesztve bevezetjük az „alef egy", „alef kettő", „alef […]" stb. tulajdonságokat, eltűnik a matematikából a végtelen, mégpedig oly módon, hogy a formalista megközelítéssel szemben megőrződik a formulák értelemmel telítettsége. *Ez az értelmezés és szóhasználat tehát nem mezteleníti le az elméletet puszta formulákká, de nem is ruházza föl azt metafizikai tartalommal.* Az „alef" tulajdonságok csak arra vonatkoznak, ami a formularendszerben ténylegesen jelen van: a határtalanságnak, a nyitottságnak mint tulajdonságoknak különböző típusait jellemzik. (Könnyű belátni, hogy a Zermelo–Fraenkel-féle axiómarendszer végtelenségaxiómája valójában nem a mennyiségi végtelen értelmében vett végtelenséget, hanem csupán a vég nélküli továbbképezhetőséget biztosítja az itt „alef nulla"-ként leírt változatában. A hatványhalmazok konstruálhatóságát lehetővé tevő axióma pedig a végtelenségaxiómával együtt az „alef egy", „alef kettő", „alef […]" stb. tulajdonságot alapozza meg).

A nyelvhasználat ilyen korrekciója egyúttal *filozófiailag-metafizikailag semleges:* nem viszi el a matematikai szemléletet egyoldalúan a platonista metafizikai irányba, de a platonista értelmezés iránt vonzódók elől sem zárja el a platonista interpretáció lehetőségét, miközben a matematikát meghagyja úgy „ahogyan az van".

A MATEMATIKAI VÉGTELEN VALÓDI PARADOXONJA

Ezen a ponton azonban mégsem zárul le ez a problémakör. Így nyilván sem a „forradalmár" matematikus Brouwer és Weyl, sem az antimetafizikus filozófus Wittgenstein számára nem volna elégséges egy ilyen nyelvi korrekció: ők olyan finitista matematikát tartanának elfogadhatónak, mely kizárja a platonista interpretációnak még csak a lehetőségét is. Ez azonban egy másik történet.

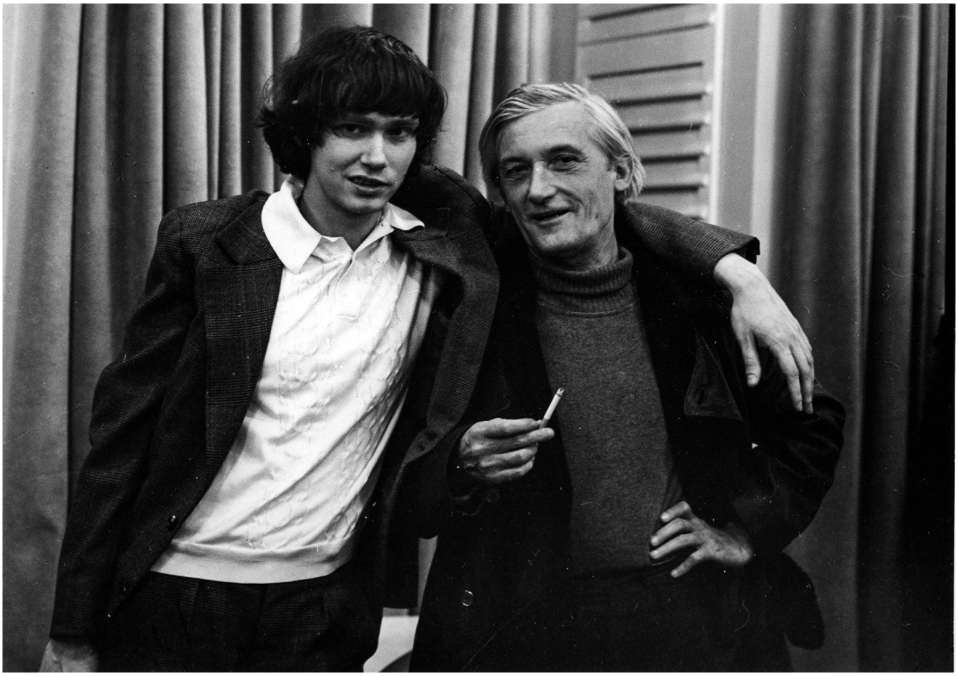
Ám a javasolt nyelvi korrekció a másik irányban, a mennyiségi végtelen képzete tekintetében sem old meg mindent. A népszerűsítő irodalom előszeretettel tárgyalja a mennyiségi végtelen paradoxonjait, amelyek – mint láttuk – valójában nem általában a matematika, hanem a platonista módon értelmezett matematika paradoxonjai. Így nyelvi korrekciónk nyomán – mindaddig, amíg nem lépünk tovább a platonista metafizika irányába – eltűnnek ezek a paradoxonok. Például az a platonista mennyiségi paradoxon, mely szerint a természetes számok megfelezése után is ugyanannyi szám marad (azaz, az az állítás, hogy „ugyanannyi" páros szám van, mint természetes szám), abban az állításban oldódik föl, hogy mind a természetes számok, mind a páros számok sokasága „alef nulla" tulajdonságú.

Csakhogy mindennek ellenére nehéz elképzelni a matematika olyan művelését, melynek során a vég nélküli továbbfolytathósággal jellemzett – azaz nyitott – konstrukciókhoz kapcsolódva valamiképpen ne jelenne meg a mennyiségi végtelen intuíciója, mint amiképpen azt is nehéz elképzelni, hogy a geométer csupán a hilberti értelemben vett jelentés nélküli formulákban gondolkodna, és intuíciójában e formulákhoz kapcsolódva ne jelennének meg geometriai alakzatok. S itt kettős viszonyról van szó: egyrészt az e jelekkel adott formalizmussal foglalkozva föllépnek ezek az intuitív képzetek (így a cantori halmazelmélet kapcsán a mennyiségi végtelen intuitív, homályos, ellentmondásos és megragadhatatlan, de mégis jól tetten érhető képzete); másrészt, nehéz a matematikai alkotást elképzelni anélkül, hogy azt ne vezetnék ilyen intuitív képzetek. Bár tényszerűen – tehát a platonista metafizikai interpretáció nélkül – a matematikai mennyiségi „végtelenek” valójában nem végtelenek, hanem csak véges konstrukciók „vég” nélküliségének – azaz vég nélküli továbbépíthetőségének – típusai, hiába látjuk be ezt, az intuícióban óhatatlanul fölsejlik egyfajta másik, a nyitottságnál többet jelentő végtelen homályos képzete is. S *a matematikai végtelen igazi paradoxonja ez:* a végtelennek a véges, nyitott konstrukciókhoz kapcsolódóan fölsejlő intuíciója. Az, hogy a véges szimbólumok akkor is a végtelen intuícióját generálják, ha értelmünkkel beláttuk: tényszerűen csak „vég”-nélküliségről van szó.

Tengelyi László a világ végtelenségéről szóló monográfiájában föleleveníti Nicolaus Cusanus azon meglátást, miszerint a matematikai mennyiségi végtelen fogalmával szimbolizálható a transzcendens abszolútum értelmünk által fölfoghatatlan végtelensége (Tengelyi, 2014, 440–441.). A szimbolizálás Cusanus–Tengelyi-féle fogalmával, de a metafizika és a teológia területére még át nem lépve, most úgy fogalmazhatunk, hogy bár a matematika a maga véges konstrukcióival csak a vég nélküliség értelmében vett végtelenséget, azaz a nyitottságot ragadja meg, ezzel egyúttal a mennyiségi végtelen intuitív, racionálisan megragadhatatlan, ám antropológiailag tényszerűen létező intuitív képzetét is szimbolizálja.

GEORG CANTOR MATEMATIKÁJA ÉS JOHANN SEBASTIAN BACH ZENÉJE

Utóbbi állításunkban a szimbolizálás fogalmával két jól megragadható evilági, tényszerű mozzanatot hoztunk kapcsolatba egymással. Mert egyrészt mind a halmazelméletnek a mennyiségi végtelennel ugyan tévesen jellemzett, de tényszerűen mégiscsak vitathatatlanul vég nélkül továbbképezhető, soha le nem zárható és ebben az értelemben nyitott konstrukciói, másrészt mind a végtelen intuíciója mint antropológiai jelenség jelen vannak világunkban. S nem kell átlépnünk a metafizika tartományába ahhoz, hogy ezáltal mély kapcsolat táruljon föl Cantor halmazelmélete, Bach zenéje és Pilinszky János költészete között. E zene és költészet evilági, antropológiai élményként Cantor elméletéhez hasonlóan a véges, tényszerű világon túlra mutató, transzcendens végtelen képzetét ébreszti föl a befogadók egy részében, s mint ilyen, véges világukat fölnyitja a végtelen irányában. Kifejezően illusztrálja ezt Pilinszky Jánosnak és Kocsis Zoltánnak a *János-passió,* illetve a *Widerstehe doch der Sünde* című Bach-kantáta kapcsán



Kocsis Zoltán és Pilinszky János
1980. április 15-én

A felvételt készítette: Moldován Domokos.
HUNGART ©2020.
(Forrás: http://mandarchiv.hu/cikk/215/Egy_ritka_felvetel_amelyen_Pilinszky_mosolyog)

megfogalmazódott jól ismert kijelentése, miszerint Bach zenéje „istenbizonyíték" (Pilinszky, 1963.; Kocsis, 2013.).

Wittgenstein filozófiájának szellemében a mennyiségi végtelen intuíciója a hibás nyelvhasználat következménye: a nyelv elvarázsol bennünket. Óhatatlanul fölvetődik a kérdés, hogy vajon a Pilinszky János és Kocsis Zoltán kijelentésében kifejezésre kerülő élményekhez hasonló élmények csupán lélektani események-e, melyektől Wittgensteinnek a mennyiségi végtelen platonista intuíciójára vonatkozó tételét kiterjesztve embertársainkat a

Johann Sebastian Bach 61 éves korában

Elias Gottlob Haussmann festménye
(Wikipedia Közkincs: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/Johann_Sebastian_Bach.jpg)

filozófiai nyelvi analízis terápiájával meg kell szabadítanunk? Vagy éppen ellenkezőleg: a cantori matematika vég nélkül folytatható, soha le nem zárható nyitott konstrukcióihoz és a mennyiségi végtelen ezek által bár meg nem ragadott, de szimbolizált intuíciójához hasonlóan – és azokkal együtt – a transzcendens abszolútum felé mutató evilági evidenciák? Kérdések, melyek már messze túlmutatnak a jelen tanulmány keretein (vö. még: Székely, 2018, 2019).

IRODALOM

Cantor, G. (1883/1932): „Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre" (Leipzig 1883) In: uő: *Gesammelte Abhandunglen. Matematischen und Philosophischen Inhalt.* Herausgeben von Ernst Zemerlo. Berlin: Julius Springer 1931, 165–208.

Cantor, G. (1895): Levél Charles Hermite-höz (november 30.) Idézi pl.: Dauben 1979, 228.

Dauben, J. (1979): *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite.* Princeton: Princeton University Press

Hilbert, D. (1926): Über das Unendliche. *Mathematische Annalen,* 95, 161–190. https://bit.ly/35Haxtm

Kocsis Z. (2013): Minden szöget ismertem. *Heti Válasz,* 42, (Sümegi Noémi interjúja 2013. október 16.) http://valasz.hu/kultura/minden-szoget-ismertem-69394

Komorjai L. (2015): A metafizika és a végtelen. *Magyar Filozófiai Szemle,* 59, 4, 78–95. http://real-j.mtak.hu/6312/4/MFSZ_2015_4_mta_real.pdf

Pilinszky János (1963): Bach: János-passió. *Új ember,* 1963. április 21.

Robinson, A. (1965): Formalism 64. In: Bar-Hillel, Y. (ed.): *Logic. Methodology and Philosophy of Science. Proceedings of the 1964 International Congress.* Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 228–248.

Székely L. (2018): A matematikai és a metafizikai végtelen Georg Cantornál, Ludwig Wittgensteinnél és Tengelyi Lászlónál, és a matematikai végtelen „valódi paradoxona". *Working Papers in Philosophy,* 2, https://fi.btk.mta.hu/hu/publikaciok/intezeti-kiadvanyok/working-papers-in-philosophy

Székely L. (2019): A matematikai végtelen cantori fogalma Ludwig Wittgensteinnél és Tengelyi Lászlónál. In: Marosán B. (szerk.): *Életesemény, sorstörténet, önazonosság. Tanulmányok Tengelyi László emlékére.* Budapest: L'Harmattan Kiadó, 105–127.

Tengelyi L. (2014): *Welt und Unendlichkeit. Zum Problem phänomenologischer Metaphysik*. Freiburg, München: Verlag Karl Alber

Weyl, H (1921): Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik. *Mathematische Zeitschrift,* 10, 39–79. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/BF02102305.pdf

Wittgenstein, L. (1930/1964): *Philosophische Bemerkungen.* Frankfurt am Main: Suhrkamp