

Tanulmány

KOLMOGOROV, A KOZMIKUS MATEMATIKUS

Szász Domokos

az MTA rendes. tagja, egyetemi tanár, igazgató, BME Matematika Intézet,
MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, Valószínűségszámítási Osztály – szasz@math.bme.hu

Száz éve született Andrej Nyikolajevics Kolmogorov (1903. április 25. – 1987. október 20.), a 20. század egyik kimagasló matematikus óriása, Leonhard Euler (1707–1783), Carl Friedrich Gauss (1777–1855) és Henri Poincaré (1854–1912) hagyományainak folytatója és kiteljesítője.

Kolmogorov kozmikus matematikus volt. Tudományos érdeklődését a legkülönbébb jelenségek keltették fel: számos alapvető, mély és gyönyörű, tisztán matematikai kérdés mellett foglalkozott Novgorod 15–16. századbeli agrár- és tulajdonviszonyaival, a Naprendszer stabilitásának problémájával, orosz költők – elsősorban Puskin – stílusjegyeinek mennyiségi elemzésével, születési és halálozási folyamatokkal, a Föld forgástengelyének mozgásával, fémek kristályosodásával, a turbulencia jelenségével, a számítási komplexitás fogalmával és elméletével a modern számítástudomány alapjait fektette le, információelméleti módszereket vezetett be a dinamikai rendszerek elméletébe...

Páratlan sokoldalúságára jellemző, hogy a számelmélet kivételével a matematika majd' minden ágában ért el alapvető eredményeket: ilyenek a trigonometrikus sorok elmélete, a mértékelmélet, a halmazelmélet, az integrálmélet, a konstruktív logika

(intuicionizmus), a topológia, az approximációelmélet, a dinamikai rendszerek elmélete, az automataelmélet, az algoritmuselmélet, az információelmélet, a matematikai nyelvészet, a turbulenciaelmélet, az égi mechanika, a differenciálegyenletek elmélete, az alkalmazott matematika (biológia, geológia, ballisztika), stb.

Kolmogorovot sok matematikus elsősorban a modern valószínűségelmélet megteremtőjeként ismeri. Ennek két magyarázata van: egyrészt 1933-ban megjelent *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* című műve valóban alapvető volt. A valószínűség matematikai elmélete ugyan már Blaise Pascal (1623–1662) és Pierre Fermat (1601–1665) klasszikus levelezésével megszületett (Rényi, 1967), és az is tény, hogy kiváló matematikusok, közöttük Abraham de Moivre (1667–1705), Pierre Simon Laplace (1749–1827), Carl Friedrich Gauss, Siméon Denis Poisson (1781–1840), Pafnutij Lvovics Csebisev (1821–1894), Andrej Andrejevics Ljapunov (1857–1918), Jarl Waldemar Lindeberg (1876–1932) már igen mély törvényeket megértettek a valószínűség naiv fogalma alapján is.

Kolmogorov a *Grundbegriffe*-ben egyfelől valóban nem tett mást, mint a Henri Le-



Kolmogorov magyarázat közben

besgue (1875–1941) által kidolgozott mértékelméletet (és integrálméletet) felhasználva fogalmazta meg a valószínűség axiómarendszerét. Ez az axiómarendszer azonban egyúttal egységes, egyszerű keretbe foglalta a korábbi eredményeket, továbbá egységes és egyszerű nyelvet biztosított a valószínűség és azután a sztochasztikus folyamatok elméletének. (A szakmabelieknek jegyzem meg, hogy egyúttal a Kolmogorov-féle alap-tétel és a feltételes várható érték ugyaniitt adott fogalma tették az axiómarendszert különösen hatékonná – lehetővé téve többek között az alkalmazások szempontjából elsőrendű matematikai statisztika megalapozását is.) De Kolmogorov nemcsak az axiómarendszert vezette be, hanem a valószínűség-számítás, a sztochasztikus folyamatok elmélete és a matematikai statisztika számos alapvető törvényét, fogalmát, módszerét is felfedezte, így vitathatatlanul ő lett a modern elmélet megalapítója. Az axiómarendszer egyben jelentős lépés volt a 6. Hilbert-probléma megoldásának irányában is. A nem matematikus olvasónak hadd írjam le, mik is a Hilbert-problémák. David Hilbert (1862–1943), az 1900-as Nemzetközi

Matematikai Kongresszuson tartott fő előadásában összegyűjtött huszonkét problémát, amelyeket a 20. század legfontosabb matematikai problémáinak tartott. Az előadás és annak hatása, amiről máris elmondhatjuk, hogy a 21. századra is átnyúlik, páratlan a tudomány történetében, a matematikáéban is csak egyszer volt elképzelhető. A 6. probléma a „Fizika axiomatikus megalapozása” nevet viselte, és a bővebb leírásból kiderült, hogy Hilbert itt többek között a valószínűségek axiomatikus megalapozására is gondolt. Ezt tette meg Kolmogorov a *Grundbegriffe*-ben és egyéb műveiben, és ezzel vált ténylegesen a valószínűség-számítás különálló, roppant szép és érdekes felfedezések halmozából egységes tudományággá, a matematika szerves részévé.

Pusztán valószínűség-számítási eredményeinek tömör áttekintése az *Annals of Probability*, a legrangosabb valószínűség-számítási folyóirat százötven oldalát töltötte ki, így Kolmogorov munkásságának még vázlatos leírása is meghaladná e folyóirat kereteit. Nagy a kísértés, hogy részletesebben leírjam, mi volt a motivációja az ún. Kolmogorov-Sinai-entrópia bevezetésével, vagy, elégedetlenül az általa megalapozott modern valószínűség-számítás – végtelen sorozatokra vonatkozó – alaperedményeivel (nagy számok törvényei, a centrális határeloszlás tételei stb.) hogyan próbálta megfogalmazni véges sorozatok valószínűségi törvényeit, ami a modern számítástudományban alapvető Kolmogorov-komplexitás kieszeléséhez vezette,¹ avagy leírjam, hogy miként jutott négy év alatt a 13. Hilbert-probléma megoldásához. Nem teszem, a bővebben érdeklődőknek inkább ajánlom az *Annals of Probability* említett kötetét, emellett négy olvasmányos honlapot:

¹ Ezek a vizsgálatai nem a *Grundbegriffe*-ben is alkalmazott mértékelméleti megalapozásra épültek, hanem a Richard von Mises (1883-1953) által kezdeményezett, a gyakoriság fogalmát használó fogalomalkotásra.

1. <http://gap-system.org/~history/Mathematicians/Kolmogorov.html> – életrajz és munkásság; 2. <http://www.cwi.nl/~paulv/KOLMOGOROV.BIOGRAPHY.html> – életrajz; 3. <http://www.idsia.ch/~marcus/kolmo.htm> – linkgyűjtemény; 4. <http://kolmogorov.com/> – a tiszteletére létrehozott honlap

Hogyan is találkoztam én Kolmogorov-val? Rényi Alfréd hatására egyetemista koromban nyáron, majd az egyetem elvégzése után is olvasni kezdtem Kolmogorov néhány cikkét, a *Grundbegriffe*-t, valamint Gnedenkovval közös könyvét a határeloszlások elméletéről. Már akkor megfogott, hogy Kolmogorovnak rendkívüli kíváncsisága és érzéke is volt az új jelenségek iránt. Gondolkodásmódja lenyűgözően célratorő volt. Azt lehet mondani, hogy tipikusan nem nehéz és szövevényes technikákat alkalmazott, bizonyításai inkább a feladat természetéből következtek. Érveléseiben mindig éppen az a gondolat jelent meg, amire ott szükség volt. Később hallottam, érzékeltem, hogy igen magas szinten tudott heurisztikusan gondolkodni; pontos bizonyítások nélkül sem tévedett. Álljon itt erre egy példa:

Két tanítványával közös, 1962-ben megjelent cikkükben (Arató, 1962) a Föld forgástengelyének statisztikai leírását tűzték ki célul. Itt a tengelynek a Föld felszínén való mozgását a gömbfelszínen értelmezett komplex Gauss-folyamatnak tételezik fel, és két konkrét valószínűségi változó függetlenségét használják ki. A publikációban azonban ezt a függetlenséget nem bizonyították. A dolgozat nagy érdeklődést keltett, és számos olvasó, aki a cikket alaposan olvasva fennakadt e függetlenségen, a tanítványokhoz fordult magyarázatért. Ők ezzel nem tudtak szolgálni, viszont arra emlékeztek, hogy e munka írásakor Kolmogorov az ujjával mutoztatva elmondott egy heurisztikus érvelést e függetlenséget alátámasztandó. Ezért, jóllehet az érvelés részleteit pontosan nem értették, az állítást bevették a dolgozatba.

Az állítást azután még évekig nem sikerült senkinek sem bizonyítania, míg végül A. A. Novikov, Kolmogorov szellemi unokája, aki egyik kiváló tanítványának, Albert Ny. Shirjaevnek aspiránsa volt, 1972-ben végre bizonyítást talált Kolmogorov heurisztikus érvelésére (Shirjaev, 1972), s ez kandidátusi értekezésének egyik fő eredménye volt.

Mindezek alapján nem meglepő az a páratlan tekintély, amelyet e génusz a matematikusok között élvezett. Hadd illusztráljam ezt is egy példával. A Naprendszer stabilitásának problémáját már maga Isaac Newton (1642–1727) is felvetette, amint megértette a bolygók mozgását leíró egyenleteket. A kérdés természetesen az, hogy ha esetleg ezen egyenletek pontosan nem is oldhatók meg, a megoldások nem olyanok-e, hogy egy vagy több bolygó (akár maga a Föld) elrepül vagy beleesik a Napba? Ha csak két testet tekintünk, például a Napot és egy bolygót, akkor ez a középiskolában is tanult Kepler-probléma. Ekkor az egyenletek megoldhatók, a testek ellipszispályákon mozognak, és a rendszer stabil (megjegyzem, bizonyos kezdeti feltételekre az egyenleteknek instabil – parabola, illetve hiperbola – megoldásai vannak).

A következő kérdés nyilván a háromtest-probléma: pl. a Napra és két bolygóra írjuk fel Newton egyenleteit. Ezzel a problémával, sőt ennek egy leegyszerűsített formájával; a korlátozott háromtest-problémával (amikor az egyik égitest tömege viszonylagosan nagyon kicsi, például a három test a Nap, a Jupiter és a Vénusz) a legkiválóbb elmék birkóztak évszázadokon keresztül. A teljességre való törekvés nélkül említsünk meg néhány tudóst, akik egy-egy jelentős észrevétellel előbbre jutottak: Alexis Claude Clairot (1713–1765; 1752-ben egy vonatkozó dolgozata elnyerte a Szentpétervári Akadémia díját), Leonhard Euler (1707–1783), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813; 1772-ben Euler és Lagrange vonatkozó memoárjai elnyerték a Prix de L'Académie de Paris-t),



A dobogókői Eötvös Loránd-menedékház előtt: balról jobbra Arató Mátyás, Kolmogorov (takarásában Szász Domokos), Prékopa András, Rényi Alfréd, Vincze István, N. N.

Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), George William Hill (1838–1914), George H. Darwin (1845–1912).

1954-ben Kolmogorov négyoldalas dolgozatot publikált a Szovjetunió Tudományos Akadémiája közleményeiben. Itt megfogalmazott tétele a probléma teljesen váratlan megoldását javasolta: a kezdeti feltételek számelméleti tulajdonságaitól függően a megoldás hol stabil, hol instabil. A cikk természetesen azonnal felkeltette a szakértők érdeklődését, így Carl Ludwig Siegelét (1896–1981), és tanítványát, Jürgen K. Moserét (1928–1999), akik már dolgoztak 1956-ban megjelent *Vorlesungen Über Himmelsmechanik* című monográfiájukon. A gond azonban az volt, hogy Kolmogorov cikke nem tartalmazott bizonyítást, pusztán rövid utalást a verifikálás ugyancsak forradalmian új módszerére (egy gyorsan konvergáló algoritmus eljárássra, amely valójában az egyetemen sokak által tanult Newton-féle eljárás alapul).

Jürgen Moser mesélte nekem már a 90-es években, hogy Kolmogorovtól nem sikerült további információt szerezniük bizonyításáról. Viszont az a tény, hogy a tételt ő fogalmazta meg, olyan bizalmat alapozott meg bennünk, hogy Siegel javaslatára nekilátott a bizonyítás kidolgozásának. Ez öt év alatt sikerült is, és dolgozata 1962-ben meg is jelent. Vele párhuzamosan Kolmogorov tanítványa, Vlagyimir Igorjevics Arnold (sz. 1937) is nyert egy bizonyítást, amely 1963-ban jelent meg. Ma az elmélet, amelyet megalkotóik nevének kezdőbetűi alapján KAM-elméletnek neveznek, a dinamikai rendszerek alapjaihoz tartozik, a Kolmogorov által kidolgozott és az Arnold és Moser által kidolgozott rendkívül hatékony módszert a legkülönbözőbb területeken alkalmazzák. Megjegyzem, hogy egyetemi kurzuson csak a tétel kimondására és értelmezésére ma is egy dupla órát kell szánnom, a bizonyítás további négy dupla óra. Minderről további részletek is olvasha-

tók Staar Gyula Jürgen Moserrel készített interjújában, a Természet Világa 1996. májusi számában.

Kolmogorovval magyar matematikusok is igen jó kapcsolatot tartottak fent. Az MTA már 1965-ben tiszteleti tagjává választotta, 1973-ban az ELTE-n doctor honoris causa lett, hazánkban többször is járt. Egyik látogatásának (ez épp az 1964-es lehetett) emlékszem néhány részletére is. Előadást tartott a turbulencia Kolmogorov-féle elméletéről, amiből igen keveset értettünk. Beszédét amúgy is nehezen lehetett érteni, nem volt igazán jó előadó. Utána viszont szívesen diszkutált, adott bővebb magyarázatokat mind előadásának részleteiről, mind bármilyen érdekes témáról. Voltunk vele az Operaházban, emlékszem arra, hogy igencsak tetszett neki Kisfaludy Stróbl Zsigmond Bartók-szobra. Kirándulni voltunk a Pilisben: Dobogókő, Vadállókövek, Prédikálószék, lelkesen élvezte. Egyébként is sokoldalú sportember volt: síezett, kirándult, evezett, futott... (A kiránduláson Rényi figyelmét is felhívta a testedzés fontosságára, amikor látta, hogy felérve egy emelkedő tetejére, Rényi erősen elfáradt.) Magát Kolmogorovot még a 80-as évek második felében is láttam a Lomonoszov Egyetem körül futni a hóban. Ekkor már majdnem teljesen vak volt, és egy kutya vezette.

E megemlékezés kivonatos, mégis meg kell emlétenem, hogy Kolmogorov sokoldalú tudományos munkássága mellett igen komolyan foglalkozott a fiatalok matematikai nevelésével is. Moszkvában bentlakásos középiskolát hozott létre azzal a céllal, hogy a tehetséges fiatalok az egész államszövetség területéről igényes matematikai képzésben részesül-



Kolmogorov és Juergen Moser (az 1962-es stockholmi Nemzetközi Matematikai Kongresszuson)

hessenek – függetlenül családjuk anyagi helyzetétől és a helyi iskolák színvonalától.

Számos elismerésben részesült, mind külföldön, mind a Szovjetunióban díjak, tiszteleti akadémiai tagságok, tiszteleti doktorátusok sora jelzi tekintélyét. Ezek közül talán a leg-rangosabb az 1980-ban elnyert Wolf-díj. Olyan matematikus volt, aki nemcsak nagy-szerű eredményeket ért el, hanem talán mélyebben és szélesebben gondolkodott a matematikáról, mint mások, és ez tette lehetővé e páratlan teljesítményt. Ilyen tudósokra joggal alkalmazható a „kozmosz” jelző, amit szűkebb értelemben Kolmogorov már pusztán az égi mechanikára vonatkozó korszakalkotó felfedezéseivel is kiérdemelt.

Kulcsszavak: Kolmogorov, valószínűségszámítás, KAM-elmélet

Cikkünk második és harmadik illusztrációját Staar Gyula szívességéből közölhetjük.

IRODALOM

- Rényi Alfréd (1967): *Levelek a valószínűségről*. Akadémiai Kiadó, Budapest. Legújabb kiadás: (1994), TYPOTeX, Budapest.
The Annals of Probability. 1989. **17**, 813–964.
Arató Máttyás – Kolmogorov, Andrej Ny. – Szinaj (Sinai), J(Y)akov G. (1962): Evaluation of the Parameters of a Complex Stationary Gauss-Markov

- Process. Soviet Math. Dokl. 3, 1368–1371. (oroszul: (1962): Ob ocenke parametrov kompleksnovo stacionarnovo gaussovskovo markovskovo processa, DAN SSSR, 146, **4**, 747–750.)
A. A. Novikov (1972): Ob ocnkah parametrov diffuzionnyh processov. Studia Sci. Math. Hung. **7**, 201–209.