DINAMIKUS PIACOK ÉS IRÁNYÍTÁS[1]

Vizvári Béla
egyetemi docens, ELTE TTK, Operációkutatási Tanszék – e-mail: vizvari@cs.elte.hu

Bevezetés

Mára a *rendszer* tudományos alapfogalommá vált. Olyan, önmagában is létezõ dolgot takar, amely részekbõl áll. Már az is rendszer, ha elõre elkészített, szabványos alkatrészekbõl szekrénysorokat szerelhetünk össze. Ekkor a rendszer tulajdonképpen az az absztrakt fogalom, ami a felhasználható, azaz a mérnökök által megtervezett absztrakt alkatrészekbõl áll, amelyek példányait a szükségleteink és a pénztárcánk függvényében tetszõleges számban megvásárolhatjuk. Ez a rendszer holnap ugyanaz lesz, mint ma. Ha megváltozik, akkor nem magától változik meg, hanem külsõ hatásra, például valamely idõközben felmerült igény hatására a mérnökök új alkatrészeket terveznek hozzá. Vannak olyan rendszerek, amelyek idõben változnak, de ezt a változást külsõ erõ mozgatja. Jellegzetes példája ennek nagymamánk kézzel tekerendõ mákdarálója. Ahogy forgatjuk a kart, a daráló belseje is újabb és újabb helyzetekbe kerül. De nélkülünk a daráló mozdulatlanul, változatlan helyzetben maradna.

Dolgozatunkban olyan rendszerekrõl írunk, amelyek nemcsak változásokon mennek keresztül, hanem e változásokat – akarva-akaratlan – maguk irányítják, azaz visszahatnak önmagukra. Gondoljunk a légtornászra, akinek egy vékony kötélen kell végigmennie. Ha azt érzi, hogy balra dõlne, akkor olyan mozdulatot tesz, hogy jobbra térjen ki, és fordítva.

Egy termék piacát hagyományosan úgy tekintjük, hogy az nemcsak a tényleges vásárlókból és eladókból áll, hanem a potenciális vásárlókból és eladókból is. Minden – tényleges vagy potenciális – vásárlónak van értékítélete arról, hogy a termék mennyit ér. Ha a piaci ár alatta marad egy vásárló értékítéletének, azaz neki megéri megvenni a terméket, akkor az illetõ tényleges vásárló, ha viszont éppen ellenkezõleg, a piaci ár magasabb, akkor csak potenciális vásárlóról van szó az adott pillanatban. A potenciálisból akkor lesz tényleges vásárló, ha a piaci ár az õ értékítélete alá csökken. Megfordítva, ha a piaci ár egy vásárló értékítélete fölé nõ, akkor õ ténylegesbõl potenciális vásárlóvá válik. Hasonló a helyzet a termék elõállítóival, nevezetesen: mindazoknak megéri a termelés, akiknek a termelési költsége alacsonyabb a piaci árnál. Azok, akik ugyan elõ tudnák állítani a terméket, de drágábban, csak potenciális termelõk, hiszen jelenleg nekik nem kifizetõdõ ez a tevékenység. (Most eltekintünk attól az éles piaci versenytõl, amelyben a terméket áron alul kínálják.)

Az ún. *keresleti függvény* minden egyes árhoz megadja, hogy azon az áron mennyit lehet eladni, ami nem más, mint azon vásárlók által vásárolt összmennyiség, akiknek az értékítélete legalább akkora, mint az adott ár. Hasonlóképpen a piac *kínálati függvénye* minden egyes árhoz megmondja, mekkora árumennyiség jelenik meg a piacon. Ez pedig azon termelõk által elõállított mennyiség, akiknek az önköltsége nem haladja meg a piaci árat.

[1] A tanulmány a T33030 számú OTKA-pályázat támogatásával készült.

A kereslet-kínálat törvénye azt jelenti, hogy a piacon mindenkor olyan ár alakul ki, hogy a kereslet egyensúlyban legyen a kínálattal. Ezt az árat figyelik a piac tényleges és potenciális szereplõi, és ennek alapján döntenek jövõbeli szerepükrõl.

Az eddigiekben vázolt mechanizmus különösen tisztán jelenik meg a szántóföldi növénytermesztés esetében. Az õszi betakarítás után a termés mennyiségétõl függõen kialakul az egyensúlyi ár. Minden tényleges és potenciális termelõ ennek alapján dönti el, hogy a következõ évben mennyit termel. A döntéshez persze korábbi információkat is felhasználhatnak. A döntés eredménye a következõ évben az adott növény termesztésére felhasznált terület, amely meghatározza a következõ évi termést. (Természetesen az idõjárás valamekkora bizonytalanságot jelent.) Ez a folyamat következõ idõbeli sorrendjét jelenti: (1) kialakul a piaci ár, majd (2) a termelõ megbecsli a következõ évi árat (3), ez meghatározza a következõ évi termést (4), a kereslet-kínálat törvénye alapján kialakul az új piaci ár. Ez a mechanizmus, amelyben jól látható módon a termelõ árbecslésén keresztül a piac visszahat önmagára, a végtelenségig ismétlõdik. Ez a visszahatás teszi a piacot *dinamikus rendszerré.*

A piac mindenkori állapotát tehát a termék ára jellemzi. Az egymást követõ árak sorozatát *trajektóriának* nevezzük. Hogy a trajektórián belül hogyan változik az ár, az jelenti a piac mozgását. Az eddig vázolt keretek nagyon sok mozgásformát tesznek lehetõvé, éppúgy, ahogy nagyon keveset mondtunk egy vízrõl azzal, hogy folyó. Ettõl még lehet csendesen hömpölygõ folyam vagy éppen ellenkezõleg, vízesésekkel és zúgókkal tarkított vad hegyi folyó, lehet több száz vagy több ezer tonnás hajókat elbíró mély víz, avagy keskeny és sekély, amin legfeljebb csónakok közlekedhetnek.

Mielõtt tovább haladnánk, meg kell jegyezni, hogy a mûszaki területen is vannak a vázolthoz nagyon hasonló módon végbemenõ folyamatok. Az amplitúdómodulált rádióadók, pl. a középhullámon mûködõ Kossuth-adó, állandó frekvenciát bocsátanak ki. A jel erõsségét változtatják a leadni kívánt hangjel függvényében. Ilyenkor tehát nagyon fontos, hogy az alapjel frekvenciája állandó legyen, különben a vevõt hiába állítjuk az adóra, mert az adó állandóan „elmászik". Több különbözõ mûszaki megoldás ismeretes az alapjel frekvenciájának stabilizálására. Az egyik, amikor meghatározott, egyenletes idõközönként mintát vesznek a jelbõl (megfigyeljük az elõzõ évi árat), az eltéréstõl függõ korrekciós jelet képezünk (megbecsüljük a jövõ évi árat, és döntünk a termelés nagyságáról), végül ezt a korrekciót a jelhez adjuk (kialakul a következõ évi ár). Világos, hogy ebben a mechanizmusban az adó visszahat önmagára, hiszen a jövõbeli állapota, azaz a késõbb leadandó jel frekvenciája a jelenlegi állapottól, azaz a pillanatnyi frekvenciától függ.

A továbbiakban a piac érdekesebb mozgásait elemezzük.

Remények és valóság a piacon, elméletben és a valóságban

Ha egy piac stabil, az ár változatlan, annak számos elõnye van. Jól járnak mindazok a termelõk, akiknek olyan technológiájuk van, amellyel önköltségük a piaci árnál alacsonyabb, hiszen állandó nyereségre tudnak szert tenni. Jól járnak a fogyasztók is, mert kiszámítható összeget kell költeniük.

A valódi piacok ritkán stabilak ennyire. Számtalan esetben kimutatható hosszabb-rövidebb ciklus a piacon. A mezõgazdasági termékek körében a leghíresebb az elõször az 1920-as évek végén detektált, és a hazai piacon is megfigyelhetõ sertésciklus.

A valódi piac a ciklizálás mellett vagy helyett jóval bonyolultabb mozgásokra is képes. Például a burgonya hazai ára 1995-ben nagyon magas volt, mind nominál-, mind reálértékben hatalmas, új csúcsokat állított föl. Ezzel szemben 1997-ben *Eladhatatlan burgonyahegyek* címmel jelent meg cikk egy újságban. Valóban, olyan sok volt a burgonya, hogy a kormánynak is lépnie kellett. 10 forintot ígért kilogrammonként mindenkinek, aki igazolt módon bizonyos intézményeknek (iskolák, óvodák, kórházak stb.) akár 0 Ft/kg-os áron elad burgonyát. Ez az intézkedés azzal egyenértékû, mintha egy 10 Ft/kg alsó intervenciós árat vezetett volna be, azaz ezen az áron minden burgonyát hajlandó lett volna felvásárolni. Az intervenciós ár jelentõségére a piac stabilizálásában még visszatérünk. 2002-ben a burgonya reálára jóval az 1995-ös szint alatt van. Nominálára magasabb, de ez az idõközben bekövetkezett inflációnak tudható be. Mindebbõl egyelõre annyi a tanulság, hogy a burgonyapiacon ciklizálás nem figyelhetõ meg, de furcsa mozgások vannak, ami miatt az ár elõrejelezhetõsége is kérdéses lett.

Az, hogy egy piac milyen trajektória mentén mozog, a piac belsõ erõin túl függ attól is, hogy a trajektória honnan indult. *Finkelstädt* nyugat-németországi heti tojás-, sertés- és burgonyaárakat vizsgált. A sertésárak jól érzékelhetõ módon ciklizáltak az 1950-es és 1960-as években. A 70-es évek elején az olajválság ezt a piacot is sokkolta. Miután a sokkhatás megszûnt, és az árak visszatértek a normális nagyságrendbe, a piac szemmel láthatólag egészen más típusú trajektória mentén haladt tovább.

Mindez azt is jelenti, hogy ha a piacon az ár nem állandó, attól még létezhet olyan, úgynevezett *fixponti ár*, amely állandó maradna, ha egyszer a piac oda el tudna jutni. Azonban az kellene, hogy az ár abszolút pontosan ez a fixponti ár legyen, mert már a legkisebb eltérés is bonyolultabb mozgásra készteti a rendszert. A gyakorlatban természetesen ez az abszolút pontosság nem érhetõ el, hiszen kisebb-nagyobb ingadozások mindig elõfordulnak. Ezért a valóságban is állandó árat *stabil*, a csak elméletben létezõ, de a gyakorlatban soha el nem érhetõ állandó árat *instabil* fixponti árnak nevezzük. A stabil fixponti árra viszont az jellemzõ, hogy legalábbis egy bizonyos tartományon belül, ha valamely külsõ vagy véletlen ok hatására az ár el is tér a fixponti ártól, a trajektória vissza fog térni ahhoz. Ez ahhoz hasonlatos, mint amikor egy üvegkehelybe egy kis golyót ejtünk, amely rövid idõ után a kehely legalsó pontjára jut. Hiába rázzuk meg a kelyhet, és térítjük ki a golyót a helyzetébõl, az mindig visszatér ebbe a stabil helyzetébe.

Érdekességként megemlítjük: a rádiós példa esetében is elõfordul, hogy a rendszer ahelyett, hogy a fixpontban maradna, bonyolult mozgást végez. A kibocsátott furcsa, kellemetlen hangok hallatán szoktuk azt mondani, hogy a berendezés „begerjedt". Jellegzetesen ez fordul elõ olyan mûsorok esetében, amelyekbe a hallgató betelefonálhat, és a háttérben ugyanaz a mûsor szól. Ekkor ismét azzal van dolgunk, hogy a rendszer korábbi állapota, az egy pillanattal korábban leadott hang visszahat a rendszer késõbbi állapotára. Ennek a visszahatásnak az eredménye mindenképpen eltéríti a rendszert attól, amit csinálnia kellene, azaz a telefonbeszélgetés tiszta közvetítésétõl, és rövid idõn belül kellemetlen, torz hangokat hallunk. Ezt megelõzendõ kéri meg a mûsorvezetõ a betelefonálót, hogy halkítsa le saját készülékét.

Érdemes néhány kérdést felvetni.

Hátrányos-e a termelõnek a ciklizáló vagy egyéb bonyolult mozgást végzõ piac? A termelõnek hosszú idõ átlagában vett haszna ekkor is van. Ezt kell összehasonlítani azzal a haszonnal, amelyhez akkor jutna, ha a piaci ár az instabil fixponti ár volna. Ha ez az utóbbi magasabb, akkor egyértelmû, hogy a termelõ rosszul jár amiatt, hogy a piac nem stabil, hanem bonyolult trajektória mentén mozog. Ha viszont fordított a helyzet (ez ritka, de nem kizárható eset), akkor a termelõ tulajdonképpen jobban jár azzal, hogy az ár nem stabil. Ilyenkor azonban évrõl évre erõsen változik a jövedelem. Emiatt a nyereség egy részét a jó évekrõl át kell vinnie a rossz évekre tartaléknak. Ennek a transzfernek is költsége van. Sajnos a gyakorlatban a transzfer többnyire el is marad. Emiatt aztán még ebben az elõnyös esetben is a termelõ szubjektíve úgy érezheti, hogy rosszul jár. Így felmerül a piac *stabilizálásának* igénye.

Mikor van értelme a stabilizációnak? Közgazdasági környezetben a stabilizációra sokkal szigorúbb feltételek adódnak, mint mûszaki esetben. Egy rádió adóállomásának berendezése másodpercenként sok százezer vagy millió rezgést végez. A bekapcsolástól az adás megkezdéséig akár több perc is eltelhet, amíg az adó bemelegszik. Ennyi idõ alatt rengeteg mintavételezés és korrekció hajtható végre. Ezzel szemben a bennünket érdeklõ agrárpiacon minden egyes iteráció, ami a rádió esetében egy mintavételnek felel meg, egy év. Nyilvánvalóan értelmetlen lenne, hogy a stabilizálás csak sok millió minta, azaz sok millió év után következzék be. Mivel a stabilizációhoz pénzre lesz szükség, egy kormány csak akkor szánhatja el magát rá, ha bizonyítani tudja, hogy a ráfordításnak haszna van. Ezt a követelményt általánosságban arra lehet lefordítani, hogy öt éven belül meg kell tudni közelíteni a beavatkozás eredményeként instabil fixpontot.

A mozgásformák

A fentiekben már említettük a dinamikus rendszerek lehetséges mozgásai közül a két legegyszerûbbet, azt amikor a rendszer egy fixpontban van, azaz hétköznapi fogalmaink szerint nem mozog, és azt, amikor ciklizál. Nincs teljes osztályozásunk az összes lehetséges mozgásra. Kettõ mégis jól elkülöníthetõ.

Képzeljük magunk elé egy autógumi belsejét vagy a gyerekek úszógumiját. Ugyanilyen, a geometriában tórusznak nevezett alakzatot kapunk, ha egy rugalmas csõ egyik végét visszahajlítjuk, és a másik végébe illesztjük. Tegyük fel, hogy egy fazekaskorong elõtt ülünk, és a gumibelsõ a korongon pihen. Ha egy vízszintes síkkal gondolatban elvágnánk a tóruszt, akkor a fala két koncentrikus kört adna. Ha függõleges síkkal metszenénk el, akkor pedig ugyancsak két kört kapnánk, melyek távolságát a gumibelsõ átmérõje szabná meg. Tehát a tóruszra vízszintesen is és függõlegesen is kört tudunk rajzolni. Tegyük meg az utóbbit egyenletes sebességgel, és akkor se álljunk meg, ha már körbeértünk. Közben egyenletesen forgassuk a korongot. Ha a két körmozgás ideje összemérhetõ, azaz van egy olyan idõtartam, amely mindkét körmozgás egyszeri körbefordulási idejének többszöröse, akkor ceruzánk vissza fog térni a kiindulási pontba. Ekkor a rendszer nagyon bonyolult módon ugyan, de ciklizál. Ha viszont ilyen közös többszörös nincs, azaz a két körmozgás ciklusideje nem összemérhetõ, akkor ceruzánk hegye soha nem tér vissza egy olyan pontba, ahol már volt. Az általa rajzolt vonal pedig teljesen sûrûn behálózná a tórusz felületét anélkül, hogy minden pontba eljutnánk. De ha végtelen ideig végeznénk a rajzolást, akkor minden pontot tetszõleges pontossággal megközelítenénk.

Még ennél is bonyolultabb mozgás a *káosz*. Nincs egységesen elfogadott matematikai definíciója annak, hogy mikor nevezünk egy mozgást kaotikusnak, hanem számos, egymással nem egyenértékû meghatározás ismert. Mindegyik a következõ szemléletes képet akarja egzakt formulákba önteni: (a) a mozgás egy korlátos tartományban zajlik, (b) a mozgás kiindulópontjában bekövetkezõ legkisebb változás is a trajektóriák jelentõs eltávolodását okozhatja, (c) annak ellenére, hogy ismerjük a mozgást leíró törvényszerûséget, hosszabb távon nem tudjuk megjósolni, hogy egy adott pillanatban hol leszünk. Az (a) követelmény olyan, mintha egy legyet bezárnánk egy szobába, és az össze-vissza röpköd. A (b)-t szokták pillangó-effektusnak nevezni azért. Az idõjárás ilyen érzékeny rendszer. A mai európai idõjárás függ attól, hogy pár napja Ausztráliában egy bizonyos lepke lebegtette-e a szárnyát vagy sem. Ha egy futópályán ketten futnak egyenletes, de nem azonos sebességgel, akkor az (a) és (b) követelmény tetszõleges kiinduló helyzet esetén is teljesül, míg (c) nem, mert mindig pontosan meg tudjuk mondani, hogy a futóknak hol kell lenniük.

Annak ellenére, hogy nincs egységes definíció, van két mérõszám, amelyek megfelelõ értékei mellett az (a) feltétel teljesülése esetén káoszról beszélünk. A (b) követelményhez kapcsolódva az ún. *Ljapunov-exponens* azt méri, milyen gyorsan távolodnak egymástól az egymáshoz közeli pontokból induló trajektóriák. A Ljapunov-exponenst úgy állapították meg, hogy ha a köznapi értelemben a trajektóriák nem távolodnak, hanem közelednek egymáshoz, akkor az értéke negatív, ha nagyjából azonos távolságban maradnak, akkor nulla, míg ha gyorsan távolodnak egymástól, akkor pozitív. Tehát ez az utóbbi érték vall a káoszra.

A köznapi életben elõforduló alakzatok, például pont, egyenes, síkidomok dimenzióját ismerjük, ami rendre 0, 1 és 2. Ugyancsak 2 a dimenziója a gömb, a kocka és más alakzatok felületének. Vannak olyan lyukacsos szerkezetû alakzatok, amelyek nem teljesen töltik ki a teret vagy annak egy részét. Hausdorff nevéhez fûzõdik a finom elemzés segítségével bevezetett dimenziófogalom, amely a szokásos alakzatok esetében megegyezik a megszokott 0, 1, 2 stb. dimenzióval, de az említett lyukacsos szerkezetû alakzatoknál tört értéket is felvehet.

Az egyik legegyszerûbb ilyen furcsa alakzat a Cantor-halmaz, amelyet *Georg Cantor,* a halmazelmélet kidolgozója talált meg. A Cantor-halmaz a [0,1] intervallum azon pontjaiból áll, melyeknek a hármas számrendszerben felírt végtelen tizedes alakjában jegyei közt nem szerepel az 1, csak 0 és 2. (Ha egy szám felírható volna véges sok jegygyel úgy, hogy csak az utolsó jegy volna 1, akkor ezt az egyest helyettesítjük egy nullával és mögötte álló végtelen sok kettessel.) Ehhez az alakzathoz egy olyan végtelen sorozattal juthatunk el, amelynek elsõ tagja maga a [0,1] intervallum. A sorozat minden következõ tagja úgy keletkezik az õt közvetlenül megelõzõbõl, hogy az utóbbi összes szakaszából kivágjuk a középsõ harmadot. A Cantor-halmaz dimenziója log 2/ log 3.

Az ilyen tört értékû dimenzióval jellemezhetõ halmazt *fraktálnak* nevezik. Jó bevezetést nyújt elméletükbe Fokasz (1997) könyve, amely a Cantor-halmazt is részletesen tárgyalja.

Ha egy dinamikus rendszer végtelen ideig mûködik, akkor minden határon túl megközelít egy bizonyos halmazt, amit a rendszer *attraktorának* nevezünk. Ha ennek az attraktornak a dimenziója nem egész, akkor ismét kaotikusnak gondoljuk a rendszert.

Általánosságban nagyon nehéz volna egy többszörösen implicit módon megadott halmaz dimenzióját meghatározni. Ezért az eredeti Hausdorff-dimenzió több közelítését is kidolgozták, amelyek arra is alkalmasak, hogy egy-egy konkrét alakzat esetében kimérjük õket.

Az attraktor dimenzióját a trajektória dimenziójával mérjük. A trajektória a piac esetében azonban árak sorozata, minden ár egy valós szám, lehetséges-e itt egyáltalán egynél magasabb dimenziót várni? Az alábbi megfontolás és az azt alátámasztó matematikai elmélet szerint a kérdésre igen a válasz. A piac és a rádióadó sokkal bonyolultabb annál, hogy egyetlen árból, illetve egyetlen frekvenciából álljon. Az ár, illetve a frekvencia a rendszer egy paramétere, ami megfigyelhetõ. A rendszernek lehetnek más paraméterei is, amelyeket nem akarunk, esetleg nem is tudunk megfigyelni. Ezek a további paraméterek bonyolult, dinamikus kapcsolatban lehetnek egymással, melyrõl esetleg nincs is tudomásunk, hisz a dinamikus rendszer létezésérõl és viselkedésérõl sokszor csak megfigyelés útján van tudomásunk anélkül, hogy bármiféle egzakt leírásunk lenne. Az említett matematikai elmélet szerint a dinamikus rendszer egyetlen megfigyelt paraméterbõl is rekonstruálható, illetve vele ekvivalens rendszer építhetõ fel a következõ módon.

Tegyük fel, hogy a trajektória egymást követõ értékei $p_1, p_2, \ldots$ Legyen n egy elegendõen nagy pozitív egész, k pedig egy másik pozitív egész. A trajektória értékeibõl n-dimenziós vektorokat képezünk úgy, hogy n számú, egymástól k távolságra lévõ értéket fogunk össze egy vektorba. Így a

$$\begin{gathered}(p_1,p_{1+k},p_{1+2k},\ldots,p_{1+(n-1)k}),\\(p_2,p_{2+k},p_{2+2k},\ldots,p_{2+(n-1)k}),\\(p_3,p_{3+k},p_{3+2k},\ldots,p_{3+(n-1)k}),\end{gathered}$$

pontokat nyerjük. Ezen n dimenziós pontok halmazának már meghatározható a dimenziója, hiszen a vektorok mind ismertek, tekintettel arra, hogy csak megfigyelt értékeket tartalmaznak.

A matematikai modellekrõl

Ebben a dolgozatban csak olyan rendszerekkel foglalkozunk, amelyek az ún. diszkrét idõfogalomra épülnek. A diszkrét idõfogalom azt jelenti, hogy a modellben az idõ nem folyamatosan változik, hanem egyik *idõpontról* átugrunk a másikra. A növénytermesztés esetében pontosan errõl van szó, hiszen nem folyamatosan aratunk, hanem évente egyszer. Azaz egyik aratásról/évrõl átugrunk a következõ aratásra/évre.

Tegyük fel, hogy a rendszerünk m érték között létesít dinamikus kapcsolatot, melyek értéke a t idõpontban legyen $x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tm}$. A dinamikus rendszert az alábbi egyenletek írják le:

$$\begin{aligned}x_{t+1,1} &= f_1(x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tm})\\x_{t+1,2} &= f_2(x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tm})\\x_{t+1,m} &= f_m(x_{t1}, x_{t2}, \ldots, x_{tm})\end{aligned} \qquad (1)$$

ahol $f_1, f_2, \ldots, f_m$ alkalmas függvények. Fontos matematikai tény, hogy amennyiben $f_1, f_2, \ldots, f_m$ lineáris függvény, azaz alkalmas a_{ij} és b_i együtthatók mellett

$$\begin{aligned}x_{t+1,1}&=a_{11}x_{t1}+a_{12}x_{t2}+\ldots+a_{1m}x_{tm}+b_1\\x_{t+1,2}&=a_{21}x_{t1}+a_{22}x_{t2}+\ldots+a_{2m}x_{tm}+b_2\\x_{t+1,m}&=a_{m1}x_{t1}+a_{m2}x_{t2}+\ldots+a_{mm}x_{tm}+b_m\end{aligned} \qquad (2)$$

és a trajektória egy korlátos tartományban marad, akkor dinamikus rendszer lehetséges mozgásformái: a rendszer egy fixpontban van, egy fixponthoz konvergál és ciklizál. A káosz és más bonyolult mozgásformák tehát ebben az esetben kizártak.

Megfordítva ez azt jelenti, hogy ha egy rendszerben olyan mozgásformát figyelünk meg, amely lineáris modell mellett nem lehetséges, akkor bizonyosan csak olyan modellel lehet kielégítõ módon leírni, amely nemlineáris elemeket is tartalmaz.

Ez egyúttal a legegyszerûbb piacot stabilizálni kívánó állami beavatkozás, az intervenciós ár kritikája. Az alsó intervenciós ár a termelõt védi attól, hogy a termék ára túl alacsony legyen, ami miatt a termelõ túl alacsony jövedelemre tenne szert, azaz ezen az áron az állam mindent felvásárol. A felsõ intervenciós ár pedig a fogyasztót védi a túl magas ártól. Ha az ár e szint fölé nõne, akkor az állam a saját készleteibõl vagy importból az intervenciós áron piacra dobja a terméket, hogy az ár ne emelkedjen lehetetlenül magasra.

Bármelyik intervenciós ár megtöri a piac esetleges linearitását. Nemlineáris piac esetén a nemlinearitást azonban nem tudja eltüntetni. Tehát az intervenciós ár olyan nemlinearitást hoz be, ami ugyan nem szükségképpen vezet káoszhoz, de ahhoz *vezethet*, mint azt alább látni fogjuk. Ez ellen csak az véd biztosan, ha a két intervenciós ár nagyon közel van egymáshoz, azaz az állam lényegében meghatározza az árat.

Meg kell jegyezni, hogy mivel negatív ár nincs, ezért a 0 matematikai értelemben mindig alsó intervenciós árként mûködik. Tehát tökéletesen lineáris piac nem létezik.

Jelölje p^e_t az árat, amit a termelõ a t idõpontra vár, míg ugyanebben az idõpontban a tényleges árat a korábbiakhoz hasonlóan p_t. A folyamat idõbeli lefutásának fenti elemzése szerint a piacra kerülõ mennyiség p^e_t-tõl függ, ami pedig meghatározza a piaci árat. Legyen $S(p^e_t)$, illetve $D(p_t)$ a kínálati, illetve keresleti függvény. A piac egyensúlyát a

$$D(p_t) = S(p^e_t) \tag{3}$$

egyenlet írja le. Ebbõl fejezendõ ki p_t. Természetesen ismerni kell a termelõ árbecslési módszerét is, amit egy újabb

$$p^e_t = g(.) \tag{4}$$

egyenlettel adhatunk meg. A jobb oldal g függvényének változóit nem adtuk meg, mert azok a konkrét módszertõl függnek. Természetes azt feltételezni, hogy abban az elõzõ piaci és várt ár(ak) szerepelnek.

Az egész mechanizmus legfeltáratlanabb területe a valódi termelõ becslési módszere, illetve az, hogy ezt mivel lehet jól közelíteni. Annak ellenére így van ez, hogy az elméleti közgazdasági irodalom számos módszert ismer (Kovács és mtársai, 2001). Egyes újabb vizsgálatok (Bacsi és mtársai, 2000; Hajdú és Lakner, 2000; Lakner és Stummer, 1996; Mellár és Rappai, 1993; Vizvári és Rémik, 2002) azt mutatják, hogy az ún. adaptív, illetve extrapolatív árvárakozás a magyar termelõ esetében jó közelítést adhat. Az adaptív becslést *Nerlove* (1958) vezette be. Képlete:

$$p^e_t = p^e_{t-1} + \alpha(p_{t-1} - p^e_{t-1}) \tag{5}$$

ahol α 0 és 1 közé esõ állandó. A formula mögötti gondolat az, hogy a termelõ tanul a piaci folyamatokból úgy, hogy becslését annak hibája mértékével arányosan módosítja. A módszert 1958-ban elméleti lehetõségként vetette fel Nerlove abban a reményben, hogy a múltból való tanulás stabilizálhatja a piacot. Akkor még a káoszelmélet nem épült be a közgazdaságtanba, így nem tudhatta, hogy a remény nem megalapozott. Az extrapolatív becslés nagyon hasonló, de itt a várt árat az utolsó árnak az utolsó árváltozással arányos változtatásával nyerjük:

$$\begin{aligned} p^e_t &= p_{t-1} + (\alpha - 1)(p_{t-1} - p_{t-2}) = \\ &= \alpha p_{t-1} + (1 - \alpha)p_{t-2}\,, \end{aligned} \tag{6}$$

ahol α nemnegatív konstans.

A kínálati függvény azon a hipotézisen alapul, hogy a termelt mennyiség maximalizálja a termelõ hasznát, feltéve, hogy a piaci ár azonos a várt árral, és az összes megtermelt mennyiség elfogy. Ez tehát nem jelenti azt, hogy a termelõ a termés mennyiségének maximalizálására törekedne. Ugyanis egy bizonyos határ fölött a termelési költség növekedése egyre gyorsul (növénytermesztés esetében például egyre több vegyszert kellene felhasználni a hozam növelésére). Ezen a szakaszon tehát a költségfüggvény már konvex lesz, ami másodfokú függvénnyel jól közelíthetõ. A hazai burgonyapiacra kidolgozott, alább ismertetendõ modell esetében is ezt alkalmaztuk.

A hazai burgonyapiac

A fentiekben kifejtett elveknek megfelelõen dolgoztuk ki a hazai burgonyapiac modelljét. A burgonya sok tekintetben ideális a fenti gondolati keretek szempontjából. Termesztésének technológiája rendkívül egyszerû. A piacra való be- és kilépés, azaz a termesztés beindítása és felhagyása gyakorlatilag nem igényel külön költséget. Ennek is köszönhetõ, hogy a termelés zöme, nevezetesen legalább kétharmada, mindig is a kistermelõk kezében volt. Emiatt a kereslet-kínálat törvénye mindig érvényesült ezen a piacon, ami nem mondható el például a búzáról, amit a rendszerváltásig szinte kizárólag a nagygazdaságok termesztettek.

Feltettük, hogy létezik alsó és felsõ intervenciós ár, amelyek egymástól távol esnek.

A keresleti függvényt lineáris alakban közelítettük, azaz

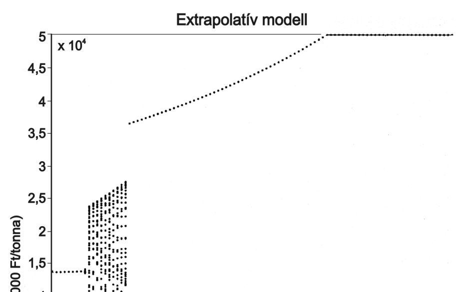
$$D\,(p_t) = d + Dp_t \qquad (7)$$

Itt *d* az a mennyiség, amennyit egy év alatt burgonyából el lehet fogyasztani 0 Ft/kg-os áron, azaz akkor, ha ingyen osztogatnák. Ez a rendelkezésre álló adatokból többszörösen ellenõrzött módon számolva 2 millió tonna, azaz fejenként évi 200 kg. A másik paraméter, *D*, negatív, hiszen minél magasabb az ár, annál alacsonyabb a fogyasztás. *D* a piacnak az árra való érzékenységét fejezi ki: minél nagyobb az abszolút értéke, annál jobban megváltozik a fogyasztás ugyanakkora árváltozás esetén. *D* értékét nehéz pontosan megbecsülni. Az biztos, hogy a [–100,0] intervallumba esik. Nagy valószínûséggel ez leszûkíthetõ a [–70,–30] tartományra.

A modell szintjén a nagytermelõket és a kistermelõket is külön-külön reprezentáltuk egyetlen „metatermelõvel". Megvizsgáltuk mind az adaptív, mind az extrapolatív árvárakozás esetét.

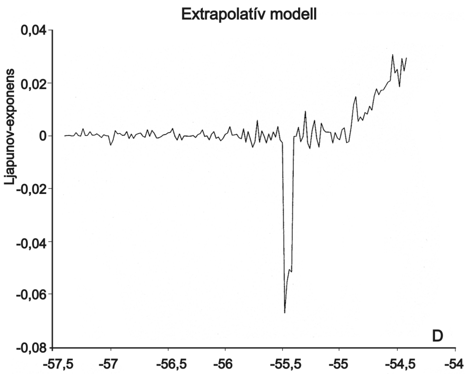
Az eredményeket ábrákkal, ún. *bifurkációs diagramokkal* szemléltetjük. A bifurkációs diagram egy dinamikus rendszer viselkedését mutatja, miközben a rendszer egy paramétere változik. Feltesszük, hogy a trajektória pontjai egyetlen számmal jellemezhetõk, ami, piaci árról lévén szó, esetünkben természetesen teljesül. A rendszer viselkedésén azt értjük, hogy milyen mozgásformát mutat. A bifurkációs diagram készítése azon a feltételezésen alapul, hogy egy bizonyos átmeneti, sokszor *tranziensnek* nevezett szakasz után (ez az rádióadó esetében a berendezés bemelegedésének idõszaka) a rendszer mozgása már azt a formát mutatja, ami az adott helyzetben, azaz a paraméterek adott értékei mellett jellemzi. Tehát ha a rendszer egy fixpontban van vagy ahhoz konvergál, akkor a tranziens idõszak után a rendszert gyakorlatilag mindig ugyanott látjuk, míg ha ciklizál, akkor elhanyagolható eltérésektõl eltekintve mindössze néhány pontban figyelhetjük meg. A bifurkációs diagram úgy készül, hogy szimuláljuk a rendszer mûködését, miközben feljegyezzük, milyen trajektóriát futott be a változtatandó paraméter minden egyes értéke mellett. Minden egyes trajektóriából elhagyunk egy legalább olyan hosszú szakaszt, amilyennek a tranziens periódust gondoljuk, és a trajektória megmaradt részét ábrázoljuk azon a síkon, ahol a vízszintes tengelyen a változtatandó paraméter értékét, a függõleges tengelyen a trajektória értékét tüntetjük fel.

Az *1. ábrán* a magyar burgonyapiac érzékenységét leíró *D* paraméter szerinti bifurkációs diagram látható. Figyeljük meg a [–58,–54] intervallumban található zavaros részt. Ebben a tartományban, amelyhez a valós érték nagyon közel lehet, a rendszer kaotikusan viselkedik. Ezt a megállapítást támasztja alá, hogy ugyanitt a Ljapunov-exponens pozitív, a trajektória dimenziója tört (*2.* és *3. ábra*).

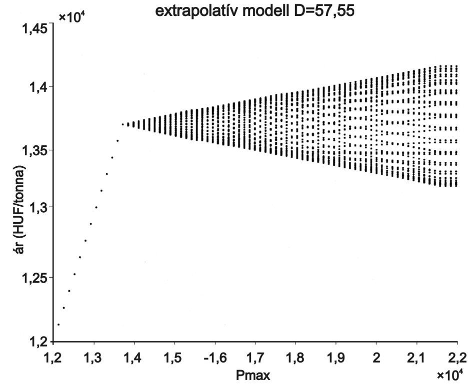


1. ábra • Az extrapolatív modell bifurkációs diagramja *D* szerint

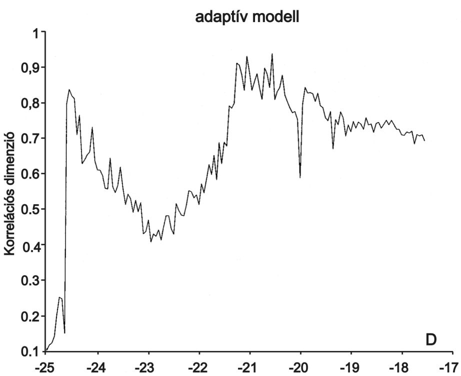
Az adaptív modellnek két kaotikus tartománya is van, azonban ezek valamelyest távolabb esnek attól, ahova a valódi piac *D* értéke várható. A piac azonban itt sem nyugodt, mert sok esetben ciklizál. Ahogy fentebb már említettük, instabil fixpont akkor is létezhet,



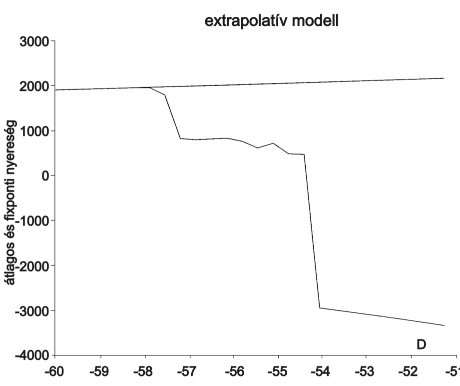
2. ábra • A Ljapunov-exponens az extrapolatív modell esetén



5. ábra. Bifurkációs diagram a felsõ intervenciós ár szerint az extrapolatív modell esetén



3. ábra • A trajektória dimenziója az adaptív modell esetén



4. ábra • Az átlagprofit és a profit a fixponti árban

ha a rendszer jellemzõ mozgásformája nem a fixpontban való tartózkodás. Érdemes összehasonlítani az adott trajektóriára jellemzõ átlagos hasznot az instabil fixpontban elérhetõ haszonnal. Esetünkben (*4. ábra*) mindig az utóbbi a magasabb. Ha tehát a kormányzat stabilizálná a piacot, akkor a termelõ hosszú idõ átlagában annyival több jövedelemre tenne szert, amennyi a kettõ különbsége.

Ki kell térni az intervenciós árak hatására. Ezt egy olyan bifurkációs diagrammal szemléltetjük (*5. ábra*), amelyen az alsó intervenciós ár rögzített, a felsõ pedig változik. Az ábrából az következik, hogy az intervenciós árat nagyon gondosan kell megválasztani, mert különben hosszabb távon éppen a stabilizálás céljából bevezetett korlát, az intervenciós ár generál káoszt.

A stabilizálás

Mivel a közelmúltban a hazai burgonyapiac nagyon nyugtalan volt, felmerül a kérdés, miként lehetne ezt vagy általában véve bármilyen piacot stabilizálni.

A stabilizálásnak több formája is elképzelhetõ. Ahogy említettük, ha az alsó és felsõ intervenciós ár nagyon közeli, akkor természetesen az ár alig mozoghat, azonban ez túl erõs állami beavatkozást igényel. Egy másik lehetõség volna az Európai Unióban is ismert lefölözéses rendszer. Ez úgy mûködik, hogy ha az ár túl magas, akkor a termelõk az elért eladási ár egy részét befizetik egy központi alapba, míg ha az ár túl alacsony, akkor ugyanebbõl az alapból kapnak támogatást. Ehhez nyilvántartott termelõk és teljesen nyilvános kereskedés szükséges, ami igen messze áll a jelenlegi magyar gyakorlattól.

Ezért a stabilizálásnak olyan lehetõségeit vizsgáljuk, amelyekben az állam piaci szereplõként viselkedik: ha túl magas az ár, akkor elad, például importból származó termékeket, ha túl alacsony, akkor felvásárol.

Ahogy fentebb már megállapítottuk, a stabilizálásnak akkor van értelme, ha az legfeljebb öt iteráción belül bekövetkezik. Könnyebbség viszont, hogy nem kell teljesen elérni a fixpontot, elegendõ csak megközelíteni, hiszen a mezõgazdasági árak valamennyire mindig bizonytalanok. Szimulációs kísérleteinkben ezt a határt 5 %-ban húztuk meg.

Láttuk, hogy a mûszaki tudományok a stabilizálás problémáját már korábban felvetették. Az ott használt módszerek egzakt matematikai alapokra, a káoszelméletre, illetve általánosabban a dinamikus rendszerek elméletére épülnek. Ez utóbbi elmélet szinte kizárólag a függvénynek a deriváltjából származó elsõrendû közelítését használja. A függvény deriváltja segítségével, amenynyiben egyáltalán a derivált létezik, felírható egy lineáris függvény, amelynek értéke abban a pontban, ahol a deriváltat vettük, megegyezik a függvény értékével, és az ilyen tulajdonságú lineáris függvények közül a lehetõ legjobban simul magához a függvényhez, ezért ebben az értelemben a függvény legjobb lineáris közelítése.

Mi két ismert módszert adaptáltunk a magyar burgonyapiac modelljére. Mindkettõ teljesítette a fent megfogalmazott követelményeket.

A lineáris összekapcsolás módszere

Nevezzük a rendszer *hibájának* egy adott pontban a trajektória eltérését az elérni kívánt fixponttól. Ha a trajektória pontjai számok, akkor a hiba is egy elõjeles valós szám. Ekkor a lineáris összekapcsolás módszerének lényege az, hogy a a rendszernek korábbi hibájától, illetve ha az új állapot több korábbi állapotától is függ, akkor korábbi hibáitól lineárisan függõ impulzust adunk, amely a trajektóriát a fixpont irányába téríti el. Ezt úgy kell tenni, hogy a hibákra felírható (egyébként csak közelítõ) egyenletnek megfelelõ dinamikus rendszernek 0 stabil fixpontja legyen, ami tehát azt jelenti, hogy a hibák 0-hoz konvergálnak.

Példaként ezt az elvet abban az esetben foglaljuk képletekbe, amikor a rendszer új állapota a két legutolsó állapotától függ, éppúgy, ahogy ez az extrapolatív modellben van.

Legyen p az az instabil fixpont, amelyben stabilizálni szeretnénk a rendszert, amelynek egyenlete az irányítás nélküli esetben

$$y_t = f(y_{t-1}, y_{t-2}), \qquad (8)$$

ahol feltételezésünk szerint f egy alkalmas, folytonosan differenciálható függvény. Mivel p fixpont,

$$p=f(p,p) \qquad (9)$$

Az irányított esetben természetesen a rendszer trajektóriáját nem a (8) egyenlet alapján kell számítani, hanem azon egyenlet szerint, amely már a rendszer említett, ε-nal jelölt hibáját is figyelembe veszi, azaz az

$$p_t=f(p_{t-1}, p_{t-2}) +K_1\varepsilon_{t-1}+K_2\varepsilon_{t-2} \qquad (10)$$

ahol általában

$$\varepsilon_t=p_t-p ,$$

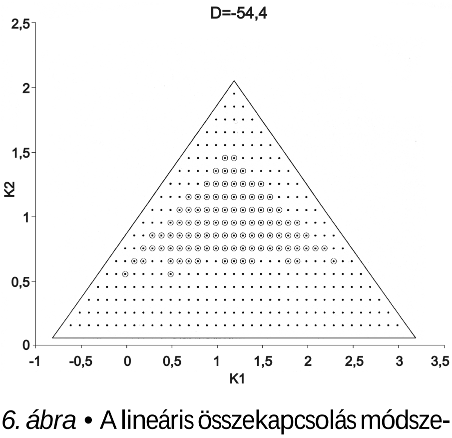
K_1 és K_2 állandók, továbbá az eltérõ trajektória miatt jelöltük a változót más betûvel. A (p,p) pontban legyen az f függvény két változója szerinti két parciális deriváltja f_1 és f_2. Ekkor az f függvénynek a szakasz bevezetõjében említett lineáris közelítését felhasználva az eredeti rendszer hibájára az alábbi dinamikus rendszert kapjuk:

$$\varepsilon_t=(f_1+K_1)\varepsilon_{t-1}+(f_2+K_2)\varepsilon_{t-2} \qquad (11)$$

Belátható, hogy a (11) dinamikus rendszernek a 0 akkor és csak akkor stabil fixpontja, ha az alábbi három egyenlõtlenség teljesül:

$$\begin{aligned} -(f_2+K_2) &< 1\,; \\ -(f_2+K_2) &> f_1+K_1-1\,; \\ -(f_2+K_2) &> -f_1-K_1-1\,. \end{aligned} \qquad (12)$$

Könnyen látható, hogy a (K_1=–f_1, K_2=1–f_2) pont mindig a feltételek meghatározta háromszög belsejében van, így (12) mindig kielégíthetõ, azaz a keresett irányítás mindig létezik (*6. ábra*). Nem ennyire egyszerû a helyzet, ha az eredeti rendszerben az új állapot három vagy több korábbi állapottól függ. Ekkor a (11) helyébe lépõ feltételrendszer elveszti linearitását, és egyre több egyenlõtlenséget tartalmaz.



6. ábra • A lineáris összekapcsolás módszere. A háromszög minden jelölt pontjában 5 iteráció alatt a rendszer az instabil fixpont 5 %-os környezetébe került. A háromszög közepén külön jelölt pontok esetében 10 iteráción belül az 1 %-os hibahatárt is sikerült elérni. D=–54.4.

Az állami beavatkozás nagyságát az

$$(f_1+K_1)\varepsilon_{t-1}+(f_2+K_2)\varepsilon_{t-2} \qquad (13)$$

érték határozza meg. Ennyivel kell eltéríteni az árat, amit a termék mennyiségére a piac érzékenysége alapján lehet átszámítani.

Az OGY-módszer

A három kidolgozó (Ott, Grebogi és Yorke, 1990) nevének kezdõbetûirõl elnevezett módszer eredeti megfogalmazásában jellegzetesen fizikai rendszerek stabilizálására való, ugyanis a szerzõk azt javasolják, hogy az irányítást csak akkor kapcsoljuk be, ha a trajektória éppen az elérni kívánt instabil fixpont közelében halad el. Azonban kiderült, hogy az eljárás máskor is alkalmazható, például akkor, ha a rendszer ciklizál, így tulajdonképpen meg sem közelíti a fixpontot.

Az OGY-módszer azt feltételezi, hogy a rendszer pillanatnyi állapotát nem pusztán a trajektóriája, azaz a múltja határozza meg, hanem ezen felül még bizonyos paraméterek is, melyek az ellenõrzésünk alatt állnak. Mûszaki berendezéseknél ilyen paraméter lehet valamely változtatható elektromos ellenállás vagy kapacitás pillanatnyi értéke. Most nem követeljük meg, hogy a trajektória pontjait egyetlen valós számmal lehessen jellemezni, hanem éppen ellenkezõleg, azokat az *m*-dimenziós euklideszi tér pontjainak tekintjük. Épp ezért feltesszük: elegendõ számú független paraméter van ahhoz, hogy ezek alkalmas megválasztásával a kívánt módon tudjuk irányítani a rendszert. Itt most nincs mód pontosan elemezni, hogy matematikailag mit jelent ez az utóbbi feltevés.

Legyen ($\bar{r}$, $\bar{p}$) az instabil fixpont és a hozzá tartozó paraméterérték, ahol a rendszert stabilizálni szeretnénk. Tegyük fel, hogy a paraméter nem változik. Ekkor dinamikus rendszerünk ugyanolyan paraméter nélküli rendszer, mint bármelyik, amelyrõl eddig beszéltünk. A rendszer egyenlete a rögzített paraméterérték mellett

$$r_t = f(r_{t-1},\bar{p}) \qquad (14)$$

míg általában

$$r_t = f\,(r_{t-1},p_t) \qquad (15)$$

mely utóbbi egyenlet azt jelenti, hogy menet közben kell meghatározni a paraméter mindenkori értékét. De térjünk vissza a (14) egyenlet meghatározta rendszerhez, amely, mint említettük, tulajdonképpen egy paraméter nélküli eset.

Egy dinamikus rendszernek valamely fixpontja (esetleg szûk) környezetében való viselkedését deriváltjának tulajdonságai határozzák meg. A (14) egyenletnek a derivált segítségével felírt lineáris közelítése

$$r_t \approx f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}) + J(r_{t-1} - \boldsymbol{r}) \qquad (16)$$

ahol J az f függvény r szerinti parciális deriváltjaiból alkotott *Jacobi-mátrixa,* melynek mérete $m \times m$. Az (16) egyenletbõl az látható, hogy a trajektória következõ pontjának távolsága a fixponttól hozzávetõlegesen

$$J(r_{t-1} - \boldsymbol{r}) \qquad (17)$$

ahol tehát a $r_{t-1} - \mathbf{r}$ vektor a pillanatnyi pont eltérése a fixponttól. Ezért a fixpont stabilitási tulajdonságait a

$$Jx \qquad (18)$$

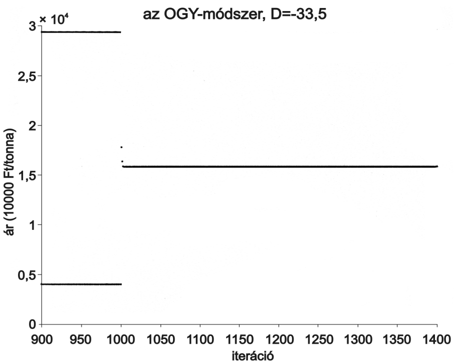
lineáris függvény határozza meg, amely a dinamikus változók terét önmagára képezi le. A Jx függvény egyes irányokba nyújthatja, másokba összehúzhatja a teret. Ha a λ rögzített szám és $x\,(\lambda)$ olyan vektor, hogy teljesül a

$$\lambda x(\lambda) = Jx(\lambda), \qquad (19)$$

akkor a λ számot a J mátrix *sajátértékének,* az $x\,(\lambda)$ vektort pedig a λ sajátértékhez tartozó sajátvektornak nevezzük. Ha λ abszolút értéke 1-nél kisebb, akkor a (18) lineáris függvény az $x\,(\lambda)$ irányában összehúzza a teret, ha pedig 1-nél nagyobb, akkor nyújtja.

A dinamikus rendszerek elméletében matematikailag nem teljesen korrekt módon feltészik, hogy a J mátrixnak annyi sajátvektora van, amennyi a mérete, azaz m. A feltevés alapja, hogy minden más eset együttes valószínûsége elhanyagolható. Ha a (18) függvény minden sajátvektor irányában összehúzza a teret, akkor a fixpont stabil. Káosz kialakulására akkor van mód, ha 1-nél kisebb és nagyobb abszolút értékû sajátérték is van. Ekkor létezik a tér két speciális, a tér „teljes terjedelméhez képest nagyon vékony" részhalmaza, az ún. *stabil* és *instabil sokaság*. Ha a trajektória éppen a stabil sokaság egy pontjába jutna – ennek valószínûsége 0 –, akkor ettõl kezdve a trajektória a fixpontba konvergálna. Ha pedig az instabil sokaság egy pontjába lépne, akkor távolodna a fixponttól. A fixpont körül a stabil és instabil sokaság jó közelítései az 1-nél kisebb, illetve 1-nél nagyobb sajátértékekhez tartozó sajátvektorok által kifeszített alacsonyabb dimenziós síkok. Ez adja a paraméter megválasztásának ötletét. Úgy kell ugyanis azt meghatározni, hogy a következõ pont közelítõ értéke a stabil sajátvektorok síkjába essen. Ettõl azt várhatjuk, hogy a trajektória a fixpont felé fog közelíteni.

A módszert az adaptív modellre alkalmaztuk sikeresen, mind a kaotikus mind a ciklizáló esetben (*7. ábra*).



7. ábra • Az ár alakulása az OGY alkalmazása esetén $D = -33.5$ mellett

Kulcsszavak: *dinamikus rendszer, piac, irányítás*

IRODALOM

Bacsi Zs., Kovács E., Lakner Z., Vizvári B. (2000). Empirical Analysis of Producers' Price Expectations. Central European Journal of Operations Research, **7,** 327–336

Fokasz Nikosz (1997). A társadalom göcsörtös fái? Bevezetés a fraktálhalmazok matematikájába. In: Fokasz Nikosz (szerk.) *Rend és káosz*. Replika könyvek 4., Replika Kör, Budapest

Hajdú Istvánné, Lakner Zoltán (2000). *Az élelmiszeripar gazdaságtana.* Mezõgazdasági Szaktudás Kiadó, Budapest

Kovács G., MureSannal, M., Vizvári B. (2001). A termelõi árvárakozások egy új megközelítési módjáról. Szigma, 1–2. sz.

Lakner Zoltán, Stummer Ildikó (1996). A magyar sertésvertikum ökonometriai modellezésének lehetõségei. 36. Óvári Tudományos Napok, Mosonmagyaróvár, 149–155

Mellár Tamás, Rappai Gábor (1993). *A fogyasztás alakulása a magyar gazdaságban.* Szigma, XXIV. 35–61

Nerlove, M. (1958). Adaptive expectation and cobweb phenomena. Quarterly Journal of Economics, **72,** 227–240

Ott, E., Grebogi, C., Yorke, J.A. (1990). Controlling Chaos. Physical Review Letters, **64,** 1196–1199

Vizvári B., Rémik A. (2002). Rejtett összefüggések a Budapesti Árutõzsde gabona szekciójának mûködésében, VIII. Nemzetközi Agrárökonómiai Tudományos Napok, Gyöngyös, 2002. március 26-27. (pótkötet, megjelenés alatt)