KÁOSZ A TÕZSDÉN?

Muraközy Balázs
közgazdász, BKÁE – e-mail: murakozy@rajk.bke.hu

Bevezetés

A tõzsdék mozgásának modellezése jövedelmezõ iparággá vált a világ legtöbb térségében. A tõzsdei szakértõk nagy számban találhatók meg a világ pénzpiacain. A tõzsdei elõrejelzések tömegei készülnek, a legtöbb magára valamit adó újság is közöl ilyeneket. Persze ezeknek az elemzéseknek a mélysége meg sem közelíti azokét, amelyeket a bankok vagy a brókercégek szakemberei nyújtanak a potenciális befektetõknek. Milyen elméleti háttér áll ezen elemzések mögött? Hogyan képzelik el a közgazdászok a pénzügyi piacok mozgástörvényeit?

A kérdésekre a válasz meglepõ lehet: a közgazdászok a legtöbbször úgy írják le a pénzügyi piacokat, mint amelyeken folyamatosan, egyenletesen növekszenek az árak, és erre a folyamatra teljesen véletlenszerû, külsõ sokkok rakódnak. A közgazdászok egy kisebbsége azt gondolja, hogy ez nem teljesen igaz. Véleményük szerint nemlineáris folyamatokkal ennél jobban lehet magyarázni a piac mozgását. A káoszelméletbõl ismert, hogy a nemlineáris differencia- és differenciálegyenletek nagyon bonyolult mozgásokat eredményezhetnek, és ezek sok szempontból közel állnak a valós idõsorokhoz. Ennek persze leginkább az az oka, hogy a nemlineáris egyenletekbõl sokkal többfajta van, mint a lineárisokból, ezért könnyebb a valósághoz közelebb állót találni közülük. És miért lenne a valóság lineáris?

Ebben a dolgozatban az a célom, hogy bemutassak egy ilyen, általam készített modellt, és legfõképpen, hogy ennek kapcsán érzékeltessem, hogy ha a pénzügyi piacokat vizsgáljuk, érdemes kaotikus modellekben is gondolkodni.

Az ilyen jellegû modellek érdekessége az, hogy jól mutatják a várakozások jelentõségét a közgazdaságtanban. A társadalomtudományokban a dinamikus jelenségek egyik nagyon fontos mozgatóereje az, hogy a különbözõ emberek várakozásai különbözõek és változnak. A társadalomtudományok e sajátossága jelentõsen befolyásolta a fejlõdésüket az utóbbi idõszakban. Nagyon jó példa erre a közgazdaságtanban az újklasszikus iskola megjelenése és sikere. Az újklasszikus iskola egyik kulcsfeltevése a racionális várakozások feltételezése.[1] Az újklasszikusok – elõdeikkel ellentétben – azt teszik fel, hogy az emberek várakozásaik kialakítása során nem követnek el szisztematikus hibát, vagyis várakozásaik a rendelkezésre álló információk mellett a jövõ legjobb becslései. Ez a feltevés radikálisan új eredményeket hozott, amelyekrõl máig folynak a viták.

Az elsõ fejezetben a sztochasztikus és a kaotikus modellek alkalmazhatóságáról lesz szó. A második fejezetben röviden leírok egy általam készített modellt a pénzügyi adatokra, amelyben a befektetõk várakozásai kétfélék lehetnek. Ez a modell kaotikusan viselkedik. A harmadik fejezetben a modell geometriai tulajdonságait vizsgáljuk, a negyedikben azt, hogy az egymást követõ hozamok függetlensége ebben a modellben is igaz. Az ötödik fejezet a modell elõrejelezhetetlenségének mérésérõl szól, amelyre a Lja-

[1] Az újklasszikusokról jó összefoglaló Hoover,1988

punov-exponenst használjuk. Az utolsó fejezet az összefoglalás.

Véletlenszerû és káoszelméleti modellek a pénzügyben

A pénzügyi irodalomban leginkább a véletlenszerû (sztochasztikus) modellek terjedtek el. Ezekben általában a vizsgált pénzügyi termék (részvény, kötvény, deviza stb.)[2] ára valamilyen trendet mutat, amely többé-kevésbé állandó, és nem függ a véletlenszerû hatásoktól. Mivel azonban a világban fokozatosan új információk jelennek meg, amelyek hatnak az adott termék árára, ezért egy véletlen hatás is jelentkezik. Vagyis a folyamat jellemezhetõ egy, a véletlentõl független (determinisztikus) exponenciális trenddel, és ettõl a részvény ára többé-kevésbé „elkóborol" attól függõen, hogy éppen milyen hírek érkeztek a vállalatról vagy a kamatlábak alakulásáról. Az ilyen mozgást *végtelen bolyongásnak* nevezzük. Ebben a modellben tehát a piac nem képes önmozgásra: például nincs spekuláció. Az emberek nem vesznek részvényt csak azért, mert azt gondolják, hogy annak az ára fel fog menni. Sõt, azért se vesznek részvényt, mert azt gondolják, hogy a többiek szerint fel fog menni az ára, és ezért fel fogják hajtani az árat. Az ár csak a kívülrõl érkezõ véletlen hatások miatt mozdulhat el. Vagyis el kell tekintenünk a várakozások problémájától: a részvények valóban annyit érnek, amennyit a vállalat ér, s ezt mindenki tudja is.

Ez a feltevés *a hatékony piacok feltevése*, amely azt mondja ki, hogy a piaci árban minden múltbeli információ megjelenik.[3] Vagyis mindent, ami az adott pillanatig történt, már feldolgozott a piac, megemésztettek a befektetõk és pontosan beépült az árba. Az eddigi történésekbe természetesen beletartozik az is, ami a vállalat vagy a gazdaság jövõbeli várható teljesítményérõl kiderült a múltban: az ár a vállalat értékének torzítatlan becslését adja. Ami ezután váratlanul történik, csak az változtathatja meg az árat, ezt viszont a múltbeli adatokból nem lehet semmilyen módon kikövetkeztetni, mert ha ez lehetséges volna, a befektetõk már kikövetkeztették volna, és beépült volna az árba.

Vizsgáljuk még tovább e feltevés jelentõségét! Mit tudunk meg az olyan jellegû állításokról, mint például: X részvény jelentõsen alulértékelt, mert a befektetõk bizonytalanok? Bizony ez a jól hangzó állítás és a hatékony piacok hipotézise kizárja egymást. A részvény nem alulértékelt, hanem a befektetõk bizonytalannak látják a vállalat jövõjét, *ezért* csak kevesebbet ér nekik. Nyilván felmegy a részvény ára, ha csökken a bizonytalanság, de nem tudhatjuk, hogy ez következik-e be vagy éppen az ellenkezõje. A papír árának bizonytalansága éppen akkora, mint az az eddigi információk szerint indokolt. *Vagy elemzõnk nem tartja igaznak a hatékony piacok hipotézisét*, vagy nem mondott jót. Hasonló jellegû állítások tömkelege olvasható a sajtóban, vegyük csak azt, hogy: a tegnapi árcsökkenés után korrekcióra számítunk. Csak nem a múltbeli adatok alapján próbál elemzõnk következtetni?

És mi a helyzet a spekulációval? Mennyire képesek a várakozások egy piacot mozgásban tartani? A történelem során nagyon sok példa volt olyan jellegû hegymenetekre, amelyeket az adott termék „belsõ értéke" nem indokolt. Talán elég csak a legújabb fejleményekre gondolni. Az internetes cégek részvényeinek ára hihetetlen magasba repült, miközben ezek a vállalatok igen veszteségesek voltak. Ezt a szárnyalást persze részben magyarázhatja az, hogy folyamatosan kerültek nyilvánosságra olyan információk, amelyek szerint az internettel foglalkozó vállalatok rendkívül nyereségesek lesznek a jövõben, és a papírok árában ez a hatás jelentkezett. Ez a magyarázat azonban nem na-

[2] A továbbiakban a rövidség kedvéért ezeket részvénynek fogom nevezni, de a modell alkalmazható a többi pénzügyi termékre is.

[3] Errõl a feltevésrõl jó összefoglaló: Malkiel, 1992.

gyon hihetõ, sõt amennyiben elfogadnánk is, akkor sem lenne egyszerû megmagyarázni a papírok árának nagyon gyors zuhanását. Nem derült ki, hogy az internet-technológia használhatatlan, vagy sokkal jobb lehetõségek vannak a helyettesítésére. Egyszerûen a piac túlértékelte a részvényeket, és ehhez nagyon erõsen hozzájárult a spekuláció.

Vagyis a piacok empirikus vizsgálata alapján úgy tûnik, hogy a múltbéli árakból lehet következtetni, és hogy vannak olyan múltbeli események, amelyeket a piac még nem vagy rosszul dolgozott fel, mint például az internet-részvények esetén. Ezt az érzésünket tudományos munkák is megerõsítik, amelyek azt vizsgálják, hogy a különbözõ pénzügyekkel foglalkozó vállalatok mennyire alkalmazzák azt a módszert, hogy a múltbeli árak alakulásából próbálnak a jövõbeli árakra következtetni (technikai elemzés). Például *Carter* és *Van Auken* (1990) a biztosítótársaságoknál vizsgált befektetés-elemzõket, akiknek 35 %-a használt technikai elemzést, és a megkérdezettek fontos elemzési eszköznek találták a technikai elemzést. *Taylor* és *Allen* (1992) egy Bank of England jelentés alapján azt írja, hogy a valutakereskedelemmel foglalkozók 90 %-a használ technikai elemzést. Ezek az adatok azt mutatják, hogy ez a módszer nem szorult ki a piacról, tehát nem mûködhet sokkal rosszabbul, mint a véletlen bolyongáson alapuló technika. Másrészt azért is fontos ez a megfigyelés, mert ha ilyen sok technikai elemzõ van jelen a pénzügyi piacokon, akkor õk jelentõsen részt vesznek az árak alakításában, vagyis olyan modellt érdemes építeni, amely ezt a hatást is tudja kezelni.

A technikai elemzés sikere azt mutatja, hogy nem csak véletlenszerû hatások öszszegzõdnek, hanem létezhet valamilyen függvény, amely alapján meg lehet jósolni a rendszer jövõbeli viselkedését, és ez a függvény akkor jobban is leírja a piacot, mint a véletlenszerû változat. Az ilyen felismerések miatt indult meg a kutatás abba az irányba, hogy lehetséges-e valamilyen módon olyan kaotikus egyenleteket találni, amelyekkel leírható a piac viselkedése. A kutatást nem kis várakozás elõzte meg, mert a pénzügyek terén a nagy elméleti eredmények gyakran nem csak tudományos, hanem komoly anyagi sikerrel is járnak. Éppen ezért érdemes alaposabban megvizsgálnunk azt, hogy a kaotikus modellek általában megfelelnek-e azoknak a feltételeknek, amelyeket a pénzügyi modellektõl elvárunk. A következõ fontos jellemzõket érdemes végiggondolni:

• A kaotikus rendszerek nem ismétlik önmagukat, tehát bonyolultabb a mozgásuk, mint a periodikus rendszereké. A pénzügyi idõsorok esetén ez a tulajdonság teljesen elfogadhatónak tûnik, nem jellemzõ az, hogy idõrõl idõre pontosan ugyanolyan alakzatok jelennének meg. Azzal viszont mindenképpen tisztában kell lenni, hogy a kaotikus rendszerekben idõrõl idõre ismétlõdhetnek, sõt gyakran ismétlõdnek is *hasonló* alakzatok, akárcsak a pénzügyi folyamatokban. A tõzsdei modellek vizsgálatában is van olyan példa, amelyben azt vizsgálják a szerzõk, hogy az általuk generált kaotikus idõsorban mennyire gyakran jelenik meg a fej és vállnak nevezett, a brókerek körében legendásnak számító alakzat, és hogy ez az alakzat tényleg képes-e elõre jelezni az utána következõ eseményeket.

• A kaotikus rendszerek másik fontos tulajdonsága a megjósolhatatlanságuk. Ez azt jelenti, hogy ha az adott rendszer viselkedését vizsgáljuk két egymáshoz közeli pontból indítva, akkor ez a két pont várható értékben exponenciális sebességgel távolodik egymástól. Ezért a kezdõfeltétel mérésében elkövetett kis hiba rövid idõ után hatalmas különbséget okozhat a megjósolt és a tényleges érték között, *még akkor is, ha a rendszert leíró egyenleteket pontosan ismerjük, és egyáltalán nem játszik szerepet a véletlen.* A megjósolhatatlanság alapvetõ jellemzõje a pénzügyi idõsoroknak, szokásosan éppen ez az egyik legfontosabb empirikus bizonyítéka annak, hogy a piacok hatékonyak, és ezzel indokolják a sztochasztikus leírás használatát. A sztochasztikus modell azonban képtelen annak a magyarázatára, hogy egészen rövid idõtávon miért figyelhetõ meg szignifikáns pozitív autokorreláció a pénzügyi idõsorokban. A kaotikus modellek esetében igen rövid idõtávon megjósolható a folyamat, és ez a tulajdonság egybevág a pénzügyi idõsorok empirikus tulajdonságával.

• A kaotikus mozgás geometriai struktúrája rendezett. Ez azt jelenti, hogy a modell független változói által kifeszített térben (fázistérben) a pontok egy határozott alakzatot (attraktort) rajzolnak ki, ilyen módon a fázistér nagy részét üresen hagyják, szemben a véletlenszerû folyamatból származó pontokkal, amelyek (ha elég sok van belõlük) az egész fázisteret egyenletesen kitöltik. Ez a kaotikus rendszerek egyik nagyon fontos tulajdonsága, és valamennyire mérhetõ is. A probléma itt az, hogy a valóságban létezõ zajos káosz esetében a zajos pontok „elrontják" az attraktort, amit emiatt nehéz megtalálni. Így is megmarad az a lehetõség, hogy megvizsgáljuk, mennyire egyenletesen oszlanak el a pontok a fázistérben, és ilyen módon bizonyítani lehet a kaotikus viselkedést.[4]

• A kaotikus mozgást általában egyszerû egyenletû mozgásként definiáljuk, vagyis kis szabadságfokú rendszerekben jellemzõ. A pénzügyi piacokra igen sok tényezõ hat, ezért nem biztos, hogy célszerû rájuk alkalmazni a káoszelméleti modelleket. Amennyiben csak néhány olyan faktor van, amely az adott termék árát alapvetõen befolyásolja, akkor ezek hatásának vizsgálatával már képesek lehetünk leírni a rendszer alapvetõ jellemzõit, amelyekre természetesen még rárakódik a többi – általunk figyelmen kívül hagyott – faktorból eredõ zaj. A kanonizált pénzügyi irodalomból sem hiányoznak az olyan modellek, amelyek egy pénzügyi termék viselkedését csekély számú faktorra vezetik vissza.[5] Mivel ezek a modellek nagyon elterjedtek, ezért ha a kaotikus modelleket pusztán amiatt elvetjük, hogy azok csak kis szabadságfokú rendszerek leírására alkalmasak, akkor bizony a többi modellt is el kellene vetni ugyanilyen alapon.

Összefoglalva tehát azt láthatjuk, hogy a kaotikus modellek sok szempontból jobban írhatják le a pénzügyi termékek árának dinamikáját, mint a véletlen bolyongást feltételezõk. Határozott hátrányuk viszont, hogy sajnos színt kell vallanunk arról, pontosan milyen folyamat alakítja a részvény árát, és a megfelelõ egyenletek kiválasztása közel sem triviális, fõleg, mert a kaotikus viselkedés kialakulásához szükséges az, hogy legalább egy egyenlet ne legyen lineáris.

Egy modell különbözõ várakozásokkal

A káoszelméleti modellek egy része abból indul ki, hogy a piacokon különbözõ várakozású szereplõk vannak. E modellek közé tartozik például *Chiarella* (1992) vagy *Brock* és *Hommes* (1998), *Hommes* (2001). Ebben a fejezetben egy olyan, általam készített modellt fogok bemutatni, amely *Gaunersdorfer, Hommes* és *Wagener* (2001) (GHW) modelljének módosított változata.

A modellben a szereplõk egyik része technikai elemzõ, a másik része fundamentális elemzõ. A technikai elemzõk feltétele-

[4] Ezen az elven mûködik a korrelációs dimenziót vizsgáló teszt. Ennek a tesztnek és több más, a nemlinearitást vizsgáló tesztnek a leírását megtalálhatjuk Barnett és Serletis (2000)-ben.

[5] Ezek közül a legfontosabb a CAPM, amelyben egy részvény hozamát három faktorra bontja: a kockázatmentes kamatlábra, a bétára és a piaci hozamra. Hasonló példa az arbitrált árfolyamok elmélete (mindkettõ részletes leírása: Bodie–Kane–Marcus, 1996) vagy például a hozamgörbe felbontása (Litterman és Scheinkman 1991).

zik, hogy az ár trendje a jövõben is folytatódni fog. Vagyis ha az ár +10-zel változott, akkor õk azt várják, hogy az ár a következõ idõszakban is emelkedni fog. A befektetõk másik része fundamentális elemzõ, õk ismerik a vállalat *fundamentális értékét,* amely vagyonának profittermelõ képességét jelenti. A fundamentális értéket olyan módon lehet megbecsülni, hogy a szakértõk megvizsgálják a vállalat könyveit, éves jelentését stb., ebbõl következtetnek a vállalat értékére. A fundamentális elemzõk ezeket a technikákat alkalmazva azt feltételezik, hogy a vállalat részvényeinek összértéke közeledni fog a cég fundamentális értékéhez. A két típusú elemzés költsége különbözõ. A technikai elemzés költsége általában alacsonyabb, mert ekkor csak a múltbeli árakat kell ismerni, amelyeket viszonylag olcsón meg lehet szerezni. A fundamentális elemzõk azonban a cégrõl hozzáférhetõ összes adatot megszerzik, amelyeket gondos és egyben költséges elemzésnek vetnek alá.

A modellben feltételezzük még azt is, hogy a különbözõ befektetõk számára a két elemzési technika költsége különbözõ. Ennek számos oka lehet: elképzelhetõ, hogy a befektetõk közül van, aki önmaga el tudja végezni a fundamentális elemzést, másoknak szakértõt kell felbérelniük. Az egyes befektetõk mérete is különbözõ lehet. Ha a fundamentális elemzés költsége nem függ attól, hogy a befektetõ hány részvényt vásárol, akkor a nagyobb befektetõk számára a fundamentális elemzés költsége egy részvényre jutóan alacsonyabb, mint a kisebb méretû befektetõ számára. Így a nagyobb befektetõk inkább hajlamosak elvégezni a költségesebb elemzést. Jelöljük a fundamentális elemzés és a technikai elemzés költségének különbségét az *i* befektetõ számára C_i-vel. Ez a fentiek alapján általában pozitív. Sõt, tegyük fel azt, hogy C_i eloszlása a befektetõk sokaságán normális, vagyis ezt a jól ismert haranggörbe írja le, amelynek csúcsa egy pozitív értéknél van. Természetesen más eloszlást is feltehetnénk, de a normális eloszlás a legkézenfekvõbb és a legegyszerûbben kezelhetõ, ráadásul elég könnyû elképzelni, hogy C_i eloszlása valóban ilyen.

A következõ megválaszolandó kérdés: mitõl függ, hogy a befektetõk mekkora része fogja az egyik, illetve másik típusú elemzést választani. A modell dinamikáját éppen ez a választás teszi érdekessé: rögzített arányok mellett nem alakulna ki kaotikus viselkedés. A befektetõk – logikus módon – azt az elemzési módszert választják, amellyel pontosabban meg tudják becsülni a jövõbeli árat, hiszen minél pontosabban képesek elõre jelezni az árakat, annál nagyobb profitra tehetnek szert. A pontosabb módszert onnan ismerhetik fel, hogy megvizsgálják, melyik elemzési módszer mûködött jobban a múltban, és bíznak abban, hogy a jövõben is ez a módszer lesz a hatékonyabb. Ez azonban nem jelenti azt, hogy mindenki ugyanazt az elemzési technikát fogja alkalmazni: mivel a két elemzés költsége a különbözõ befektetõk számára különbözõ, ezért a különbözõ emberek számára különbözõ mértékben kell hatékonyabbnak lennie a fundamentális elemzésnek, hogy azt tartsák jobbnak. Tegyük fel, hogy a *t-1* idõszakig az befektetõ $U_{1,t-1}$[6] profithoz jutott volna a fundamentális elemzés segítségével, ha nem vesszük figyelembe az elemzés költségét. Ez a profit természetesen attól függ, mennyire pontosan tudta a fundamentális elemzés elõre jelezni a múltbeli árakat. Amennyiben a befektetõ a technikai elemzést választotta volna, akkor – hasonlóképpen – profitot realizált volna. Mikor választja befektetõnk a fundamentális elemzést? Akkor, ha a költségeket is figyelembe véve több profitot ért volna el ezzel a módszerrel, vagyis ha $U_{1,t-1}-C_i \geq U_{2,t-1}$

[6] Ez nem függ az *i*-tõl, mert nincs benne a költségkülönbség, amely az egyetlen olyan eleme a modellnek, amely a különbözõ szereplõk számára különbözõ.

Ezeknek a befektetõknek az arányát pedig úgy kaphatjuk meg, hogy megnézzük, hány ember számára teljesül ez az egyenlõtlenség. A számuk annyi, ahány ember költsége a haranggörbén a $U_{1,t-1}$ - $U_{2,t-1}$-tõl balra van. E befektetõknek nagyobb a haszna a bonyolultabb elemzésen, mint ennek pótlólagos költsége. A fundamentális elemzést választó befektetõk aránya legyen $\hat{n}_{1,t}$, a technikai elemzést használóké pedig $\hat{n}_{2,t}$.

Emellett be kell vezetni még egy „stabilizáló egyenletet". Ez az egyenlet abból adódik, hogy amennyiben az ár nagyon eltér a fundamentálistól, akkor a befektetõk egy idõ után már nem hiszik el, hogy tovább is növekedhet ez a különbség. Ezért egyre több befektetõ érzi úgy, hogy bár elvileg érdemesebb lenne a technikai elemzést használnia, nem tartja valószínûnek a különbség további emelkedését, ezért mégis fundamentális elemzést alkalmaz. Vagyis például az internet-részvények esetén – amennyiben létezett ilyen stabilizáló hatás – amint a részvények ára egyre valószínûtlenebb magasságokba emelkedett, egyre több befektetõ várta azt, hogy a részvények ára visszatér fundamentális értéke közelébe, és ez erõsen hozzájárult a piac összeomlásához. Az egyenlet tehát olyan, hogy minél nagyobb az ár (négyzetes) eltérése a fundamentálistól, annál kevesebben választják a technikai elemzést:

$$n_{2t}=\hat{n}_{2t}\exp\left(-(p_{t-1}-p^*)^2/\alpha\right)$$
$$n_{1t}=1-n_{2t}$$

ahol p* a fundamentális ár, α egy paraméter, n_{1t} és n_{2t} a két típusú elemzést használó befektetõk aránya. Az α paraméter azt mutatja, hogy milyen gyorsan ijednek meg a befektetõk, amikor az ár eltávolodik a fundamentálistól.

Már csak annak vizsgálata van hátra, hogy milyen módon alakul az ár. Amennyiben a részvények mennyisége nem változik az adott idõszakban, vagyis a vállalat nem bocsát ki új részvényeket a vizsgált idõszakban, akkor a részvény árát csak a keresleti oldal befolyásolja, a kínálati oldalt figyelmen kívül hagyhatjuk. A részvények összkereslete egyenlõ a két típusú elemzést alkalmazó befektetõk kereslete inek összegével. Tegyük fel, hogy a fundamentális befektetõk által a $t+1$ idõszakra várt ár, $p^e_{1,t+1}$ és a technikai elemzõk által várt ár, $p^e_{2,t+1}$ a következõképpen alakul:

$$p^e_{1,t+1}=p^* + v\,(p_{t-1}-p^*)$$
$$p^e_{2,t+1}=p_{t+1}+ g\,(p_{t-1}-p_{t-2})$$

ahol v és g paraméterek. Mennyit hajlandók fizetni a befektetõk ezért a részvényért a t idõszakban? Annyit, amennyi pénzt a bankba téve p^e_{t+1} összeget kapnának a $t+1$ idõszakban.[7] Ha ennél kevesebbet érne nekik a részvény, akkor megérné a pénzük egy részét kivenni a bankból, és a részvénybe fektetni, amellyel magasabb hozamot érnének el. Ha ennél többet volnának hajlandók fizetni a részvényért, akkor pedig több pénzt lenne érdemes a bankba tenniük. Tehát a részvényért

$$\frac{p^e_{t+1}}{1+r}$$

-t érdemes fizetni, ahol r a kamatláb. Mivel az összkeresletet a két típusú befektetõ kereslete inek összege adja, a piaci egyensúly feltétele a következõ:[8]

$$Rp_t=\sum_{h=1}^{2} n_{ht}\,p^e_{h,t+1}$$

Ezzel a modell építését befejeztük. Érdemes azonban a jobb érthetõség kedvéért áttekinteni a modell idõbeli felépítését. A t idõszak elõtt a befektetõk elõször is eldöntik,

[7] Ez az érvelés nem igaz pontosan, mert a részvény kockázata nagyobb, mint a bankbetété. Ezért a használt kamatláb magasabb a banki kamatlábnál, viszont az érvelés ugyanez, csak figyelembe kell venni a befektetõk viszonyát a kockázathoz.

[8] Ha az adott évben a vállalat nem fizet osztalékot.

hogy ki melyik típusú elemzést fogja alkalmazni. Ehhez a döntéshez a *t* idõszak elõtti adatokat tudják vizsgálni, és eldöntik, hogy melyik fajta elemzést lett vona érdemes használniuk. Miután ezt mindenki eldöntötte, megbecsülik a *t* +1 idõszakra általa várt árat. Ezek alapján kialakul az összkereslet és a *t* idõszak ára.

A modell, mint említettem a GHW modell módosított változata. A különbség abban áll, hogy a befektetõk milyen módon döntik el azt, hogy melyik típusú elemzést alkalmazzák. GHW modelljében minden befektetõ számára ugyanakkora a két típusú elemzés költségének különbsége. Viszont náluk nem választja mindig mindenki azt a típusú elemzést, amely neki a múltban elõnyösebb lett volna, hanem csak fokozatosan váltanak. Ezt a feltevést nevezik korlátozott racionalitásnak. Természetesen a valóságban ez a feltevés reális lehet, azonban a szokásos pénzügyi irodalomban inkább a teljes racionalitást szokták feltenni. A nemlinearitás forrása a GHW modellben ezt a fokozatos váltást leíró ún. evolúciós egyenlet, az itt ismertetett modellben pedig a költségkülönbséget leíró, nemlineáris haranggörbe (integrálja). Az itt ismertetett modell fõ erénye az, hogy megmutatja: egy ilyen jellegû modell nem csak akkor viselkedik kaotikusan, ha feltesszük a korlátozott racionalitást, hanem e nélkül is – vagyis a kaotikus viselkedés egyszerûbb modellben is elõfordul. Mivel az ilyen heterogén költségek szinte mindenütt elõfordulnak a valóságban, ezért a kaotikus viselkedés is elõfordulhat. Ez a feltétel talán egyszerûbb, mint a racionalitás feltevése. Ami viszont sokkal fontosabb, az az, hogy empirikusan sokkal jobban ellenõrizhetõ: ha egy elemzési költségrõl kiderül, hogy nemlineáris, akkor azon a piacon, amelyet ez befolyásol elõfordulhatnak bonyolult dinamikák.

Vizsgáljuk meg, milyen elveken mûködik a modell. Amikor az ár a fundamentálishoz közel ingadozik, akkor megéri technikai elemzõnek lenni, mert ilyen módon elég pontosan meg tudja mondani az ezt használó befektetõ a következõ idõszak árát, és e pontosságért cserébe nem kell kifizetnie az elemzés költségét. Emiatt viszont kevés fundamentális elemzõ marad, nincs ami stabilizálja az árat, az tehát egyre távolabb kerül a fundamentálistól. Amint azonban a rendszer távolodni kezd a fundamentális ártól, megint csak egyre kevésbé éri meg a fundamentális elemzést használni, hiszen az ár ekkor távolodik *p**-tól, tehát egyre több lesz a technikai elemzõ. A technikai elemzõk nagy aránya miatt egyre távolabb kerül az ár a *p**-tól, ezért egyre több lesz a technikai elemzõ és így tovább. Ez a folyamat nem is állna meg, ha ennek nem vetne gátat a befektetõk félelme, hogy az ár teljesen elszakad a részvény valós értékétõl, konkrétan pedig a stabilizáló egyenlet mûködésbe lép: amint az ár már nagyon messze jár a *p**-tól, a technikai elemzõk aránya erõteljesen csökken, ezért az ár behúz a fundamentális közelébe. A modellel kapcsolatban három dolgot érdemes hangsúlyozni:

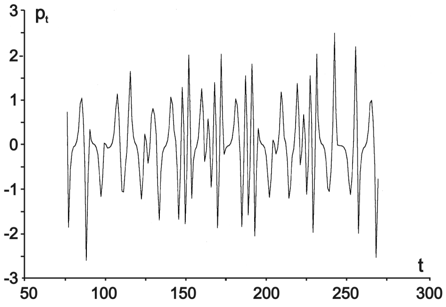
• A modellben eddig felírt formájában semmilyen véletlenszerû elem nincs. Vagyis a modell által – a késõbbiekben bemutatott – bonyolult viselkedés elõáll anélkül, hogy akár új információ kerülne napvilágra (a rendszer által generált determinisztikus folyamatoktól eltekintve) vagy valamilyen más külsõ hatás érné azt. Tehát az ilyen jellegû determinisztikus, kaotikus rendszerek képesek a valóságos folyamathoz viszonylag hasonló alakzatokat produkálni, részben ez indokolja felhasználásukat a pénzügyekben.

• A modellben az ár alakulásának alapvetõ mozgatórugóját a várakozások képezik. Nem igazán szokásos, hogy a várakozások önmozgása ennyire mozgassa egy modellben az árakat, viszont a pénzügyi piacokon ez nem elképzelhetetlen, mint erre az internet kapcsán is utaltam. A modellben szereplõ várakozások olyan értelemben nem racionálisak, mint ahogy ezt az újklasszikus közgazdaságtan használja, vagyis nem felelnek meg annak a követelménynek, hogy nagyságuk megegyezzen az adott ár várható értékével. Az újklasszikus típusú befektetõk figyelembe vennék azt is, hogy a következõ idõszakban a többi befektetõ várhatóan milyen módon alakítja várakozásait. Elsõ látásra úgy tûnik, mintha az ilyen várakozással rendelkezõ befektetõk kiszorítanák a többieket a piacról. Azonban *Brock* és *Hommes* (1997) egy egyszerû kereslet-kínálat modellben bemutatja, hogy a racionális várakozásokat alkalmazó termelõk nem szorítják ki a naiv várakozásúakat, vagyis azokat, akik azt feltételezik, hogy az ár változatlan marad. A racionális várakozásokkal van azonban egy filozófiaibb jellegû probléma is: a kaotikus rendszerek alapvetõ tulajdonsága a megjósolhatatlanság, ezért nem feltételezhetjük azt, hagy a benne szereplõk ki tudják számítani a következõ idõszakok árait.

• A harmadik megjegyzés az elõzõhöz kapcsolódik. Az ilyen típusú modellek létrehozásának egyik célja az volt, hogy be lehessen mutatni: nem törvényszerû a technikai elemzõk kiszorulása a piacról. Az általam ismertetett modell vizsgálata jól mutatja ezt. Észre kell venni azonban azt is, hogy bizonyos értelemben ez a demonstráció túl jól sikerült: a stabilitási feltétel nélkül bizony a rendszer legtöbbször felrobban, vagyis az ár végtelenre nõ, miközben a chartisták aránya 1 lesz.

Most pedig vizsgáljuk meg azt, konkrétan milyen az ár alakulása a modellben (*1. ábra*). Az ábrán nem az ár konkrét értéke látható a függõleges tengelyen, hanem az ár és a fundamentális ár különbsége.

Láthatjuk, hogy e paraméterértékek mellett a mozgás kaotikus: nincs ciklus, a folyamat bonyolultabb, mint amit az egyszerû determinisztikus mozgásoktól megszoktunk. Azonban elég komoly szabályosság figyelhetõ meg: a ciklusokhoz hasonló, viszonylag szabályos árhullámzás látható, amely viszont igen kiszámíthatatlan. Az ár viszonylag hosszabb idõt tölt a fundamentális ár közelében, majd egy öngerjesztõ spekulációs folyamat eredményeképpen általában eléggé elrugaszkodik tõle. Láthatjuk, hogy bizonyos ponton, a fundamentális ártól valamiféle kritikus távolság után a folyamat meredeksége erõsen megnõ, majd csúcspontot ér el. Itt lép igazán mûködésbe a stabilizáló egyenlet: a befektetõk úgy érzik, hogy már nagyon elrugaszkodott az ár a vállalat eszközeinek valós értékétõl, és egyre többen várják az ár visszatértét a fundamentálishoz, ami igen gyorsan be is következik. A dinamika tehát bonyolult és kiszámíthatatlan, akárcsak a pénzügyi piacokon.



1. ábra • Az ár alakulása a heterogén szereplõs modellben, ha g = 2,8, szigma c =0,1 a = 0,5 szigma = 2,25, m = 1, v = 0,3, éta = 0, alfa = 0,8

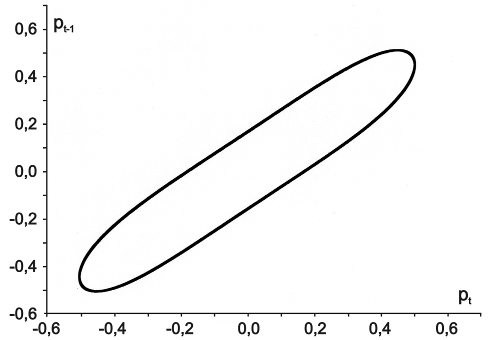
Érdemes még egyszer hangsúlyozni, hogy ezt a bonyolult mozgást egy olyan modellben figyelhetjük meg, ahol egyáltalán nincsen véletlenszerûség. A valóságban a pénzügyi piacokat természetesen érik véletlenszerû külsõ sokkok, és az ezek által generált zaj beépítése a modellbe még inkább kiszámíthatatlanná teszi a viselkedését, és élethûen szimulálja a piac mûködését.

A másik fontos dolog az, hogy a kezdõfeltétel kis különbsége teljesen megváltoztathatja az idõsor viselkedését. Ez nagyon nagy hatással van a pénzkeresési lehetõségekre: mivel a kezdõfeltételt sohasem lehet pontosan megfigyelni, még ha tökéletesen ismerjük is az egyenletek alakját, akkor sem tudjuk hatékonyan megjósolni a jövõbeli árat. A kezdõfeltétel ismeretének hiánya adódhat a tõzsdéken alkalmazott kerekítésekbõl, abból, hogy a papírral csak régen kereskedtek, és ezért nem tudjuk megfigyelni az aktuális árat vagy abból, hogy a piac nem tökéletes, és egy nagyobb tétel eladása nagy hullámzásokat okozott. Mindezek miatt, még ha ismernénk is a tökéletes modellt, azzal se mennénk sokra. Nem beszélve arról, hogy amennyiben valaki felfedezné a mozgásegyenletet, akkor – amennyiben az illetõ megpróbálna pénzt keresni – saját magatartásával megváltoztatná a nagy erõfeszítéssel felfedezett egyenletet. Ezen okok miatt egy kaotikus modellre is teljesül a megjósolhatatlanság, amelybõl a pénzügyi piacok hatékonyságának hipotézisét le szokták vezetni.

Az attraktor

A kaotikus mozgások vizsgálatára azonban nem a fentihez hasonló egydimenziós ábrák a legjobbak, hiszen ezeken nem látható különösebb struktúra. Ezek helyett célszerûbb a mozgást a *fázistérben* megvizsgálni, amelynek tengelyeit a rendszer különbözõ független változói adják. A fázistérben vett ábra vizsgálatakor megállapítható a rendszer dinamikájának típusa. Elképzelhetõ, hogy a rendszernek stabil fixpontja (spirális fixpont) van, ekkor a rendszer a fixpont felé történõ mozgást végez. Ez a fázistérben is látható, ahol e felé az egy pont felé halad a folyamat, mégpedig spirál alakban. A modellünkben ez például akkor következik be, ha (a többi paraméter *1. ábrán* látható értékei mellett) g=1 esetén vizsgáljuk a rendszert, tehát akkor, ha a technikai elemzõk azt várják, hogy az árváltozás pontosan akkora lesz, mint az elõzõ idõszakban. Ekkor a rendszer konvergál a fundamentális árhoz, és majdnem mindenki technikai elemzést használ, mert az jól mûködik ilyen dinamika mellett, ráadásul olcsóbb is.

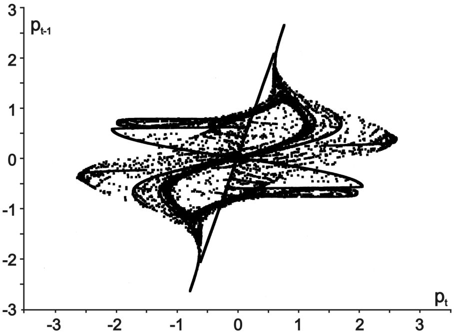
A másik lehetõség az, hogy a rendszer periodikus viselkedésû, vagyis ciklus vagy kváziciklus alakul ki. Ciklus esetén a fázistérben csak néhány pontot látunk, kváziciklusnál pedig egy összefüggõ alakzatot. Erre példa a *2. ábra*.



2. ábra • Kváziciklus a heterogén szereplõs modellben. (A paraméterek mint az *1. ábrán,* csak g=1,1)

A fázistér vizsgálata akkor válik igazán érdekessé, ha az adott paraméterértékek mellett a rendszer kaotikusan viselkedik. Ebben az esetben – ha a fázistérben elég sok pontot ábrázolunk – kirajzolódik a rendszer dinamikájára jellemzõ különös attraktor. Ez az objektum fraktál, ami azt jelenti, hogy önhasonló, vagyis bármilyen nagyításban hasonló jellegû struktúra rajzolódik ki. Ez persze praktikusan az ábrázolt pontok és felbontás végessége miatt nem teljesen igaz, de az attraktor nagyításával meggyõzõdhetünk arról, hogy azt ez a szerkezet jellemzi (*3. ábra*).

Modellünkben négy független változó van, vagyis a *t* idõszak ára az elõzõ négy ártól függ. Azért ilyen soktól, mert amikor a befektetõk eldöntik, melyik típusú elemzést használják, akkor azt mérlegelik, hogy legutóbb melyik vált be a legjobban. Ennek során megvizsgálják az elõzõ idõszakra becsült árat, amely az azelõtti két vagy három ártól



3. ábra. Különös attraktor vetületi képe. (A paraméterek mint az elsõ ábrán.)

függ, attól függõen, hogy technikai vagy fundamentális elemzésrõl van szó. Tehát a fázisteret ez a négy ár (mint dimenzió) feszíti ki, és ebben kellene vizsgálni az attraktort. Mivel azonban ezt lehetetlen ábrázolni, meg kell elégednünk kétdimenziós képével.

Az attraktor szabályossága mellett másik fontos tulajdonsága az, hogy véges területen helyezkedik el ez a kétdimenziós vetülete, és az egész attraktor is korlátos részét foglalja el a négydimenziós hipertérnek. Ez az eredmény nem az ábra pontatlanságából következik, hanem a kaotikus mozgások univerzális tulajdonsága. Esetünkben, a pénzügyi piacokon ez azt jelenti, hogy az ár nem mozdulhat el egy véges tartományból, ami azzal magyarázható, hogy a stabilizáló egyenlet bizonyos eltérésnél már mindig visszahúzza az árat a fundamentális ár közelébe. Ennek alapvetõ jelentõsége van: amennyiben modellünk igaz volna, akkor lenne olyan nagyságú árzuhanás vagy áremelkedés, amelynél nagyobb biztosan nem következne be. Egy ilyen állítás beigazolódása jelentõsen átalakítaná a világ pénzpiacait (ezzel valószínûleg meg is szûnne az érvényessége).

Vegyük észre azonban azt a két alapelvet, amelyeket fel kellett állítani ennek az állításnak a kimondásához. Az egyik az, hogy a fundamentális ár változatlan. Amennyiben a fundamentális ár változhat, akkor az ár ennek megfelelõen változik. A vállalati csõdök túlnyomó többségében a fundamentális ár is el szokta érni a nullát, bár ezt a folyamatot gyorsíthatja a befektetõi pánik. Ha az ár eltérését a fundamentálistól egy tisztán determinisztikus kaotikus folyamat írja le, és a fundamentális ár is egy determinisztikus folyamatot követ, akkor viszont még mindig igaz az, hogy ez az eltérés csak egy korlátos halmazon vehet fel értékeket.[9]

A másik feltevés nagyobb problémát okoz: amennyiben a modellben véletlenszerûség van, akkor ez bármennyire[10] kilendítheti az eddigi véges tartományból az árat. Ekkor már nem tudjuk megjósolni az áresés vagy áremelkedés legnagyobb mértékét.

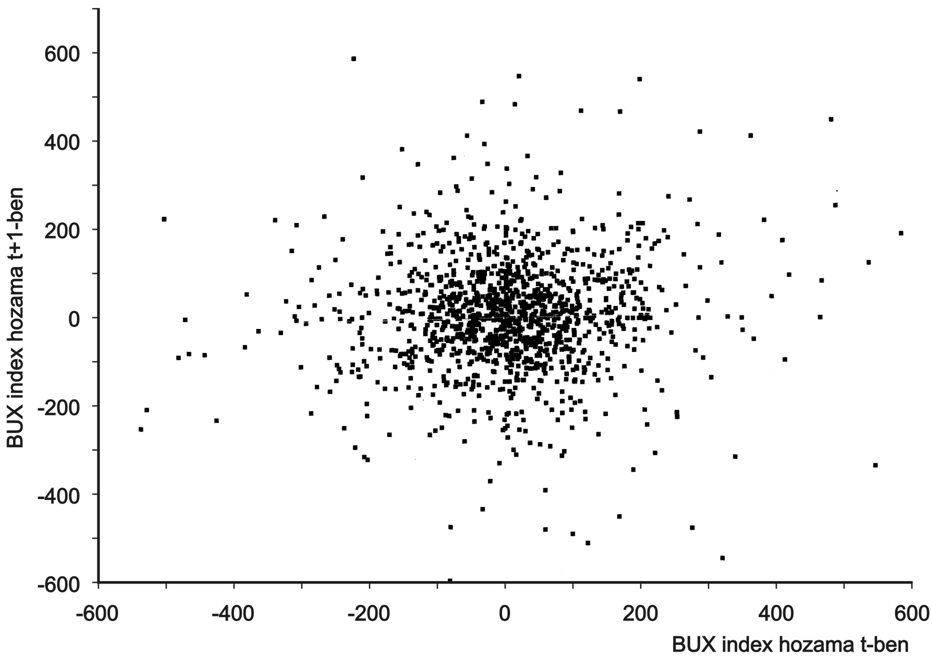
A valóságos tõzsdei adatokat is lehet ugyanilyen koordináta-rendszerben ábrázolni, és összevethetjük õket az attraktorainkkal. Nem meglepõ, hogy a valós adatok egy elkent pontfelhõt rajzolnak ki, amelyben nyoma sincs az ilyen jellegû szabályosságnak. Ha a modellünkbe zajt is helyezünk, akkor viszonylag kis véletlenszerûség hatására a valóságos adatokhoz teljesen hasonló pontfelhõket kapunk. Ez az eredmény egészen egyszerûen elõáll akkor is, ha egy teljesen egyszerû zajból generálunk idõsort. Ezért legfeljebb azt lehet megállapítani, hogy a zajos káoszt és az egyszerû zajt empirikusan gyakorlatilag lehetetlen egymástól megkülönböztetni.

A hozamok függetlensége

A pénzügyi piacok fontos jellemzõje az, hogy az egymást követõ hozamok függetlenek egymástól. Ez azt jelenti, hogy amennyiben

[9] Amennyiben a fundamentális ár véletlenszerûen változik, akkor ez a várakozásokon keresztül beviszi a zajt a fundamentális ártól való eltérést leíró folyamatba is.

[10] Hogyha a tartója nem véges. Például a [0,1] intervallumon egyenletes eloszlású zaj esetén még mindig igaz az, hogy az attraktor korlátos halmaz része. Azonban például a normális eloszlású zaj esetén – melynek tartója nem véges – ez már nem igaz.



4. ábra • A BUX-index napi hozamai 1997 február – 2002 február (Ft)

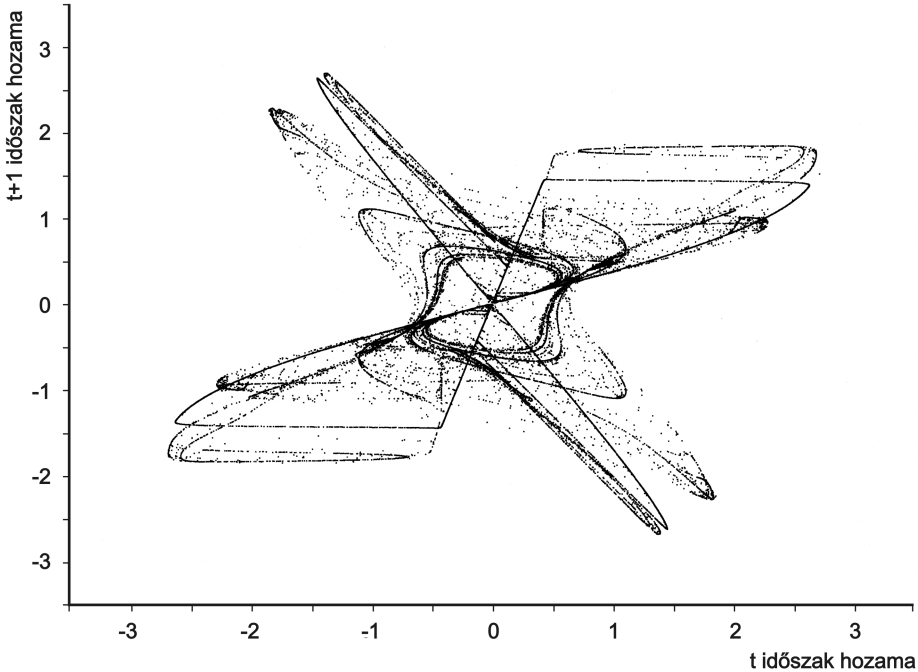
ma felmegy X részvény ára (vagyis X részvény hozama pozitív), abból semmilyen következtetést sem tudunk levonni arra nézve, hogy holnap milyen lesz az X részvény hozama. Ez az állítás a hatékony piacok hipotézisébõl következik. Gondoljuk meg, hogy mi történne akkor, ha tudnánk, hogy amennyiben X részvény ára felmegy, akkor 75 % valószínûséggel holnapután is fel fog menni. Mindenki rohanna vásárolni az X részvénybõl, amelynek még holnap felmenne az ára. Ez a folyamat éppen addig tartana, amíg a részvény ára olyan magas nem lesz, hogy már nem éri meg belõle venni. Ez pedig pont akkor fog bekövetkezni, ha már éppen 50 % annak a valószínûsége, hogy a részvény ára felmegy holnapután. Vagyis minden ilyen megfigyelt összefüggés azonnal eltûnik, mert a befektetõk rohama megszünteti az ilyen profitlehetõségeket.

Ez a függetlenség bizonyítható a következõ módon.[11] Vegyünk egy olyan ábrát, amelyen a vízszintes tengelyen a mai, a függõlegesen pedig mindig az egy nappal késõbbi hozam van rajta. Erre példa a valóságból a *4. ábra*, amelyen a BUX-index napi hozamait láthatjuk 1997 februárja és 2002 februárja között. A hozamot egyszerûen úgy számoltam, hogy kivontam egymásból a két nap BUX-indexét.[12]

Láthatjuk, hogy a ponthalmaz az origó körül sûrûbb és középpontosan szimmetrikus az origóra. Éppen ilyen alakzat jellemzi a véletlenszerûséget. Amennyiben igaz lenne az, hogy az emelkedést általában emelkedés követi, akkor a pontoknak a jobb felsõ síknegyedben kellene koncentrálódniuk, mert az egymást követõ napok hozamai po-

[11] Az ábrakészítés e módját Száz 1999-ban találhatjuk meg,185–188. o.

[12] A hozamot százalékban szokták számolni, de mivel a modell a fundamentális ártól való eltéréseket mutatja, ott százalékkal nincs értelme dolgozni, ezért választottam itt is ezt a módot.

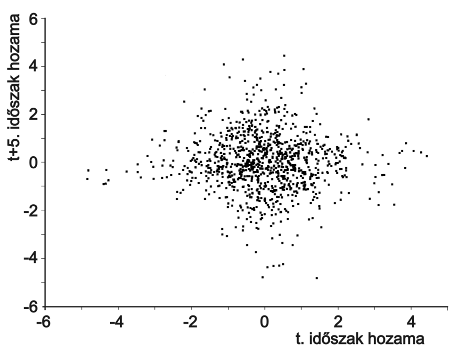


5. ábra • A hozamok ábrája a zaj nélküli modellben. (A paraméterek mint az elsõ ábrán.)

zitívak. Amennyiben az lenne igaz, hogy a csökkenést vagy emelkedést korrekció követi, akkor pedig a bal felsõ és a jobb alsó síknegyedben találnánk több pontot. Az ábrán azonban a pontok eloszlása egyenletes a különbözõ síknegyedek között, ami támogatja a hatékony piacok hipotézisét. E meglátást egzaktabban is alá lehet támasztani azzal, hogy egy egyenest illesztünk a pontfelhõre. Amennyiben az egyenes meredeksége 0, akkor nincs lineáris kapcsolat az egymást követõ árak között. Az ábrán láthatjuk, hogy az illesztett egyenes enyhén pozitív meredekségû, azonban statisztikailag ez a meredekség nem elég nagy ahhoz, hogy elfogadhassuk azt a feltevést, hogy nullától különbözik.[13] Hangsúlyozni kell azonban, hogy ez az eredmény a napi hozamokra vonatkozik, az ennél rövidebb távú (néhány perces) hozamokra már van összefüggés.

[13] A lineáris regresszióban a meredekség szignifikanciaszintje: p=0,27

Vizsgáljuk meg ezután, hogy a modellünk által generált idõsor milyen alakzatot hoz létre! (*5–6. ábra*)



6. ábra • Az 5-tel késleltetett hozamok ábrája a zajos modellben. (A paraméterek mint az elsõ ábrán.)

Az *5. ábrán* a tisztán determinisztikus esetet látjuk. Ezen az ábrán határozott szerkezet rajzolódik ki, amely egy fraktál képe. Ez érthetõ, mert a különbözõ árak közötti viszony egy hasonló jellegû alakzatot rajzol ki a *3. ábrán,* ezért ezeknek az áraknak a különbsége is fraktál. Az alakzatra illesztett egyenes szintén kis pozitív meredekségû, de ez sem szignifikáns, ha a *4. ábrán* látható adatokhoz hasonló számú adatot generálunk. Ez a határozott alakzat azonban empirikusan elfogadhatatlan.

A helyzet némileg javul, ha a zajos modellt is megvizsgáljuk. A zaj additív és normális eloszlású nulla várható értékkel és 0,3 szórással. Mivel a BUX-indexnél is napi hozamokat vizsgáltunk, érdemes több idõszakot tekinteni, ezért 5 idõszakos késleltetést ábrázoltam. Az ábrában még felfedezhetõ valamilyen minta, a fraktál valamilyen halvány lenyomata. Ettõl függetlenül egy ilyen jellegû ábra gyakorlatilag megkülönböztethetetlen a *4. ábrától.*

Összességében tehát modellünkben az eggyel késleltetett hozamok függetlenek. Ez a függetlenség nem biztos, hogy a hatékony piacok hipotézisét támasztja alá, elképzelhetõk olyan káoszelméleti modellek is, amelyek ilyenek. A zajos modellben hosszabb idõtávon a valóságtól nyilvánvalóan idegen, tiszta fraktálszerkezet is eltûnik.

Megjósolhatatlanság

A kaotikus modellek egyik legfontosabb tulajdonsága a megjósolhatatlanságuk. Ez azt jelenti, hogy ha a kezdõfeltétel megállapításában egy kicsit tévedünk, akkor néhány idõszak után az ebbõl adódó becslési hiba nagyon gyorsan nõ. Itt azt fogjuk vizsgálni, milyen módon mérhetõ ennek foka, és hogy modellünkben milyen nagyságrendû ez.

A megjósolhatatlanság jellemzésére használják a Ljapunov-exponenst (λ). A kaotikus rendszerekben két egymáshoz közeli pont távolsága exponenciálisan nõ az idõben. Amennyiben a két kezdeti pont x_0 és y_0, akkor ezek távolsága *t* idõ elteltével (vagyis *t* darab iteráció után):

$$|x_t - y_t| = |x_0 - y_0| e^{\lambda t},$$

ahol λ az ehhez a pontpárhoz tartozó lokális Ljapunov-exponens.

A Ljapunov-exponens értéke bizonyos esetekben kiszámítható analitikusan, de a legtöbb káoszelméleti modellnél nem. Ilyenkor szimulációt kell alkalmazni. Veszünk két egymáshoz nagyon közeli pontot a rendszer hosszú távú viselkedését leíró attraktoron, s megvizsgáljuk, hogy egy bizonyos idõszak után mennyire kerülnek távol egymástól. Mikor ez megvan, akkor a fenti képlet segítségével kiszámíthatjuk a Ljapunov-exponenst.

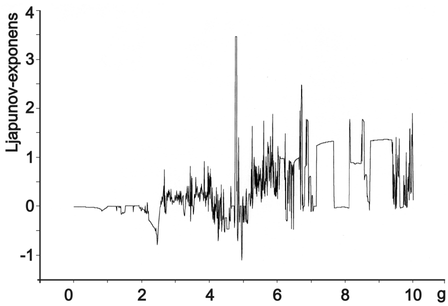
Nekünk azonban az adott paraméterekhez tartozó, adott rendszert leíró átlagos mennyiségre van szükségünk, ezért a lokális Ljapunov-exponensek átlagából kapjuk $\bar{\lambda}$ átlagos Ljapunov-exponenst. Ezt pedig úgy számíthatjuk ki, ha az attraktor sok különbözõ pontjából elindítjuk a rendszert, és az így kapott Ljapunov-exponensek számtani átlagát tekintjük.

A Ljapunov-exponens kiszámítása az általános módszer annak meghatározására, hogy az adott rendszer kaotikus-e a vizsgált paraméterértékek mellett. A kaotikus rendszerben a pontok exponenciálisan távolodnak, tehát ezekre szükségképpen $\bar{\lambda}=0$. Ez a kaotikus rendszerekre általában igaz. Ezért amennyiben ezt más vizsgálatok is megerõsítik,[14] akkor a Ljapunov-exponens elég biztosan jelzi, hogy mely paraméterértékeknél jellemzõ a káosz. Az általunk vizsgált modellekben szerencsére ez a helyzet, mert a stabilizáló egyenlet miatt biztosak lehetünk abban, hogy a rendszer nem száll el.

Vizsgáljuk meg az átlagos Ljapunov-exponenseket mutató ábrát! A *7. ábrán* a *g* paraméter különbözõ értékeire vizsgáljuk az átlagos Ljapunov-exponens értékét.

Természetesen a többi paraméterre is érdemes lehet megvizsgálni egy hasonló ábrát, sõt esetleg több paraméterre egyszerre egy 3 dimenziós ábrát. Ennek azonban ese-

[14] Mint például az attraktor vagy a bifurkációs diagram vizsgálata



7. ábra • A Ljapunov-exponens értéke *g* függvényében. (A paraméterek mint az elsõ ábrán.)

tünkben nem túl nagy a jelentõsége. Az ábrán láthatjuk, hogy bizonyos régiókban teljesül a káosz feltétele, például az általunk eddig általában vizsgált g = 2,8 értékre. A kaotikus tartomány nem egybefüggõ terület, hanem szigeteket alkot a paramétertérben. A kaotikus régiókban tipikusan 0 és 3 között van a Ljapunov-exponens értéke, ami azt jelenti, hogy ha például $p^{e}_{1,t+1}$, akkor egy idõszak alatt -szeresére növekszik a két pont közötti távolság, vagyis tíz idõszak alatt e^{10}=22026-szorosára növekszik a kezdeti megfigyelési hiba a teljesen determinisztikus rendszerben. Az azért megnyugtató, hogy az alacsony, a valóságban inkább megjelenõ paraméterértékekre a rendszerben vagy nincs káosz, vagy pedig nem ennyire nagy a Ljapunov-exponens. Ez a megjósolhatatlanság tényleges mértéke, amibõl látjuk, hogy egy olyan idõtávon, amely például egy opció lejárata, gyakorlatilag fogalmunk sem lesz arról, mekkora lesz az értékpapír ára, csak abban lehetünk biztosak, hogy a pont az attraktoron (vagy ahhoz nagyon közel) fog elhelyezkedni.

Összefoglalás

A dolgozat egy olyan modellt mutatott be, amely a pénzügyi piacokon jól alkalmazható. Sok empirikus és elméleti tény szól amellett, hogy a véletlen bolyongást feltételezõ modellek nem írják le tökéletesen a pénzügyi piacok viselkedését. A sztochasztikus modellek alkalmazását általában az indokolja, hogy az árak megjósolhatatlanok. A káoszelméleti modellekre is igaz ez, és a többi megfigyelhetõ jelenséget is reprodukálni lehet velük. Az ilyen modellek által elõállítható alakzatok között vannak tényleg reménykeltõek is, amelyeket érdemes továbbfejleszteni. A káoszelméleti modellek mellett szól az is, hogy ezek nemlineáris folyamatokat tételeznek fel, míg a hagyományos pénzügyi modellekben egy lineáris folyamatra rakódik rá a zaj. Nem valószínû, hogy bármi is biztosítaná, hogy a pénzügyi folyamatok lineárisak legyenek, sõt ez ellentmond a bonyolult rendszerrel kapcsolatos intuíciónknak is.

A nemlinearitás létezését nem sikerült még minden kétséget kizáróan bizonyítani a pénzügyi piacokon, bár számos teszt – és ezeket alkalmazó – tanulmány készült ebbõl a célból. A probléma valószínûleg nem az, hogy nem létezik nemlinearitás, hanem az, hogy a zajos kaotikus modelleket szinte lehetetlen megkülönböztetni a tisztán csak zajos modellektõl. Ez a probléma feltehetõen nem fog megoldódni a közeljövõben.

Káoszelméleti modellekkel foglalkozni ezért egyelõre inkább elméleti, mint gyakorlati szempontból érdekes, valószínûleg nem lehet velük sok pénzt keresni. Az ebben a tanulmányban ismertetett modell jelentõsége is az, hogy megmutatja: a kaotikus viselkedéshez egyáltalán nem szükséges az, hogy a szereplõk csak fokozatosan alkalmazkodjanak, hanem elegendõ azt feltennünk, hogy a szereplõk heterogének. Amennyiben ez kimutatható, és még az is, hogy ez a heterogenitás egy nemlineáris függvénnyel írható le, akkor könnyen lehet, hogy a piaci viselkedés bonyolult, esetleg kaotikus. Ilyen értelemben ez egy lehetõség arra, hogy megkeressük a nemlineáris piacokat és a nemlinearitás okait.

IRODALOM

Barnett, W. A. és Serletis, A. (2000). Martingales, Nonlinearity, and Chaos; Journal of Economic Dynamics and Control, **24,** 703-724

Brock, W. A. és Hommes, C. H. (1998). Heterogeneous beliefs and routes to Chaos in a Simple Asset Pricing Model, Journal of Economic Dynamics and Control, **22,** 1235-1274

Carter, R. B. és Van Auken H. E. (1990). Security Analysis and Portfolio Management: A Survey and Analysis, Journal of Portfolio Management, Spring 81-85.

Chiarella, C. (1992). The Dynamics of Speculative Behavior. Annales of Operations Research **37,** 101-27

Gaunersdorfer, Hommes és Wagener (2001). Bifurcation Routes to Volatility Clustering, Timbergen Institute Discussion Paper, TI 2001-015/1; http://www.tinbergen.nl

Hommes, C. H. (2001). Financial Markets as Nonlinear Adaptive Evolutionary Systems; Research Paper, Quantitative Finance I: 149-167. http://www.quant.iop.org

Hoover, Kevin D. (1988). *The New Classical Macroeconomics: A Skeptical Inquiry,* Basil Blackwell

Litterman, R. és Scheinkman. J. (1991). Common Factors Affecting Bond Returns, The Journal of Fixed Income, June 1991, 54-61

Malkiel (1992). *Bolyongás a Wall Streeten,* Bankárképzõ

Száz János (1999). *Tõzsdei opciók vételre és eladásra,* Tanszék Kft.

Taylor, M. P. és Allen H. (1992). The Use of Technical Analysis in The Foreign Exchange Market, Journal of International Money and Finance, **11,** 304-314