

# NEMLINEÁRIS IDŐSOROK – A TŐZSDE KÁOSZA?<sup>1</sup>

Fokasz Nikosz

szociológus, egyetemi docens, ELTE BTK Szociológia Intézet  
e-mail: fokata.bt@chello.hu, fokasz@ludens.elte.hu

## Bevezetés

Hogy életünk kaotikus keretek közt zajlik, oly panasz, amelyben mindnyájan osztózunk. Tökéletes retorikai telitalálatnak bizonyult ezért, hogy két amerikai tudós (Li és Yorke, 1975) a hetvenes évek közepén a *nemlineáris rendszerek* kutatásával kapcsolatban formálódó új és sok tekintetben meghökkentő jelenségegyüttesnek a *káosz* nevet adta.

E gazdag jelentésárnyalatú és igen hatásos kifejezés keltette asszociációk, valamint a káosz tudorai és ismeretterjesztői által reklámozott szokatlan tulajdonságok találkoztak egy amúgy is kuriózumokra éhes nagyközönség nap mint nap átélt tapasztalatával. Csoda-e, hogy a hetvenes évek közepén megjelent káoszelmélet a nyolcvanas évek divatjává vált?

Sikeres és rendkívül szuggesztív ismeretterjesztő művek (Gleick, 1988; Stewart, 1989; Stewart és Golubitsky, 1992), valamint szaktudományos munkák (például Ruelle, 1991) egész sora fokozta a várakozásokat. Szerzőik a káoszelmélet legfontosabb tanulságaként találták azon meggyőződésüket, hogy a világ úton-útfélen megfigyelhető bonyolultsága, végső soron néhány, a háttérben meghúzódó igen egyszerű szabály működésének következménye.

Mindez a társadalomtudósok öszinte érdeklődését is kiváltotta. Lehetséges – kérdezték – hogy a káoszelméletől remélhetjük a természetieknél sokkal bonyolultabb társadalmi jelenségek megértésének kulcsát? Egy ilyen, általánosságban feltett kérdésre a válasz persze csakis tagadó lehet. A modern káoszelmélet azonban csakugyan képes volt újat állítani az *egyszerű* rendszerek *bonyolult* időbeli viselkedésének lehetőségéről. Megértéséhez tehát a továbbiakban elsősorban ezt az *egyszerű – bonyolult* kapcsolatot kell elemeznünk.

## Az egyszerű és a bonyolult

Előbb azonban lépünk eggyel vissza, s nézzük meg, milyen helyzeteket írhatunk le az *egyszerű – egyszerű* (értsd: egyszerű rendszer egyszerű időbeli viselkedése) párosítással. Ilyen lehet például a középiskolás fizikatanulmányaink során megismert inga esete. Igazán egyszerű rendszer, s időbeli viselkedése, mozgása is az: ha óvatosan meglökjük, egy idő után nyilván megáll (*1/a. ábra*). Továbbra is egyszerű rendszer, egyszerű időbeli viselkedésével lesz dolgunk, ha az ingát játszótéri hinta módjára megfelelő időközönként meglökjük (*1/b. ábra*).

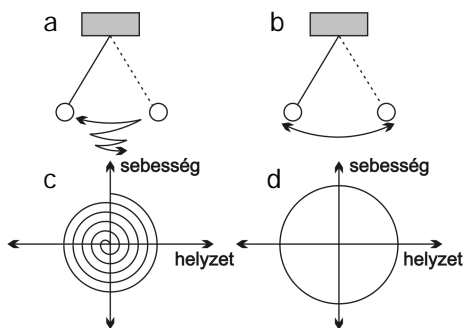
Nem ártana persze pontosítanunk, hogy a fenti példák kapcsán mit kell egyszerűségen értenünk. Egy inga esetében ugyanis magától értődően mindenekelőtt a berendezés egyszerűsége, hétköznapisága ötlük fel bennünk. Ennél azonban jóval többről van szó. Könnyen

---

<sup>1</sup> A tanulmány a T33030 számú OTKA-kutatás keretében készült.

belátható ugyanis, hogy az inga valamely állapotának megadása mindössze két változó – a hely és a hozzá tartozó sebesség – ismeretét igényli. Márpedig, ha mindössze két állapotjellemzőre van szükségünk, akkor ezek értékeit egy síkbeli koordináta rendszer tengelyein felmérve az inga bármely állapotát egy síkbeli ponttal, az inga mozgása során befutott állapotok összességét pedig valamilyen *síkbeli alakzattal, görbével* azonosíthatjuk.<sup>2</sup>

A súrlódás következtében fokozatosan megálló ingának ekkor egy origóba tartó spirál (1/c. ábra), a hinta (vagy mondjuk egy ingaóra) mozgásának pedig egy önmagába visszatérő – a periodicitást szemléletesen is megjelenítő – zárt görbe felel meg (1/d. ábra).



1. ábra • Súrlódó inga és gerjesztett inga mozgása a valódi, illetve a fázistérben

A fenti ábrázolásmód lehetővé teszi, hogy valamely rendszer időbeli viselkedésének vizsgálatában a továbbiakban közvetlenül a szemünkre hagyatkozhassunk. A fázistérbeli pályák ugyanis a súrlódó inga esetében előbb-utóbb egy *(fix)pontban* kötnek ki, míg az ingaóra esetében lassan ráhúzódnak egy *zárt görbére*. Igazán egyszerű geometriai alakzatok – egy pont és egy zárt görbe – szemléltetik tehát azokat az állapotokat, amelyek mintegy magukhoz vonzzák a leg-

különfélébb (lehetőleg közeli) kiinduló állapotokból elindított pályákat. A rendszer időbeli viselkedését ezért a továbbiakban éppen ezen alakzatok, az úgynevezett *attraktorok* szerint osztályozhatjuk. Ha az attraktor egyetlen (fix)pontból áll, akkor a rendszer előbb-utóbb állandósult egyensúlyi állapotban, zárt görbe esetén pedig valamilyen periodikus mozgásnál köt ki. Az általunk vizsgált inga tehát kettős értelemben is egyszerűnek tekinthető. Egyrészt mert állapotát kevés, mindössze két változó jellemzi, másrészt mert mozgása, időbeli viselkedése is egyszerű. Ez utóbbi tulajdonsága pedig mindennél meggyőzőbben fejeződik ki abban a tényben, hogy ingánk esetében igen egyszerű szerkezetű attraktorokkal van dolgunk.

### Különös attraktorok

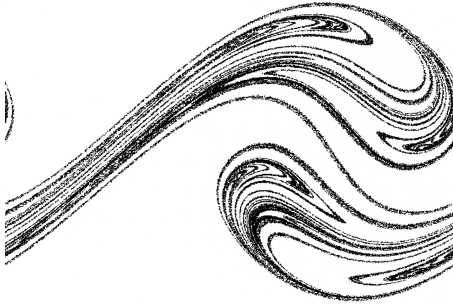
Az attraktorok vizsgálatát nyilván más dinamikus rendszerekre is érdemes kiterjesztenünk. A továbbiakban ezért valamely rendszer időbeli viselkedését attraktorának geometriai tulajdonságaival fogjuk jellemezni. Egyszerű attraktor egyszerű, bonyolult attraktor bonyolult dinamikát fog képviselni, bármit jelentsenek is ebben az összefüggésben az egyszerű vagy bonyolult szavak.

Ehhez persze újabb és újabb dinamikus rendszereket kellene szemügyre vennünk. Mi lenne, ha először az eddig vizsgált ingán módosítanánk egy keveset? Ezt nyilván többféleképpen is kivitelezhetjük. Megtehetjük például, hogy az ingát a megszokottól eltérő módon nem egy rúdra, hanem rugóra erősítjük, vagy mondjuk egy másik ingára lógatjuk föl, esetleg magát a felfüggesztési pontot kezdjük el vízszintesen rezegtetni.

Az elrendezés alig változott, a rendszer továbbra is egyszerű maradt. Állapotát ezúttal is kevés változó írja le, a rendszer hosszú távú viselkedését meghatározó attraktorok azonban – lásd például a periodikusan gerjesztett inga esetét – látványosan eltérnek az eddig megszokottaktól (2. ábra). Már

<sup>1</sup> A fázistér most bevezetett fogalma természetesen nem korlátozódik az általunk bemutatott kétdimenziós esetre. Csupán a síkbeli szemléltetés szempontjai miatt ragaszkodtunk ehhez a példához.

ránézésre is világos, hogy e különös alakzat geometriai szerkezete összehasonlíthatatlanul bonyolultabb, mint az 1. ábrán látott attraktoroké. Ez a geometriai bonyolultság pedig, mint tudjuk, az eddigiekhez képest szokatlanul bonyolult dinamikus viselkedés legbiztosabb jele.



2. ábra • Periodikusan gerjesztett inga attraktora a fázis térben

A periodikusan gerjesztett inga tehát egyszerű, kevés változóval jellemezhető rendszer, amely azonban rendkívül bonyolult időbeli dinamikát követ. Miből fakadhat ez a különösség? Azon tulajdonságaiból nyilván nem, amelyekben osztozik az egyszerű ingával. Márpedig tudjuk, hogy mindkettő egyszerű, kevés változóval és ezek kapcsolatát megragadó, kevés egyenlettel megadható determinisztikus rendszer. Persze ha mindkét esetben kevés változós determinisztikus rendszerekkel van dolgunk, azaz mozgásuk jól definiált matematikai egyenletekkel kapcsolatos, akkor különbségük is csak a matematikában lehet elrejtve.

A hetvenes évek közepének újszerű felismerése, hogy egyszerű egyenleteknek is lehet rendkívül bonyolult megoldásuk, már amennyiben az egyenletek nemlineárisak (lásd például May, 1976). Matematikailag ez azt jelenti, hogy a dinamikus rendszert megragadó mozgásegyenletekben az ismeretlen változók és időbeli változásaik nem csak első hatványon fordulhatnak elő. A matematikai

forma, az egyenletek nemlineáris jellege pedig arra utal, hogy ezekben a rendszerekben a „következmény (a rendszer reakciója) nem áll egyszerű arányosságban a kiváltó okkal”. (Muraközy, 1997) Más szóval ezek a rendszerek nem arányosan reagálnak az őket ért hatásokra. A káosz pedig nem egyéb, mint kevés változós, s ennyiben egyszerű rendszereknek az egyenletek nemlineáris jellegéből fakadó, bonyolult időbeli viselkedése. A gerjesztett inga azért lehetett a káosz első szemléletes példája, mert mozgásegyenletei az egyszerű ingáéval ellentétben nemlineárisak!

### Nemlineáris rendszerek

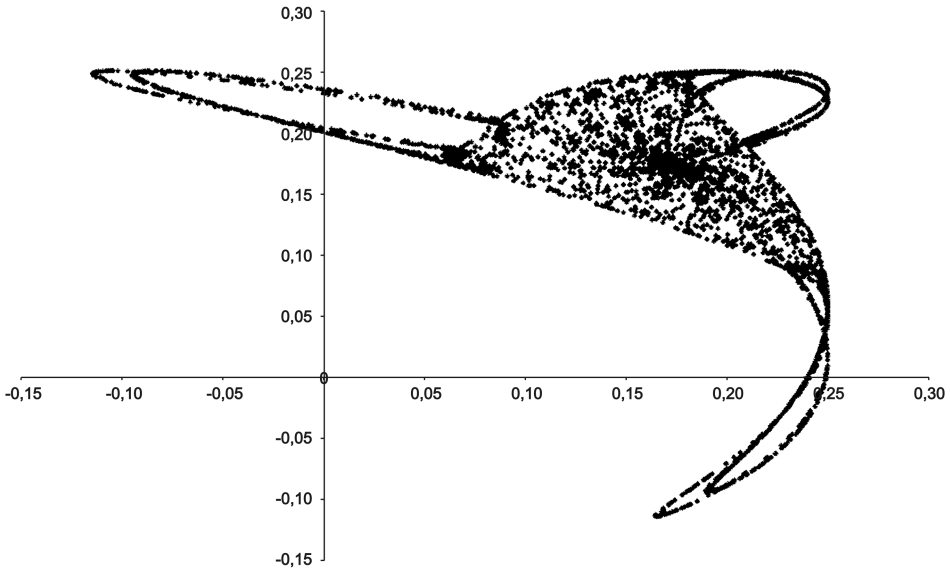
A fentiek alapján a káosz előfordulása utáni nyomozás nyilván egyszerű nemlineáris rendszerek felkutatását igényli. Ilyen egyszerű, egyváltozós nemlineáris rendszer például a mindenki által jól ismert

$$x_{t+1} = ax_t(1-x_t)$$

logisztikus leképezés, amellyel azonban itt nem kívánunk érdemben foglalkozni. Egyrészt, mert amúgy is unos-unaltan ezzel szokás példalózni, másrészt, mert másutt ezt már részletesen megtettük. Tanulmányunk közvetlen céljai szempontjából több hasznát vesszük a kétváltozós nemlineáris egyenletrendszereknek, mivel ezek attraktora eddigi példáinkhoz hasonlóan síkban ábrázolható. Elemzésükben tehát a legtöbb információt szolgáltató érzékszervünkre, a szemünkre támaszkodhatunk. Ilyen lehet például az *F. R. Marottótól* (1978) származó

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= (1-ax_t-by_t)(ax_t+by_t) \\ y_{t+1} &= x_t \end{aligned}$$

kétváltozós egyenletrendszer, amely egyébként  $b=0$  esetén visszaadja a most éppen leszólt logisztikus elképzelést, és amelynek attraktora különböző  $a$  és  $b$  paraméterek mellett igen változatos, bonyolult formájú struktúrákba rendeződik (3. ábra).



3. ábra • Marotto modelljének attraktora  $a=2,5$   $b = 2,0$

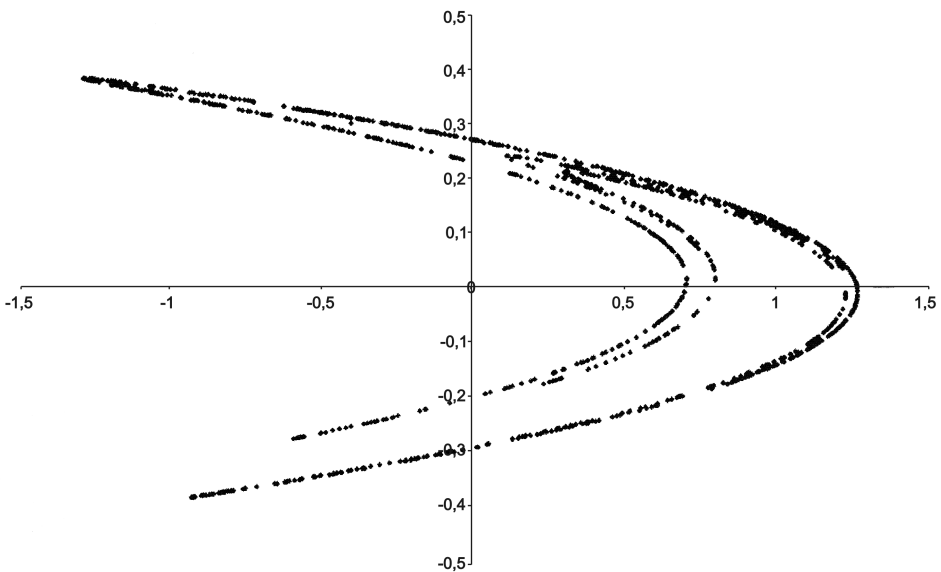
Végül, hogy szemünket végleg hozzá-  
szoktassuk a kaotikus rendszerek *különös*  
*attraktorainak* látványához, tekintsük az

$$\begin{aligned} x_{t+1} &= 1 + y_t - ax_t^2 \\ y_{t+1} &= bx_t \end{aligned}$$

egyszerű nemlineáris egyenletrendszert,  
amely a káoszelmélet egyik emblemikus  
példáját, a Hénon-attraktort állítja elő (4. ábra)

Jól tudjuk, hogy az attraktorok a dinami-  
kus rendszerek hosszú távú időbeli viselke-

4. ábra • Az Hénon-attraktor



dését határozzák meg. Elég ezért egy gyors pillantást vetnünk a 2-4. ábrákra, hogy megállapíthassuk, az adott esetek mindegyikében rendkívül bonyolult időbeli dinamikával van dolgunk. Ezek a dinamikus rendszerek semmi jelét nem mutatják annak, hogy valamilyen egyensúlyi állapothoz közelítenének, vagy mondjuk valamilyen könnyen felismerhető szabályos időbeli dinamikát követnének. Az attraktorok szerkezete alapján az a benyomásunk támadhat, hogy e dinamikus rendszerek véget nem érően szabálytalan, véletlenszerű, s ennyiben kiismerhetetlen pályákat futnak be. Annyiban persze a kaotikus dinamikus rendszerek viselkedése is előre jelezhető, hogy pályáik előbb-utóbb mindenképpen az attraktoron kötnek ki. Egy ilyen előrejelzés valódi értékét azonban az dönti el, mennyire fontos nekünk az általa szolgáltatott információ. Mint ahogy a „*jön a dagály*”, illetve a „*decemberben hidegebb lesz, mint augusztusban volt*” típusú előrejelzések értékét is eszerint ítéljük meg.

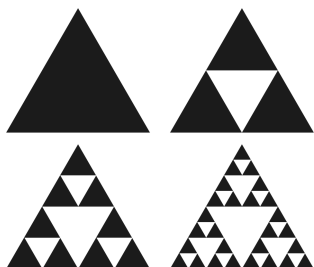
Kaotikus dinamika esetén is biztosak lehetünk tehát abban, hogy a lehetséges pályákat valamilyen attraktor fogja magához vonzani. Adott esetben azonban annak előrejelzése is fontos lehet számunkra, hogy a rendszer az attraktoron belül éppen melyik állapotban található. Erről viszont csak valószínűségi kijelentéseket tehetünk, pontosan sosem tudhatjuk. Az sem segítene ezen, ha egyre pontosabb megfigyeléssel, növekvő nagytításban próbálnánk meg a rendszer pozícióját az attraktoron belül lokalizálni. A különös attraktorok egymást követő nagytításokban megjelenő szerkezetek ugyanis, mind finomabb és finomabb formában, de az eredetihez nagyon hasonló struktúrát mutatnak. Az ilyen geometriai alakzatokat *Benoit Mandelbrot* nyomán *fraktáloknak* nevezzük.

### *Káoszjáték*

A kaotikus dinamika tehát fraktálokon történő véletlenszerű mozgást jelent. Ezt a típusú mozgást ezért sajátos kettőség, egyrészt az attraktor szerkezetiségében megnyilvánuló *makroszintű determinizmus*, másrészt a pálya egymást követő lépéseiben tetten érhető *mikroszintű véletlen* jellemzi. Determinizmus és véletlen együttélésének illetően lehetőségét a legvilágosabban talán az alábbiakban bemutatott, úgynevezett *káoszjáték* (Barnsley, 1988) segítségével szemléltethetjük.

Tekintsünk a síkon egy  $A, B, C$  csúcús egyenlő oldalú háromszöget. Válasszunk ki ugyanezen a síkon egy tetszőleges  $P_1$  pontot, majd valamilyen véletlen módon (mondjuk urna alkalmazásával) sorsoljuk ki az  $A, B, C$  pontok valamelyikét. Ha elsöre – mondjuk – a  $B$  pont jött ki, akkor  $P_1$ -ből  $B$  irányába lépünk eggyel tovább, mégpedig éppen  $P_1B$  távolság felével. A továbbiakban az így kapott  $P_2$  ponttal, mint kiindulóponttal ismételjük meg az egész eljárást. Ha a sorsolásnál ezúttal az  $A$  pont kerülne sorra, akkor a  $P_2A$  távolság megfelelésével állítjuk elő a  $P_3$  pontot, majd hasonló módon, a sorsolás állandó közbeiktatásával juthatunk el lépésről lépésre a  $P_4, P_5, P_6$  stb. pontokhoz. Kérdés: milyen pályát fognak leírni a  $P_1, P_2, \dots, P_n \dots$  pontok, ha a fenti eljárást a végtelenségig folytatjuk?

Az nyilvánvaló, hogy mivel a lépések mindenkor irányát a sorsolásra bíztuk, véletlenszerű pályát fogunk befutni. Annál meglepőbb, hogy az egymást követő  $P_1, P_2, \dots, P_n \dots$  pontok végül is egy igen karakteres és ismert fraktálstruktúra, az úgynevezett Sierpinski-háromszög sziluettjét rajzolják ki (5. ábra). Az általunk követett pálya tehát előbb-utóbb biztos, hogy ráhúzódik a Sierpinski-háromszögre, az viszont a véletlenszerűen múlik, hogy e háromszögon belül éppen hol fogunk tartózkodni.



5. ábra • Káoszjáték

*Ugyan...*

Káoszjáték? Sierpinski-háromszög, fraktálok vagy különös attraktorok?... Mi köze mindennek a társadalomtudományokhoz?! Ugyan melyik társadalomtudós szokott azon morfondírozni, hogy az általa vizsgált jelenségeket megadó kevés változós egyenletrendszer vajon nemlineáris-e? Ennek nyilván elemi feltétele, hogy legyenek egyáltalán elemzésre érdemes matematikai modelljei. A történésznek? Az antropológusnak, netán a politológusnak?

Nem véletlen, hogy a káoszelmélet eredményeinek felhasználásában, a társadalomtudományok közül eddig egyedül a matematikai gondolkodásmódot és a matematika alkalmazását több mint egy évszázada meghonosító közgazdaságtan mutathat fel igazi eredményeket. A gazdasági szereplők valamiféle racionalitásának feltételezése valamint a pénzben történő mérés lehetősége miatt a közgazdászoknak a matematikai modellek alkotása terén összehasonlíthatatlanul könnyebb dolguk volt, mint társadalomtudós kollégáiknak. A közgazdaságtan esetében ezért döntően már korábban is létezett és elemzett matematikai modellek vagy csekély mértékben korrigált, javított változataik kaotikus dinamikájának felismeréséről, s nem e modellek semmiből történő megalakításáról van szó.

Tán még a demográfia, a humánökológia vagy a szociológia és a szociálpszichológia egyes igen specializált részterületein

tudnánk elképzelni hasonló modelleket. De a fősodor nyilván itt sem ebbe az irányba megy, s akkor még nem is beszéltünk a történettudomány, a kulturális antropológia vagy mondjuk a politológia legkülönfélébb változatairól.

Matematikai modellek? Na hiszen! ...

*Idősorok*

Talán ha fordítanánk egyet a dolgon! Mi lenne, ha nem kész modellek alapján próbálnánk az esetleg kaotikus időbeli dinamikát rekonstruálni, hanem megfordítva: az időbeli dinamika ismeretében kísérelnénk meg eldönteni, hogy kaotikus rendszerrel van-e dolgunk. Persze ez az igény még mindig túlságosan ambiciózusnak tűnik. Társadalmi folyamatok esetében az időbeli dinamika teljes ismeretét többnyire nem garantálhatjuk. Inkább számíthatunk arra, hogy meghatározott időközönként elvégzett mérések eredményei, tehát lényegében egy idősor adatai álljanak rendelkezésünkre. Viszonylag hosszú idősorok ugyanis szinte valamennyi társadalomtudományban előfordulhatnak. Itt vannak például a születési és a halálozási ráták, az öngyilkosok számának alakulása, a könyvtári állomány növekedése, a GDP vagy a kamatlábak több mint százéves idősorai, a közvélemény-kutatási vagy különféle piackutatási eredmények, hogy csak néhány példát említsünk, s a sor még nyilván hosszan folytatható.

A nyilvánvalóan egyszerű, szabályszerű mozgást mutató idősorok persze nem érdekelnek bennünket. A GDP alakulása például számos országban nagyon egyértelmű tendenciát követ, a néhány évenként megfigyelhető erőteljes ingadozások ellenére a csecsemőhalandóság is stabil tendenciát mutat, a születési ráták esetében pedig az évről évre tapasztalható szezonális képviseli a szabályszerű mozgást. Ezen idősoroknak is lehet azonban olyan véletlenszerűen viselkedő része, amelyben nem könnyű valami-

féle szabályszerűséget felismerni. Megállapításaink érvényességi körét tekintve nem jelent tehát érdemi korlátozást, ha a továbbiakban feltesszük, hogy van valahonnan, valamilyen véletlenszerű idősorunk.

Az eddigi felvezető jellegű fejtegetések után végre eljutottunk a jelen tanulmány legfőbb problémájához. Kérdésünk, amelyre választ remélünk a következő: ha van egy minden szabályszerűséget nélkülöző, láthatóan *véletlenszerű* mozgást mutató *idősorunk*, vajon miként dönthetjük el, hogy kevéssé változós *kaotikus*, azaz nemlineáris *determinisztikus* rendszerből származik-e?

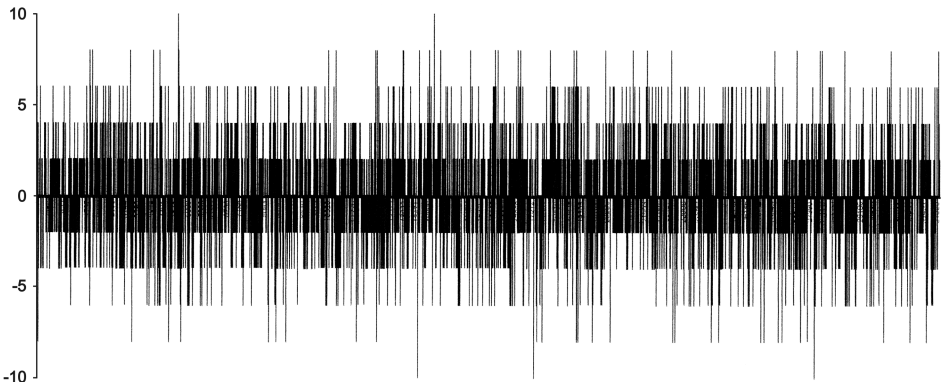
### *Véletlen bolyongás*

A fenti bekezdésben a „véletlenszerű idősor” fogalmát nyilvánvalóan a hétköznapi értelemben vett „szabálytalan” szinonimájaként használtuk. Csakhogy ami kérdés formájában még megteszi, az a válaszhoz már korántsem elegendő. Nyilvánvaló, hogy a véletlen fogalmát a továbbiakban mindenképpen pontosítani kell. A véletlent ugyanis tanulmányunkban eddig egyedül a káoszjátékban alkalmazott sorshúzás képviselte. És még ebben az esetben sem beszélhetünk a véletlen mindenféle korlátozás nélküli érvényesüléséről, hiszen a  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  pontok által befutott pálya lehetséges mozgási irányait az előre rögzített  $A, B, C$  pontokhoz igazítottuk. Mi lenne, ha ezt a szabályszerűséget is kiiktatnánk, és a haladási irányokat teljesen szabadon sorsolnánk ki? Hogy ez miként lehetséges, még nem tudhatjuk, de vélelmezhető hogy ebben az esetben olyan jellegű szabálytalan mozgást kaphatunk, amilyent például a levegőben lebegő füst-részecske pályája ír le.

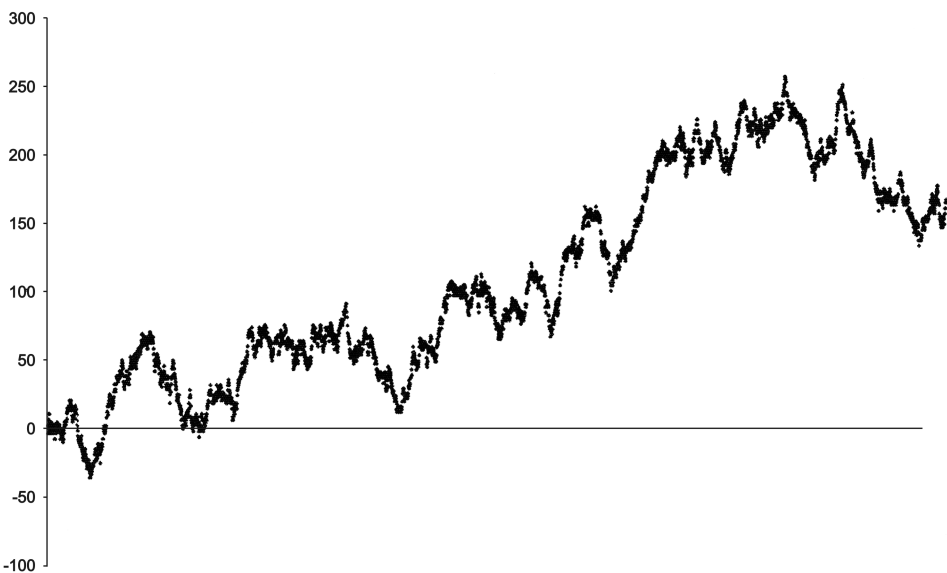
Az ilyen jellegű szabálytalan mozgást szokás Brown-mozgásnak nevezni. Az elnevezés Robert Brown angol botanikusnak állít emléket, aki 1827-ben elsőként figyelte meg a vízben lebegő növényi spórák szabálytalan

mozgását. Ezt követően még csaknem száz évnek kellett eltelnie ahhoz, hogy kiderüljön, adott esetben nem apró élőlények mozgásával, tehát nem biológiai, hanem fizikai jelenséggel van dolgunk. A *nyugvó folyadékban lebegő részecskék* mozgásának ugyanis csak 1905-ben adta meg Albert Einstein a *hő molekuláris elméletéből következő* magyarázatát. Úgy gondolta, hogy a spórák, a füst-részecskék és egyéb mikroszkopikus nagyságú részecskék mozgását a náluknál sokszorta kisebb víz- vagy levegőmolekulákkal – másodpercenként talán milliószor is – bekövetkező ütközések okozzák. Mivel nincs okunk azt feltételezni, hogy az ütközések száma bármely irányból tartósan meghaladná az egyéb irányból érkező ütközések számát, arra számíthatunk, hogy a részecskéket a különböző irányokból *átlagosan* azonos nagyságú impulzusok érik. Ugyanennyire biztosra vehető azonban, hogy a különböző irányokból érkező ütközések *ténylegesszáma* eltér egymástól. Az eltérő ütközésszám miatt a kérdéses részecske véletlenszerű irányban és véletlenszerű mértékben fog elmozdulni.

A Brown-mozgás esetében tehát a nagyon nagy számú és valószínűsíthetően egymástól függetlenül bekövetkező ütközés tekinthető a véletlen forrásának. Ne feledjük azonban, hogy a Brown-mozgáshoz a káoszjáték módosításának szándékával jutottunk el. Az volt az elképzelésünk, hogy valamely részecske által befutott pálya irányát lépésről lépésre véletlenszerűen sorsoljuk ki. E véletlenszerű mozgás szimulációja különösen egyszerűvé válik, ha a kérdéses részecske mozgását egy dimenzióra, azaz valamely egyenes mentén történő oda-vissza lépésekre korlátozzuk. Ezt az úgynevezett *egydimenziós bolyongást* a legkönnyebben úgy állíthatjuk elő, ha az egymást követő lépések irányát érmedobással sorsoljuk ki. Ha a fej oldal kerül felülre, akkor, mondjuk eggyel fölfelé, ha az írás, akkor eggyel lefelé lépünk.



6. ábra • Egydimenziós bolyongás, egymást követő lépések



7. ábra • Egydimenziós bolyongás, a részecske pozíciója

A Brown-mozgásra még inkább jellemző változó lépéshossz szimulációjára is mód nyílik, ha nem egy, hanem egyszerre mondjuk tíz érmevel dobunk, és az érme két oldalának különbsége adja meg a mindenkor lépés nagyságát és irányát. Ezeknek az egymás utáni lépéseknek egy szimulációját mutatjuk be a 6. ábrán, míg a részecske mindenkor pozícióját a 7. ábrán közöljük.

Ha a vizsgált időtartam, illetve a részecske által befutott teljes távolság rendre jóval nagyobb, mint az egymást követő lépések közt

eltelt idő, illetve mint az egyes lépésközök, akkor a fenti véletlen bolyongás jó közelítése lesz a Brown-mozgásnak. A kettőt ezért a továbbiakban akár egymás szinonimájaként is kezelhetjük.

A fentiek ismeretében azt is megtehetjük, hogy a Brown-mozgás szimulációját közvetlenül a káoszjátékban alkalmazott sorshúzásra alapozzuk. Jól ismert, hogy érmedobás során a fej-, illetve írásdobások száma – ha nagyon sok kísérletet végzünk – megközelítően normális eloszlást követ. Megte-

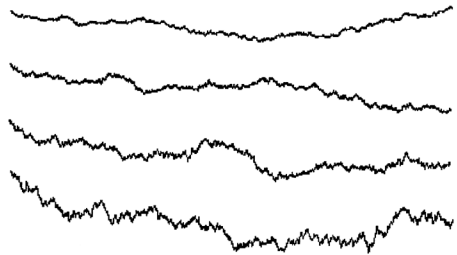
hetjük ezért, hogy a lépéshosszt normális eloszlású valószínűségi változókból választjuk. Képzeljünk el például egy 52 lapból álló kártyapaklit, amelynek lapjaira a  $-1, +1, -3, +3, -5, +5, -7, +7$  számokat írjuk fel, rendre 13-13, 8-8, 4-4, 1-1, gyakorisággal. Könnyen ellenőrizhető, hogy a különböző számmal ellátott kártyák gyakorisága haranggörbét formál, tehát normális eloszlást követ. Ha a továbbiakban ebből a pakliból véletlen húzással sorsoljuk ki az egyes lépéseket, akkor szintén Brown-mozgáshoz jutunk.

*Skálázás és önhasonlóság*

A fentiekből világosan látható, hogy a bolyongási folyamat egymástól független és azonos eloszlású véletlen változók – az ilyen folyamatot szokás *fehér zajnak* nevezni – jelen esetben az egymást követő lépések *kumulált összegeként* áll elő. Ebből következően a részecske az idő múlásával fokozatosan egyre inkább eltávolodik kiinduló pozíciójától. Ez a diffúzió azonban természetesen lassúbb, mintha mindig ugyanabba az irányba lépnénk. Ha valaki  $t$  lépést tesz meg egy bizonyos irányba, és a lépések hossza  $l$ , akkor nyilvánvalóan  $tl$  távolságra juthat a kiindulási ponttól. A távolodás tehát ebben az esetben a lépések  $t$  számával, vagyis az idő múlásával arányos. Ha viszont a részecske folytonosan változtatja mozgásának irányát, akkor nyilván nem juthat el ilyen messzire, a terjedés lassúbb lesz. A bolyongási folyamat egyik legfontosabb jellemzője, hogy a kiindulóponttól mért átlagos távolság az idő négyzetgyökével,  $t^{1/2}$ -vel arányos.

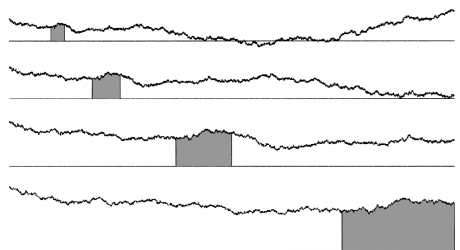
A Brown-mozgásnak ezt a tulajdonságát legkönnyebben a folyamat időbeli lefutását ábrázoló diagram skálázási tulajdonságaival szemléltethetjük. Ennek érdekében a 8. ábrán mindkét tengelyen egymás után többször is megdupláztuk az alkalmazott léptéket. A görbe jellege szemmel láthatóan szisztematikusan megváltozott, egyre szabálytalanabbá vált. Világos, mindez annak követ-

kezménye, hogy a skála megváltoztatása a függőleges tengelyen túlságosan sok volt a vízszintesen tengelyen alkalmazott lépték-változáshoz képest.



8. ábra • A véletlen bolyongás grafikonjának változása azonos skálázás mellett

Ha meg akarjuk őrizni a görbe jellegét, akkor a függőleges tengelyen az eddigi kétszereshez képest valamivel kisebb léptékváltást kell alkalmaznunk. A 9. ábráról jól látható, hogy amennyiben a vízszintes időtengelyen továbbra is megduplázzuk a léptéket, a részecske diffúzióját jelző függőleges tengelyen pedig  $\sqrt{2}=2^{1/2}$ -szeresére növeljük a léptéket, akkor a diagram kinézete nem változik meg, statisztikai tulajdonságai ennyiben tehát változatlanul maradnak.



9. ábra • A véletlen bolyongás időgrafikonjának önaffin jellege

A véletlen bolyongás grafikonjának most feltárt tulajdonsága a fraktalokat jellemző önhasonlóság általánosításának tekinthető. Ebben az esetben az önhasonlító jelleget ga-

rantáló skálázás léptéke az egyes tengelyek irányában eltérő lehet. Az ilyen alakzatokat *önaffin* alakzatoknak nevezzük. A fraktál dimenzió különböző változatai közül azonban néhány, például az úgynevezett dobozszámláló (box-counting) dimenzió ekkor is alkalmazható.

Valamely szabálytalan síkbeli alakzat dobozszámláló dimenziójának meghatározásához mindenekeelőtt egy rácsot kell az alakzatra helyezzünk. Számoljuk meg ezek után, hogy a rács hány cellája szükséges az alakzat lefedéséhez, más szóval nézzük meg, hogy szabálytalan síkbeli alakzatunk a rács hány cellájába képes eljutni! Nyilván minél többbe, annál síkszerűbb alakzattal van dolgunk, a lefedések száma tehát valamiféle dimenzió-fogalommal áll kapcsolatban. Finomítsuk a felosztást, használjunk, mondjuk, fele akkora méretű cellákból álló rácsot. Mi történik az alakzat lefedéséhez szükséges cellák számával? Nyilván nő, csak az a kérdés, mennyivel. Úgy véljük, hogy ha egyszerű vonallal lenne dolgunk, akkor fele akkorából kétszer annyi, míg ha egy szokásos síkidomot vizsgálunk, akkor négyszer annyi cella kellene a lefedéshez. Általában, ha valamely alakzat esetében a lefedéséhez szükséges cellák  $N$  száma, valamint az alkalmazott  $r$  cellaméret között egy

$$N = r^{-D_B}$$

alakú kifejezéshez jutunk, akkor a kitevőben szereplő  $D_B$  a kérdéses alakzat dobozszámláló dimenzióját szolgáltatja, amelyre nyilván fennáll a

$$D_B = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$$

összefüggés. Belátható, hogy a Brown-mozgás diagramjának dobozszámláló dimenziójára

$$D_B = 2 - \frac{1}{2} = 1,5$$

adódik, ahol a kivonásban szereplő  $1/2$  éppen a  $t^{1/2}$ -vel arányos diffúzió kitevőjéből adódik.

### *R/S – analízis*

A Brown-mozgás, illetve a véletlen bolyongás bevezetésével meghatározott módon specifikáltuk a „*véletlenszerű*” folyamat korábban meglehetősen körvonalazatlanul használt fogalmát, a legutóbb feltárt „*négyzetgyökös*” terjedési szabállyal pedig konkrét kvantitatív kritériumot is szolgáltatunk e folyamat jellemzéséhez. Ezek után már empirikus kérdés, hogy bizonyos természeti vagy társadalmi folyamatokkal kapcsolatos idősorok a véletlenszerű folyamatoknak a Brown-mozgással reprezentálható kategóriájába tartoznak-e vagy sem. E kérdéskör vizsgálatában *H. E. Hurst* angol vízmérnök példáját követjük, aki völgyzáró gátak tervezőjeként egy életet töltött el a Nílus vízjárásának elemzésével.

Elvben nem zárható ki, hogy a Nílus mindenkori vízállása nagyszámú, egymástól független hatás eredőjeként áll elő. Ennyiben tehát akár véletlen bolyongásként is viselkedhetne. A kérdés persze a Nílus esetében nem annyira elvi, mint inkább empirikus probléma. Hurst kidolgozott egy olyan eljárást, amelynek segítségével a vízállási adatok ismeretében eldönthetővé vált, hogy a Nílus vízállása milyen típusú véletlen folyamatnak tekinthető.

Képzeljünk el egy tavat, amely időről időre kiönt. Nyilván víztározót kellene építenünk a katasztrófa elhárítására. Mekkora legyen a víztározó, hogy a szélsőséges vízjárásnak is megfeleljen? Jelölje  $\xi_t$  a víztárolóba évről évre beérkező vízmennyiséget, és tegyük fel, hogy a vízszint szabályozása céljából évről évre a víztárolóból meghatározott fix vízmennyiséget engednek le. Vizsgáljunk egy meghatározott, mondjuk  $T$  éves időszakot. Ekkor

$$\bar{\xi}_T = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \xi_t$$

jelöli az adott időszakban évente átlagosan a tárolóba érkező mennyiséget. Célszerűnek

tűnik, hogy évente magunk is éppen ennyit eresszünk le a víztárolóból. Ebben az esetben az

$$X(t, T) = \sum_{u=1}^T \{ \xi_u - \bar{\xi}_T \}$$

idősor, azaz a  $\xi_t$  változónak a saját átlagától való kumulált eltérése a víztárolóban lévő mindenkori mennyiséget jelöli. tekintsük ezen idősor legnagyobb és legkisebb értékének

$$R_T = \max_{1 \leq t \leq T} X(t, T) - \min_{1 \leq t \leq T} X(t, T)$$

eltérését, az idősor úgynevezett terjedelmét. Nyilvánvaló, hogy az itt is érvényesülő diffúzió miatt a vizsgált időszak növelésével az  $X(t, T)$  kumulált értékek lassan „szétmáznak”. Az idő függvényében nő az  $R_T$  terjedelem. Kérdés, hogy miként. Még érdekesebb, ha nem is  $R_T$ , hanem helyette az

$$S_T = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \{ \xi_t - \bar{\xi}_T \}^2}$$

szórással standardizált, dimenzió nélküli  $R_T/S_T$  hányados alakját vizsgáljuk az idő függvényében. Ebben az esetben ugyanis a legkülönfélébb természeti és társadalmi folyamatok összehasonlítására is mód nyílik. A véletlen bolyongásról megállapított négyzetgyökös szabály ismeretében nem meglepő, hogy Brown-mozgás esetén ez a függés az idő négyzetgyökével arányos, tehát

$$R_T/S_T \approx T^{1/2}$$

alakú lesz. A továbbiakban ezért valamilyen ismeretlen tulajdonságú véletlen folyamat esetében célszerű

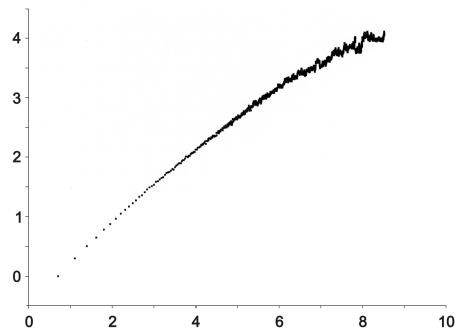
$$R_T/S_T = T^H$$

alakú összefüggésre számítanunk. Az empirikus vizsgálatok számára ez a  $H$ , amelyet érthető okokból Hurst-exponensnek nevezünk, sokkal könnyebben előállítható, ha a fenti formula helyett annak

$$\ln(R_T/S_T) = H \ln T$$

alakú logaritmikus változatával számolunk. Eszerint ugyanis elég, ha a különböző  $T$  időtartamokhoz tartozó  $R_T/S_T$  értékeket az idő függvényében mindkét tengelyén logaritmikus beosztású koordináta-rendszerben ábrázoljuk. A Hurst-exponenst az így kapott diagram meredeksége szolgáltatja.

A módszert a véletlen bolyongás klasszikus példájának segítségével tesztelhetjük. Számítógépen szimulálva a tíz értével történő dobásokat, ötezer „dobást” végeztünk el. Az így előállított bolyongást a 7. ábrán egyszer már bemutattuk. A kapott idősorra elvégzett  $R/S$  analízis  $R=0,0994$  illeszkedés mellett az elméleti értékhez nagyon közeli  $H=0,512$  exponenst szolgáltatott (10. ábra).



10. ábra • Véletlen bolyongás  $R/S$  analízise

### Hatékony piacok?

Az egyes részvényárfolyamok, illetve a tőzsdeindexek alakulása mindennapjaink részévé, az időbeli lefutásukat ábrázoló grafikonok látványa pedig leghétköznapibb vizuális élményünké vált. Már ránézésre is világos, hogy a tőzsdeindexek véletlenszerű mozgást végeznek, velük kapcsolatban is felvethető tehát tanulmányunk alapvető kérdése, nevezetesen az, hogy vajon kaotikus determinisztikus rendszerből származnak-e. Ezt megelőzően azonban érdemes megvizsgálnunk, hogy a tőzsdeindexek esetében pontosan milyen típusú véletlennel, például véletlen bolyongással van-e dolgunk.

A hatékony piac hipotézise szerint a pénzügyi piacokon minden nyilvános információ azonnal asszimilálódik. Mivel az érvényes árak már minden nyilvánosságra került információra reflektáltak, a jövőbeni árváltozásokat már csak a befutó új információk befolyásolhatják. Ennek következtében az árak tehát csak akkor változnak, ha új információ érkezik. A mai árváltozásokat csak a ma befutott váratlan események okozhatták. A tegnapi hírek ma már nem fontosak. A pénzügyi piacok fontos jellemzője tehát, hogy a mai hozamok függetlenek a tegnapiaktól. A hatékony piac hipotézisének valamennyi változata feltételezi, hogy ha már egyszer az információ általánosan ismertté vált, akkor a múlt nem befolyásolja a mindenkori piaci aktivitást. A függetlenség e feltételezésének nem egyedüli, de egyik lehetséges következménye, hogy a hozamok véletlen bolyongást követnek.

A befektetők reakciói szempontjából a hatékony piac hipotézise azt jelenti, hogy a pénzügyi piacok résztvevői nem kumulatív módon, hanem azonnal, tehát lényegében arányosan reagálnak a beérkező információkra. A pénzügyi piacok ezért lineáris rendszereknek tekinthetők. Mindez persze döntően empirikus kérdés. Az alábbiakban ezért az ezekkel kapcsolatos első eredményeinket mutatjuk be.

Jelölje  $P_t$  az adott időpontbeli részvényárfolyamokat. Az elemzést döntően az

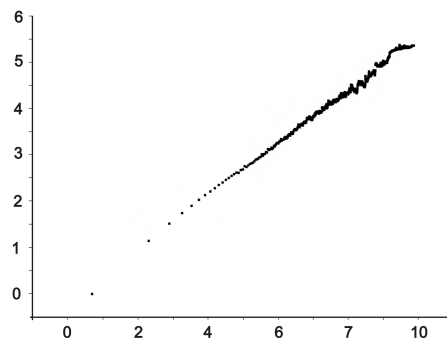
$$\eta_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

logaritmikus hozamokra támaszkodva végeztük el, bár az

$$\eta_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$$

növekmények segítségével minden esetben ellenőrző számításokat is végeztünk. A Dow Jones ipari index esetében például az 1928. október és 2000. február közti idő-

szakra, gazdaságstatisztikus szemmel nézve óriási mennyiségű, 18 972 adat állt rendelkezésünkre. Elemzésünket az index napi *nyitó* és *záró* értékeire, valamint *maximumaira* és *minimumaira* egyaránt elvégezhetjük. Minden eredményünket nem áll módunkban részletesen bemutatni, illusztrációként a Dow Jones-index napi záró árfolyamai *R/S* analízisének eredményét mutatjuk be (11. ábra).



11. ábra • A Dow Jones-index napi záró árfolyamainak *R/S* analízise

Megjegyezzük, hogy a Hurst-exponens meghatározása érdekében a fentiekhez hasonló diagramokra regressziós egyenest illesztettünk. A szokásos eljárás mellett egyfajta súlyozott illesztést is kipróbáltunk. Mivel ez megbízhatóbbnak bizonyult, e tanulmányban mindenütt ennek eredményeit közöljük. Az 1. táblázatban összefoglaltunk néhányat a Dow Jones-indexre vonatkozó legfőbb eredményeink közül.

Általában elmondhatjuk, hogy csekély egyedi eltérésekkel a Hurst-exponensre 0,51 és 0,58 közötti értékeket kaptunk. Vizsgálódásunk jelenlegi, kezdeti szakaszában ezért a Dow Jones napi árfolyamai elég jó közelítéssel véletlen bolyongásnak tekinthetők. Hasonló, a véletlen bolyongást jól közelítő eredmény adódott a világ számos nagy tőzsdéje, valamint jelentős indexe: a hongkongi tőzsde, a Dax, a Nikkei, a Nasdaq és az S&P, valamint számos jelentős részvény,

Árfolyamok	Logaritmikus hozamok		Növekedési ütemek		Növekmények	
	$p^*$		$\eta_t = \frac{P_t}{P_{t-1}}$		$kt = P_t - P_{t-1}$	
	H	$R^2$	H	$R^2$	H	$R^2$
Nyitó	0,540	0,975	0,557	0,996	0,589	0,996
Maximum	0,504	0,992	0,549	0,98	0,602	0,996
Minimum	0,515	0,998	0,537	0,978	0,588	0,998
Záró	0,604	0,998	0,537	0,978	0,588	0,998

1. táblázat • Az R/S analízis eredményei a Dow Jones-index esetében

Árfolyamok	DAX		Logaritmikus hozamok Nikkei		S&P	
	H	$R^2$	H	$R^2$	H	$R^2$
	Nyitó	0,556	0,997	0,546	0,995	0,529
Maximum	0,556	0,997	0,562	0,996	0,529	0,994
Minimum	0,536	0,996	0,529	0,993	0,521	0,994
Záró	0,535	0,996	0,534	0,994	0,527	0,994

2. táblázat • Az R/S analízis eredményei néhány tőzsdeindex esetében

például az American Express, az IBM, a General Electric vagy a Coca Cola stb. esetében is. Az itt bemutatathatónál jóval több számítást végeztünk, a 2. és 3. táblázatban csak izelítőt tudunk adni eredményeinkből.

Napi záró árfolyamok	Logaritmikus hozamok	
IBM	0,567	0,999
General Electric	0,528	0,979
Hewlett-Packard	0,535	0,998
General Motors	0,458	0,979
Coca Cola	0,501	0,995
Walt Disney	0,5	0,99

3. táblázat • Az R/S analízis eredményei néhány ismert részvény esetében

Természetesen nem kerülheti el figyelmünket, hogy bár többnyire 0,5-höz közeli értékeket kaptunk, túlnyomórészt 0,5-nél valamivel nagyobb Hurst-exponens adódott. E kérdések azonban további kutatást igényelnének és meghaladják e tanulmány kereteit. Annyit azért e pillanatban is kijelenthetünk, hogy a vizsgált esetekben eredményeink

semmiképpen sem cáfolják, inkább megerősítik a hatékony piac hipotézisét.

### Hosszú távú memória

Az eredmények tükrében különösen figyelemreméltó, hogy a természet sokszor akkor sem a fent modellezett eljárás szerint viselkedik, amikor logikai megfontolások alapján erre számítanánk. Hurst a folyók áradásától kezdve az esőzések vagy a fák évgyűrűinek vizsgálatán keresztül egészen a tavak vízállásának elemzéséig számos természeti jelenséget tett ki alapos vizsgálatnak. Szinte kivétel nélkül 0,5-től szignifikánsan eltérő, mégpedig tipikusan  $H \approx 0,7$  értéket kapott

Maga Hurst annak idején számítógép híján rendkívül szellemes simulációs eljárást alkalmazott a fenti jelenség megértésére. Tekintsük ugyanazt az ötvenkét lapból álló kártyapaklit, amelyet a Brown-mozgás simulációjára használtunk! Emlékeztetek arra, hogy az egyes kártyalapokra 13-13, 8-8, 4-4, illetve 1-1 gyakoriságokkal, rendre a -1, +1, -3, +3, -5, +5, -7, +7 számokat írtuk fel.

Alapos keverés után húzzunk ki egy kártyát! Legyen ez a példa kedvéért a +3-as. Jegyezzük meg ezt a számot, majd visszatérve a kártyát keverjük meg ismét a paklit! Ezután osszuk két egyenlő részre a paklit, majd emlékezve arra, hogy a kihúzott szám éppen +3-as volt, a három legnagyobb pozitív számot az egyik részpakliból helyezzük át a másikba, ahonnan ezzel egyidejűleg eltávolítjuk a három legnagyobb abszolút értékű negatív számot. Ezzel egy olyan, huszonhat kártyából álló paklihoz jutottunk, amelynek eloszlása éppen egy véletlen húzás eredményeként és mértékében vált aszimmetrikussá. Tegyük ebbe a pakliba a jokert is, majd ebből kezdjük egy bolyongás lépéseit kisorsolni. A sorsolás egészen addig tart, amíg a jokert ki nem húzzuk. Ekkor a jokert eltávolítva és a két részpaklit újraegyesítve az eljárást előlről kezdjük.

Nagyon figyelemreméltó, hogy ezzel az eljárással olyan idősort állíthatunk elő, amelynek Hurst-exponensére  $H=0,7$  adódik. Tehát jelentősen meghaladja a véletlen bolyongásnál megfigyelt értéket. A szimulációs eljárás ismerete azonban most már azt is lehetővé teszi, hogy értelmezzük a Hurst-exponens jelentését. Az világos, hogy  $H=0,5$  azt jelenti, hogy az idősort azonos eloszlású és független valószínűségi változók segítségével állítottuk elő. A véletlen bolyongás során az egyes lépések függetlenek egymástól. A legegyszerűbb változatban például a korábbi lépésektől teljesen függetlenül mindig 50-50 % annak valószínűsége, hogy előre vagy visszafelé lépünk.

Más a helyzet azonban, ha a Hurst-exponensre  $H=0,5$  teljesül. Minden egyes húzás a fél pakliból továbbra is független egymástól. Az egyik húzás nem befolyásolja a másikat. A rendszerben azonban mégis létezik egyfajta *hosszú távú memória*. Maga a részpakli az, amely magán viseli létrehozásának körülményeit. Azt mondhatjuk, hogy a rendszer ebben a sajátos értelemben „emlékszik”

a múltjára.  $H>0,5$  esetén tehát olyan úgynevezett *trendtartó idősorral* van dolgunk, amelyben növekedést 0,5-nél nagyobb valószínűséggel szintén növekedés követ, csökkenést pedig csökkenés. Mindez persze addig tart, amíg a joker elő nem kerül. Ez is természetesen a véletlennek van kitéve, tudjuk azonban, hogy átlagosan huszonhét húzást kell kivárnunk, hogy ez bekövetkezzék. Az újrakeverés új helyzetet teremt, de csak annyiban, hogy a sorsolás alapjául szolgáló részpakli aszimmetriájának mértéke, esetleg iránya megváltozik, de az aszimmetria maga megmarad.

Könnyű belátni:  $H<0,5$  a fentieknek éppen a fordítottját képviselné. Itt egy felfelé irányuló lépés után 0,5-nél nagyobb valószínűséggel számíthatunk arra, hogy csökkenés fog bekövetkezni, és megfordítva.

#### *Nemlinearitás a Budapesti Értéktőzsdén*

Ugyan miért érdekes, hogy a Nílus vízállása a Hurst-exponens szempontjából ilyen különösen viselkedik, ha épp az imént állapítottuk meg, hogy a legtöbb tőzsdeindex időbeli dinamikája a véletlen bolyongáshoz hasonló? Lehet, hogy meglepő, mégis igaz, hogy a Budapesti Értéktőzsde indexének, a BUX-nak viselkedése – az általunk elemzett 1991. január 2. és 2000. május 18. közti időszakban – inkább a Nílus vízállásának, semmint a világ nagy tőzsdéinek viselkedésére emlékeztet. Tipikusnak tekinthető a napi záróárfolyamok esete, amelyekre az *R/S* analízis eredményeként 2350 megfigyelésszámra  $R=0,987$  lineáris korrelációs együttható mellett  $H=0,7$  Hurst-exponens adódott (12. ábra).<sup>4</sup>

A 4. táblázatból pedig az is kiderül, hogy minden általunk alkalmazott mutató esetében lényegében ugyanilyen eredményt kapunk.

<sup>4</sup> Az ábra és a táblázat eredményeinek csekély eltérése abból adódik, hogy a 12. ábrán a súlyozás nélküli, míg a 4. táblázatban a súlyozott illesztés eredményeit mutattuk be.

Árfolyamok 1991.01.012 - 2000.05.18	Logaritmikus hozamok		Növekedési ütemek		Növekmények	
	$n_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}$		$n_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}$		$kt = P_t - P_{t-1}$	
	H	$R^2$	H	$R^2$	H	$R^2$
Záró	0,6686	0,999	0,68	0,998	0,68	0,999

4. táblázat • Az R/S analízis eredményei a Dow Jones-index esetében

A BÉT persze nyilvánvalóan nagyon fiatal tőzsde. A BUX-index alakulása alapján azonban már eddigi történetében is a stagnálás, gyors növekedés, illetve hektikus viselkedés különböző szakaszait különíthetjük el. Eredményeink érvényességének ellenőrzése érdekében még egy ilyen kezdetleges szakaszolási kritériumot alkalmazva is érdemesnek tűnt a különböző időszakokra külön-külön is meghatározni a Hurst-exponenst.

Az 5. táblázatból felsejlik néhány érdekes eredmény. Figyelemreméltó, hogy az utolsó időszakban a Hurst-exponens értéke a korábbiakhoz képest feltűnően csökkent. Ennek értelmezése azonban további elemzést igényelne. Ráadásul még erre az időszakra is igaz marad, hogy a BUX-index Hurst-exponense továbbra is igen magas. A BÉT tehát minden korábban elemzett nagy tőzsdétől eltér abban, hogy a 0,5-től nyilvánvalóan szignifikánsan eltérő Hurst-exponenst szolgáltat.

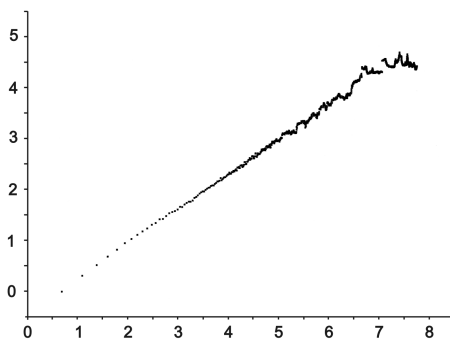
A BUX-index időbeli alakulása tehát véletlenszerű, de nem Brown-mozgás. A diffü-

zióra véletlen bolyongás esetében érvényes  $T^{0.5}$  „négyzetgyökös” szabály helyett ezúttal  $T^H = T^{0.7}$  összefüggés érvényesül. Az ilyen idősorokat Benoit Mandelbrot nyomán *fraktál Brown-mozgásnak* nevezhetjük. Ezek diagramjai vizuálisan is utalnak e véletlen folyamatok *trendtartó* jellegére – simábbak, mint a Brown-mozgás diagramja, s annál simábbak, minél nagyobb a Hurst-exponens mértéke, amit megerősít az is, hogy a diagram dobozszámláló dimenziója ezúttal a Brown-mozgásnál kapott  $D_B = 2 - \frac{1}{2}$  helyett általában  $D_B = 2 - H$ , míg a BUX-nál konkrétan  $D_B = 2 - 0,7 = 1,3$  összefüggés érvényesül.

Záró árfolyamok	Logaritmikus hozamok	
	$n_t = \log \frac{P_t}{P_{t-1}}$	
	H	$R^2$
1999.01.02 - 1994.02.02	0,673	0,996
1994.02.02 - 1995.12.29	0,703	0,998
1995.12.29 - 1997.08.06	0,688	0,997
1997.08.06 - 2000.05.18	0,613	0,993

5. táblázat • Az R/S analízis eredményei a BUX-index esetében, különböző időszakokra

A befektetői reakciók szempontjából eredményünk azt jelenti, hogy a BÉT-n a reakció nem azonnali. A befektető inkább kívár, és mindaddig figyelmen kívül hagyja a beérkező információkat, amíg nem rajzolódik ki valamilyen világos trend. A befektetők tehát kumulatív módon reagálnak az őket ért ha-



12. ábra • A BUX-index napi záró árfolyamainak R/S analízise

tásokra. Márpedig tanulmányunk elején említettük, hogy ha a „következmény (a rendszer reakciója) nem áll egyszerű arányosságban a kiváltó okkal”, az a nemlineáris rendszerek megkülönböztető jegye. Ebben az értelemben tehát, a BUX-index idősorának R/S analízise alapján, a BÉT-n nemlineáris viselkedést detektáltunk.

Napi árfolyamokról<sup>5</sup> lévén szó, gondot okozhat, hogy eddig nem szűrtük ki az autokorreláció lehetséges hatását. Az exponenciális trendtől, valamint az elsőrendű autoregressziótól megtisztított idősorral elvégzett elemzés azonban pontosan ugyanazokat az eredményeket szolgáltatta, mint korábbi számításaink a logaritmikusság hozamok esetében. A Hurst-exponensre  $R^2 = 0,999$  pontosságú illeszkedés mellett  $H = 0,686$  adódott.

Többféle egyéb ellenőrző számítás eredménye is azt mutatta tehát, hogy a BUX-index nem véletlen bolyongásként viselkedik, hanem erős trendtartó jelleggel bír. Az eredmény annál is inkább figyelemreméltó, mivel a napi árfolyamokról azt szokás feltételezni, hogy azok „zajosak”, s ezért Hurst-exponensük eleve alacsonyabb, mint a heti vagy havi bontású árfolyamoké.

#### A fázistér rekonstrukciója

A BUX-indexre kapott magas Hurst-exponens *nemlineáris* viselkedésre utal. Ettől persze még mindig származhatna nagy szabadságfokú, sok változós, sztochasztikus rendszerekből. Felmerülhet annak lehetősége is, hogy esetleg kevés változós, *kaotikus* dinamikus rendszerrel van dolgunk. Ennek eldöntéséhez tudnunk kellene, miként lehet egy alacsony dimenziójú, kaotikus és egy magas dimenziójú, nemlineáris, sztochasztikus folyamatot megkülönböztetni egymástól. A kérdésnek rendkívüli hordereje van a

<sup>5</sup> Megjegyezzük, hogy számos tőzsdeindex, így a BUX esetében is végeztünk a heti, illetve havi indexekkel, de ezek elemzése ugyancsak kívül esik jelen tanulmányunk keretein.

tőzsdeindexek esetleges előre jelezhetősége szempontjából.

Tudjuk, hogy kaotikus dinamikáról akkor beszélhetünk, ha a véletlenszerű, bonyolult időbeli viselkedést a Brown-mozgástól eltérően kevés változós determinisztikus rendszer állítja elő. Ehhez a dinamika mögött egy alacsony, maximum 3-5 dimenziós attraktort kell feltételeznünk. Ez azt jelentené, hogy létezik egy 3-5 változós determinisztikus rendszer, amely a tőzsdeindex mozgását meghatározza. A modellt azonban nem ismerjük. Ráadásul csak egyetlen idősor, jelen esetben a tőzsdeindex tényleges alakulása áll rendelkezésünkre. Ebből biztosan nem tudjuk előállítani magát az attraktort.

Előállíthatunk azonban valami hasonlót, amit igen egyszerű példával fogunk illusztrálni. A modern káoszelmélet egyik leggyakrabban hivatkozott példája a 4. *ábrán* általunk is bemutatott Hénon-attraktor. Tegyük fel, hogy valamilyen oknál fogva az attraktort előállító

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-2} & x_{n-1} & y_n \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & y_{n-2} & y_{n-1} & y_n \end{matrix}$$

adatpárok helyett csak az  $x$  változóra vonatkozó

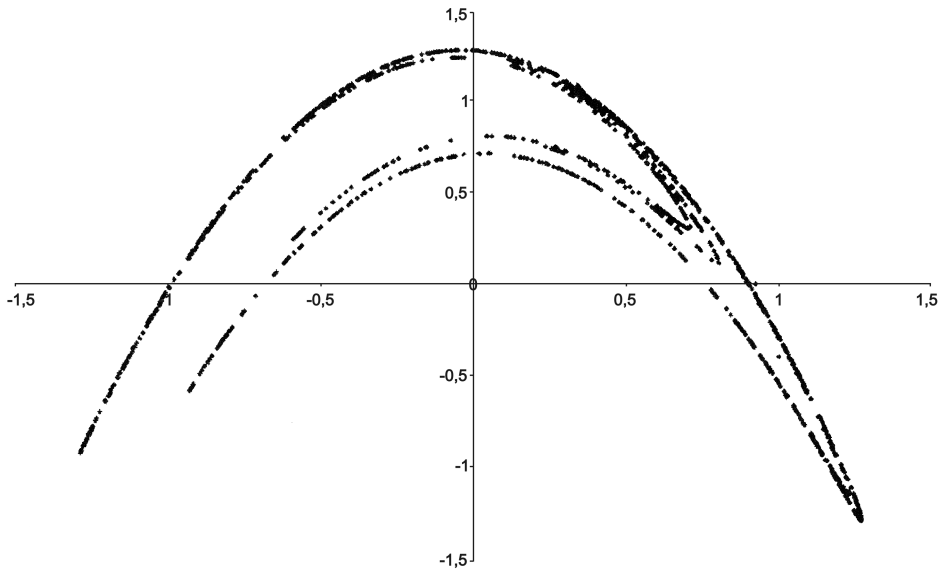
$$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad x_{n-2} \quad x_{n-1} \quad x_n$$

adatok állnak rendelkezésünkre. Amennyiben ez a változó valamilyen módon függ  $y$ -től, akkor feltételezhető, hogy ez a térbeli kapcsolat az  $x$  adatok időbeli egymásutáni-ságában is felismerhető. Toljuk el az  $x$  adatsort önmagához képest eggyel. Az így előállított

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n \\ x_2 & x_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & x_{n-2} & x_{n-1} & x_n & x_{n+1} \end{matrix}$$

adatpárokat ábrázolva világosan látszik, hogy a kapott alakzat nem azonos, de sokban emlékeztet az eredeti attraktorra. (13. *ábra*)

Általában is elmondhatjuk, hogy ezen az úton egy olyan alakzatot tudunk előállítani, amelynek fraktáldimenziója megegyezik az



13. ábra • A fázistér rekonstrukciója az Hénon-attraktor esetében

eredeti attraktoréval. Egy alakzat dimenziójára kapott eredmény persze függhet attól, hogy hány dimenziós a tér, amelyben a vizsgálatot elvégeztük. Síkban vizsgálódva egyetlen kockát sem láthatunk háromdimenziósnak. A Hénon-attraktor rekonstrukciójakor könnyű dolgunk volt, mivel tudtuk, hogy a második dimenzióval megállhatunk. Általában azonban nincs a birtokunkban ilyen információ, s az idősort az

$$\begin{array}{cccccccccccc} X_1 & X_2 & X_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & X_{n-2} & X_{n-1} & X_n \\ X_2 & X_3 & X_4 & \cdot & \cdot & \cdot & X_{n-2} & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} \\ X_3 & X_4 & X_5 & \cdot & \cdot & \cdot & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & X_{n+2} \end{array}$$

vagy akár az

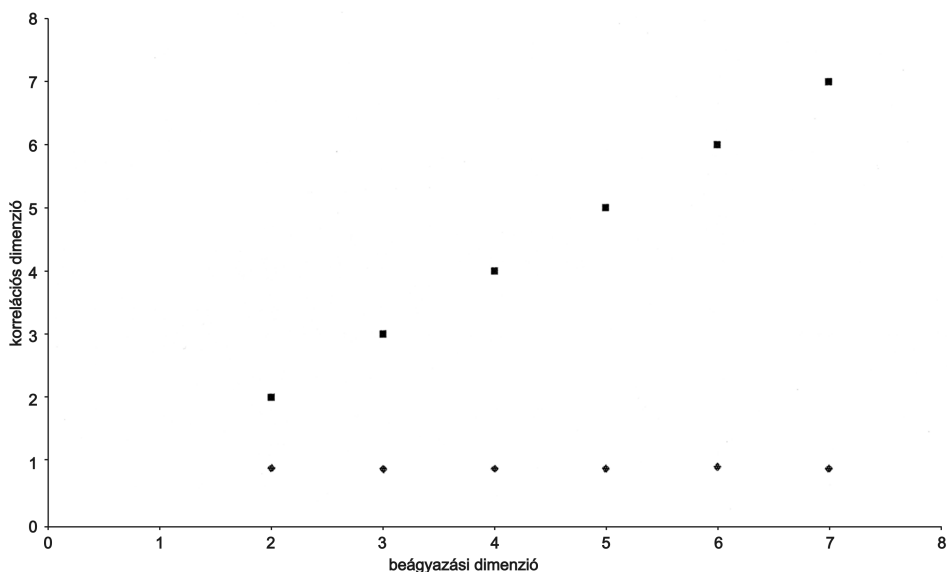
$$\begin{array}{cccccccccccc} X_1 & X_2 & X_3 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & X_{n-2} & X_{n-1} & X_n \\ X_2 & X_3 & X_4 & \cdot & \cdot & \cdot & X_{n-2} & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} \\ X_3 & X_4 & X_5 & \cdot & \cdot & \cdot & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} & X_{n+2} \\ X_4 & X_5 & X_6 & \cdot & \cdot & \cdot & X_{n-1} & X_{n+1} & X_{n+2} & X_{n+3} \end{array}$$

stb. adatok segítségével egyre magasabb és magasabb dimenziójú térbe kell *beágyaznunk*. Ha az attraktor dimenziója egy ponton túl már nem nő együtt a beágyazási dimenzióval, akkor ott egy alacsony dimenziós attraktor, következésképpen kaotikus determi-

nisztikus rendszer sejthető. Az Hénon-attraktor esetében a *korrelációs dimenzióra* kettes beágyazási dimenzió mellett *1,11* adódott, és ez még négyes beágyazási dimenzió mellett is csak *1,37*-re emelkedett. Az alacsony dimenziójú káosz jelenléte tehát ezúton is igazolódott.

Ugyanezzel a módszerrel a hosszú távú trendtől megtisztított BUX-index esetében a feltételezett attraktor dimenziójának a beágyazási dimenziótól való függése a *14. ábrán* látható módon alakult.

Szembevetendő, hogy miközben a beágyazási dimenziót kettőtől hétre emeltük, az attraktor dimenziója gyakorlatilag változatlan maradt, és alig tér el az egytől. Elhamarkodott dolog lenne azonban ebből máris egy egydimenziós determinisztikus rendszer létrehozásához következtetni. Egyáltalán nem magától értetődő ugyanis a fázistér rekonstrukciója során alkalmazott késleltetések nagysága. Mi csak az egyszerűség kedvéért döntöttünk úgy, hogy az  $x$  változót mindig egyesével léptetjük odébb. Márpedig a túl kicsi késleltetés azt eredményezheti, hogy az attraktornak csak egy egészen kis területén vizsgálódunk,



14. ábra • Az attraktor korrelációs dimenziójának beágyazási dimenziótól való függése a BUX-index esetében

amiből félrevezető következtetéseket vonhatunk le az attraktor egészének szerkezetére vonatkozóan. A kettes beágyazási dimenzió esetében például az

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & \dots & \dots & X_{n-2} & X_{n-1} & X_n \\ X_2 & X_3 & \dots & \dots & \dots & \dots & X_{n-1} & X_n & X_{n+1} \end{matrix}$$

helyett alkalmazhattunk volna valamilyen

$$\begin{matrix} X_1 & X_2 & X_3 & \dots & \dots & \dots & X_{n-2} & X_{n-1} & X_n \\ X_{1+L} & X_{2+L} & X_{3+L} & \dots & \dots & \dots & X_{n-1+L} & X_{n+L} & X_{n+1+L} \end{matrix}$$

párokat is. Hogy az  $L$  mekkora legyen? Nos,

ez azoknak a rendkívül fontos és igen nehezen eldönthető technikai részletkérdéseknek az egyike, amelyek megoldása nélkül a módszer pontos kivitelezése elképzelhetetlen, s amelyek miatt részletes tárgyalását egyelőre későbbre halasztjuk.

Kulcsszavak: *dinamikus rendszerek, káosz, véletlen bolyongás, nemlineáris idősorok, R/S analízis, fázis tér rekonstrukció*

#### IRODALOM

Barnsley, M. (1988). *Fractals Everywhere*, San Diego, CA, Academic Press

Einstein, A. (1905). Nyugvó folyadékban lebegő részecskéknek a hő molekuláris elméletéből következő mozgása, In: Albert Einstein, *Válogatott tanulmányok*, Gondolat, Budapest, 1971.

Fokasz N. (1999). *Káosz és fraktálok*, Új Mandátum Kiadó, Budapest

Gleick, J. (1988). *Chaos. Making a New Science*, Penguin Books, (magyarul: Káosz, Göncöl Kiadó, Budapest, 1999.)

Li, T. Y. és Yorke, J. A. (1975). Period Three Implies Chaos, *American Mathematical Monthly*, **82**, 985-92

Marotto, F. R., (1978). Snap-Back Repellers Implies Chaos in,  $R^n$  *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **72**, 199-223

May, R. M. (1976). Simple Mathematical Models with very Complicated Dynamics, *Nature*, **261**, 459

Muraközy Gyula A káosz elmélete és tanulságai. In: Fokasz Nikosz (szerk.): *Rend és káosz*. Replika Könyvek, Budapest, 1977

Ruelle, D. (1991). *Chance and Chaos*, Princeton University Press, Oxford

Stewart, I. (1989). *Does God Play Dice?*, Blackwell Publishers

Stewart, I. és Golubitsky, M., (1992). *Fearful Symmetry. Is God a Geometer?* Blackwell Publishers