

A kockázatok matematikai kezelése

Dolgozatunk célja összegyűjteni minden esetet, ahol a véletlennek valamilyen szerepe lehet. Gyerekesnek tűnhet ez, védekezésül csak azt hozzuk fel, hogy sokak szerint a valószínűségszámítás alapfogalmai nem jók. Lehet. Mi mindenesetre megpróbáljuk szélesre tárni a kaput. Mint minden, ami él, a véletlen is néha hasznos, néha káros. Jellemző lehet szembeállítani ezeket az eseteket, és megmutatni mögöttük a két ellentétes folyamat összefonódását: a rend apró hiányosságaiból kialakuló (esetleg magasabb szintű) struktúrákat és a káosz mélyén rejtőzködő törvényt.

Általános értelemben kockázatnak nevezünk mindent, ami nem teljes információjú döntéssel kapcsolatos. A kockázat kezelésének különböző módszerei vannak, ezek valamilyen értelemben mind redukálják a helyzet bizonytalanságát. A redukció egyik módszere tulajdonképpen nem csökkenti a lehetőségek számát, csupán rangsorolja azokat annak függvényében, hogy milyen mértékben számíthatunk a bekövetkezésükre. Ez általában a sztochasztika, közelebbről a valószínűségszámítás eszközeinek az alkalmazásával válik lehetségessé.

Egy kis filozófia

Az európai gondolkodás apollói jellegű: szereti a fényt, kerüli a homályt, elutasítja a tudatlanságot. Csak korlátok mögül szeret a szakadékokba kukucskálni, borzongani olyan veszélyektől, amelyektől védve tudhatja magát. Önnön tudatunk korlátait önnön tudatunkkal kimérni nehéz küzdelmekben kellett megtanulnunk, ha egyáltalán megtanultuk. Ebben a folyamatban a matematikának mindig kettős funkciója volt. Bizonyosabbnak kellett lennie minden más tudománynál, és amilyen mértékben körvonalazódtak korlátaink, olyan mértékben vált szükségessé ezek számokkal történő jellemzése. A valószínűségszámítás eszközeinek alkalmazása képes csökkenteni a véletlen káros hatásait, de ezen túlmenően fontos a sztochasztikának az a szerepe, hogy pontosan meghatározza a bizonytalanság mértékét. Ha jól működik, olyan, mint az orvos: segít, ahol tud, de ahol nem segíthet, ott kötelességének tartja tevékenységének korlátait világosan kijelölni.

Továtűnő századunk bőségesen szolgáltat példát olyan felfedezésekre, amelyek mind azt bizonyítják, hogy valamit nagyon sokáig rosszul tudtunk. A radioaktivitás, a tömeg és energia egymásba alakulása száz év alatt váratlan felfedezésből utcai közhellyé vált. Meg lehet-e most mondani, száz év múlva milyen eredmények veszik át a helyüket? Csak azt a világot ismerhetjük meg, amit kézbevevünk, és ami ezért magán viseli kezünk nyomát. Mit csinál a világ, amikor nincs a kezünkben? Nem vagyunk fizikusok, meg nem tudnánk mondani, meg lehet-e határozni. Divat a misztika minden ága és divat ennek

mindenfajta elutasítása. 1908 táján *Freud* és *Jung* ígéretesen induló együttműködése azért vált kibékíthetetlen ellenségeskedéssé, mert fénylő öntudatunk homályba vesző határait nem ugyanott vonták meg, és nem tudtak megegyezni abban, mit kell mondanunk a laikusoknak arról, mit gondoljanak a laikusok arról, amiről egyáltalán semmit sem tudhatnak még a beavatottak sem.

Gödel eldönthetelenségi tétele

A *Bolyaiak* révén a platói axiomatikus gondolkodás nemzeti sajátosságunknak mondható. Minden axiómarendszerben megfogalmazható olyan kérdés, amit azon az axiómarendszeren belül nem lehet megválaszolni. Tetszés szerint választhatunk axiómarendszeret, amelyekben magunk írjuk elő, hogyan viselkedjenek a párhuzamosok, avagy mi legyen a kontinuum-hipotézissel. A kiválasztási axiómának nevezett halmazelméleti feltételt egy időben a matematikusok egy része nem akarta elfogadni. A tudomár yok a matematikától várják egzaktságuk megalapozását, miközben a matematika agyaglábu óriássá vált: fogalmunk sincs, mi hiányzik igazán, mit hoz még a jövő ebben a folyamatban, hiszen igaz ugyan, hogy mikor János vitéz elpusztította a boszorkányokat, közben egyre világosabb lett, de mit tegyünk, ha újabb felfedezéseink során sokszor az a kellemetlen érzésünk támad, mintha miattuk egyre sötétebb lenne, legalábbis abban az értelemben, hogy hirtelen kiderül, korábban nem is volt olyan világos, amint azt hittük.

Katasztrófa-elmélet

Huszonöt éve divatosá vált a differenciálegyenletek vizsgálata során feltárt néhány aránylag egyszerű struktúra-tételre azt mondani: no most ezek mindent megmagyaráznak az életben. Csak részben tették, ezt a kissé kénköszagú funkciójukat azóta más témák vették át, valószínűleg ezek is csupán ideiglenesen.

Káosz

Most a kaosz talán a legkénköszagúbb, részben azért, mert matematikai vizsgálata szokás szerint nehezen követi a fizikusok empirikus észrevételeit. A fraktálok világa inkább csak esztétikus játéknak mondható. De azt a gondolatot szépen illusztrálja, hogy a részekben tükröződik az egész.

Evolúció-elmélet

Kicsit eltávolodva a tudományoktól láthatjuk, hogy a matematika „árasztásos módszerrel” terjed: a fizika—kémia—biológia—orvosi tudományok mentén csak fokozatosan lépi át a természettudományok és bölcsészet tradicionális határait. Ebben a folyamatban külön nyomon követhető a bizonyosság-bizonytalanság egymást követő hulláma. A felvilágosodás bizonyosságával felállított darwini elképzelést szerintünk ma még mindig csak a hiedelmek világába sorolhatjuk, noha folyamatos itt is a „most már egészen bizonyosan tudjuk” közlések megjelenése. Újabban épp a bizonytalanság eszközei dominálnak itt is: természetes gondolat, hogy amiként a kozmosz a kaoszból emelkedett ki, ezt tette az élet is. Egyáltalán elképzelhető, hogy *Gács Péternek* egy aránylag ezoterikus matematikai konstrukciója nincs is olyan távol attól, hogy az élet keletkezésének rég keresett kulcsa legyen: világunk egymásba skatulyázott önálló egységek végtelen láncolata, amelyek kialakulásuk során egy darabig egymástól függetlenül saját életüket élik, aztán egymás vonzásába kerülve kölcsönösen rabul

ejtik egymást, újabb egységekké szerveződnek. Bozonok, kvarkok, atomok, vegyületek, nukleotidok, fehérjék, élő sejtek, többsejtű élőlények, ezek csoportulásain át ma még nem látjuk, hova fut tovább a láncolat, ha egyáltalán van tovább út, és ha van, hogyan lehet azt megtalálni.

Az élő rendszerek hierarchikus egymásraépülése miatt nemcsak az élet eredetének megértéséhez kell tisztáznunk ezeket a kérdéseket, hanem az élő szervezetek megvédéséhez, gyógyításához is: az evolúció nagy léptékű folyamatai kismértékben megismétlődnek az egyedi életben is, szerepük van a veleszületett rendellenességek kialakulásában, öröklődésükben, a rosszindulatú daganatok keletkezésében és az immunrendszer működésében is. Hasznos és veszélyes egyszerre az önszerveződés, ha egyáltalán értelmezhetőek ezek az értéktételek ilyen nagy léptékű folyamatokkal kapcsolatban.

Biztosítások

Amit megismerünk, megbarátkozunk azzal. Így a véletlen is — áttörvén az ismeretlenség kénköszagú burkát — szerencsejátékok szórakoztató világa után prózaibb szerepeket kapott életünkben. A kockázatok kezelésének általános módszere azok megosztása az érintettek között. Itt a kalibrálás, centiméterrel való méricskélés hétköznapi szükséglet akkor is, ha a folyamatos változás ezt sokszor megnehezíti. A változások olyan felgyorsult szakaszában, mint napjainkban, időnként el is lehetetleníti. A sztochasztika statisztikai alkalmazásai során szerzett legfontosabb tapasztalásunk az, hogy a véletlennek ugyanúgy egyénisége, saját arca, ujjlenyomata van, mint egy embernek, vagy bármilyen más bonyolultabb rendszernek. Egy kívülálló hajlamos úgy gondolni a véletlenre, mint valamilyen alakatlan és kiismerhetetlen masszára: ez nem igaz, az viszont tény, hogy van ilyen véletlen is (kicsit talán pontatlan kifejezéssel azt szoktuk mondani, hogy ez a „tisztá” véletlen), és a bonyolultabb lehetséges arcvonásokról még nagyon kevés, csak fokozatosan kialakuló elképzelésünk van.

A *kockázat* fogalma nem azonos a véletlennel, szokásos értelmezés szerint

a) egy ember vagy csoport tudatos cselekedete, döntése esetén beszélhetünk kockázatról, ami

b) a jövőben várható következményeknek valamilyen előre nem látható, a tervezettől eltérő fordulata során

c) kedvezőtlen, káros kimenetelre vezet, és sokszor

d) a cselekvést végző, a döntést hozó személy maga váltja ki, esetleg a bonyolultabb folyamatban részt vevő egységek szervezetlensége révén.

Napjainkban nagy hatása van a véletlennek a gazdasági és a piaci életre. A hatvanas évek hőskorában elterjedt nézet volt az, hogy modern és hatékony ipari tevékenység csak matematikai eszközök, közelebbről az operációkutatás módszereinek az alkalmazásával lehetséges. A megbízhatóság-elmélet, a döntési folyamatok elmélete, a játékelmélet, a sztochasztikus folyamatok vezérlésének módszerei, az alakfelismerés technikájával együtt a szakértői rendszerek, a mesterséges intelligencia, robotika témába épültek be napjainkra, de a matematika mindenhatóságába vetett hit gyengülni látszik. A romantikus túlzások után egyszerűen használják a matematikát a döntések előkészítésében. A pénzügyi matematikában a kockázat jelentősége például a befektetések megválasztásakor merül fel, egy befektetési tervet, portfóliót immunizálhatunk a benne szereplő elemek kockázati jellegének alkalmas vegyítésével. Sok esetben maga

a számítástechnika mint a gondolkodást segítő eszköz önmagában elegendő, más esetekben viszont magát a gondolkodást is a rendszernek kell elvégeznie azért, mert a lehetséges esetek számbavétele az emberi gondolkodás számára egyszerűen lehetetlen.

Találkozásunk a kockázatokkal néha aktív, néha passzív, van úgy, hogy mi vadászunk másra, és előfordul, hogy ránk vadásznak. A passzív találkozásnak legszemléletesebb példája a folyók menti gátrendszer. Magassága, karbantartása megbízhatósága időtartamban mérhető: mondjuk kétszáz éve nem fordult elő magasabb árvíz. (Számptalan példa látható napjainkban, amikor az ilyen rekordok sorra megdőlnék a megváltozott körülmények miatt.) Az aktív kockázatvállalásra a tipikus példa az üzleti élet. Mindenki maga tudja önmagának lemérni, az ér-e többet neki, hogy egy év múlva vagyona tíz esetből egyszer megtízszereződhet, különben a többi esetben elvész, vagy tíz év múlva biztosan megkétszereződik.

Modellépítés

A jelenségek okainak vizsgálatában fontos szerepe van a reprodukciójuknak. A matematikai tételek egy része bizonyos matematikailag jól körülhatárolható dolgok létezését állítja. Ezt gyakran nem értik a laikusok: azokban az esetekben, amikor a szóban forgó dolog túl közel van a valódi megfelelőjéhez, azt hiszik, az objektív létezés eleve biztosítja az elméleti szükségszerűséget is. Hasonló gondot okoz a véletlen szerepének pontos megértése. Századunk fizikájának néhány alapvető eredménye arra utal, hogy a véletlen egyrészt az anyag alapvető, mással nem helyettesíthető tulajdonsága, másrészt kiiktathatatlan az anyaggal való kapcsolatunkból. Mégis egy konkrét jelenség leírásánál hasznos különválasztani a folyamatban eleve benne levő véletlent a megfigyelése során keletkezőtől. Ez utóbbi esetben ismét két eset lehet: magának a megfigyelésnek a megváltoztatásával a véletlen szerepe csökkenthető, esetenként teljesen kiiktatható, vagy a megfigyelés eleve csak bizonytalan információkkal szolgálhat. Más esetekben igaz ugyan, hogy a véletlen szerves része a vizsgált folyamatnak, de a nagy számok törvénye miatt egyszerűen láthatatlan. Ez a jelenség az oka annak, hogy csak fokozatosan terjednek a sztochasztikus módszerek. Sok esetben nincs is különbség a determinisztikus és sztochasztikus modellek között.

Sztochasztikus számítástechnika

A palackból kiszabadult szellem szolgálai munkára fogásának legjobb példája a kiszámíthatatlan véletlen alkalmazása azoknak a konkrét, determinisztikus számítási feladatoknak a megoldásában, amelyek tradicionális eszközökkel napjaink technikai feltételei mellett egyszerűen lehetetlenek. Csak utalni tudunk itt a hazai számításméleti iskola fontos sztochasztikus eredményeire: hashing, rendezés, többdimenziós integrálok kiszámolása, a matematikai bizonyítások helyességének automatikus ellenőrzése.

Ramsey-számok

Egy tizenkét fős társaság szilveszterkor azzal töltötte az időt éjjelig, hogy minden lehetséges módon párokat alkottak a társaság tagjaiból (66 eset) és mindegyikre fej-írás alapján eldöntötték, koccsintsanak-e éjjelkor. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott koccsintási rendben igaz az, hogy bárhogy

veszünk is a társaságból négy embert (495 lehetőség), azok között mindig van kettő, akik koccintottak egymással, és van kettő, akik nem koccintottak?

No de ne álljunk meg félúton: található-e olyan koccintási rend, amelyben igaz az, hogy bárhogyan választunk is ki a társaságból négy embert, közöttük pontosan három olyan pár van, akik koccintottak egymással, és három olyan, akik nem koccintottak. Szeretnénk ugyanis tökéletes rendet kialakítani: ha elhatároztuk, hogy a társaságban csak az összes lehetséges koccintásnak fele, 33 történik meg éjfélkor, akkor ezt a társaság minden részére érvényesíteni akarjuk. Végül is miféle igazság az, ami csak általában érvényesül? Ebben az ártatlannak tűnő kérdésben a sztochasztika újabb arca ismerhető fel: ott is jelen van, ahol a legkevésbé várnánk: a szabályosnak, tökéletesnek hitt rendszerek vizsgálatában. Erdős Pál és tanítványai számtalan esetben alkalmaztak sztochasztikus módszereket a matematika klasszikus feladatainak a megoldására.

Pszichológia és szociológia

Lelki életünk folyamatai valószínűleg legalább olyan mértékben sztochasztikusak, mint az elemi részecskék. Szaporodnak a példák arra, hogy ha még nem is világos teljes mértékben a működésük, azok utánzása hatékony számítástechnikai módszereket eredményez. A társadalomban együtt élő, egymásra hatással levő egyedek rendszerének vizsgálata a kvantumfizika által felderített nehézségekkel küzd: minden vizsgálat hatással van arra, amit vizsgál. És nem látjuk a teljes képet, mindig csak a vetületét. Ezért olyan vizsgálati módszerekre van szükség, amelyek a részekből képesek összeállítani az egészet.

Tetszőleges méretű társaság játszhatja tetszőleges ideig a következő játékot. Mindenki felír egy cédulára egy pozitív egész számot. Az nyer, aki a legkisebb olyan számot írta, amelyet csak egy ember írt. Egymást követő játékok során a játékosok nyeréseik számát gyűjtik, az egész folyamatot az nyeri, aki legtöbbször nyert. A tapasztalat azt mutatja, hullámlások alakulnak ki: a nyertes szám egy ideig nagyon kicsi, aztán hirtelen megnő. A többszemélyes játékok alapvető veszélye a koalíció kialakulása: néhány játékos hamar rájön arra, hogy ha titokban együttműködnek, azzal a csoport tagjai növelni tudják a nyerési esélyeiket.

Meg lehet-e tanulni egyáltalán a demokráciát? Bizonyítható-e az, hogy sok játékos egymástól függetlenül öncélú tevékenysége azon túlmenően, hogy az egyes játékosoknak hasznos eredményre vezet, valamiféle közös célfüggvényt is optimalizál? Mekkora a veszélye annak, hogy egy ilyen rendszer kaotikussá válik? Modern életünknek sok baja származik abból, hogy apró rendszerek hierarchikusan egyre nagyobb és bonyolultabb rendszerekké szerveződnek, amelyeknek a működési zavarai csak azután jelentkeznek, hogy maguk a rendszerek már kialakultak, visszavonhatatlanul ellehetetlenítve az apró egységek önálló létezését. Egyszerűbb esetekben csak az okoz gondot, ha rosszul irányítunk egy rendszert: megzavarjuk az egyensúlyi helyzet kialakulását, vagy képtelenek vagyunk arra a pályára vezérelni, amiről tudjuk, hogy helyes. Úgy gondoljuk, ezekben a helyzetekben a matematika legnagyobb haszna az lehet, ha a maga viszonylagosan tiszta eszközeivel szétválasztja azokat a dolgokat, amiket valóban tudunk azoktól, amiket csak tudni vélünk.

Zárszó

Csak töredékéről volt eddig szó mindannak, ami a témához tartozik. Ha a bevezetőben azt mondtuk is, hogy minden esetet össze szeretnénk gyűjteni, ahol a véletlennek valamilyen szerepe lehet, ezt nem gondolhattuk komolyan. Így is éppen csak említeni tudtunk néhány szerintünk fontos témát. Mindazoktól viszont elnézést kérünk, akik valamiért más véleményen vannak: ez ilyen jellegű téma: akik művelik, erősen kötődnek hozzá, ezért alakul ki vele kapcsolatban sokféle vélemény.

IRODALOM:

- N. Alon—J. H. Spencer: The probabilistic method, Wiley, 1992.
- Bognár Jánosné—Nemetz Tibor—Tusnády Gábor: Ismerkedés a véletlenel, Tankönyvkiadó, 1980.
- F. Bródy—T. Vámos: The Neumann compendium, World Scientific, 1995.
- A. Czeizel—L. Telegdi—G. Tusnády: Multiple congenital abnormalities, Akadémiai Kiadó, 1986.
- A. Czeizel—G. Tusnády: Aetiological studies of isolated common congenital abnormalities in Hungary, Akadémiai Kiadó, 1984.
- Csányi Vilmos: Evolúció vagy Teremtés: Mitoszok vitája? Magyar Tudomány, 42(1997) 1281—1293
- Csirmaz László: 99%-os bizonyítások, Akadémiai felolvasó előadás, Budapest, 1998.
- M. Eigen—R. Winkler: A játék, Gondolat, 1981.
- M. H. Freedman: P/NP, and the quantum field computer, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 95(1998) 98—101.
- P. Gács: Reliable computation with cellular automata, Journal of Computer System Science 32(1986), 15—78.
- R. L. Graham—B. L. Rothschild—J.H. Spencer: Ramsey theory, Second Edition, Wiley 1990.
- Juhász-Nagy Pál: Az eltűnő sokféleség, Scientia Kiadó, Bp. 1993.
- S. A. Kauffman: The origins of order, Self-organization and selection in evolution, Oxford U. P. 1993.
- Lovász László—Gács Péter: Algoritmusok, Műszaki Könyvkiadó, 1978.
- L. Lovász—M. Simonovits: Random walks in a convex body and an improved volume algorithm, Random Structures and Algorithms, 4(1993), 359—412.
- B. B. Mandelbrot: The fractal geometry of nature, W.H. Feeman, 1983.
- J. Maynard Smith—Szathmáry Eörs: Az evolúció nagy lépései, Scientia Kiadó, Budapest, 1997.
- A. Prékopa: Stochastic programming, Akadémiai Kiadó, 1995.
- D. N. Schramm: The age of universe, dark matter, and structure formation, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 95(1998) 1—1.
- B. H. Singer—S. Pincus: Irregular arrays and randomization, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 95(1998) 1363—1368.
- Székely J. Gábor: Paradoxonok a valószínűségszámításban és a matematikai statisztikában, Műszaki Könyvkiadó, 1983.
- Székely J. Gábor—Tusnády Gábor: A véletlen filozófiai kérdései matematikai szempontból, Magyar Tudomány, 11(1987), 832—840.
- T. Tada: The immune system as a supersystem, Annu. Rev. Immunol. 15(1997) 1—13.
- Tusnády Gábor: Hashing, Matematikai Lapok, 33/1—3(1986), 143—148.
- Tusnády Gábor: Mutáció és szelekció, Magyar Tudomány 42(1997), 792—805.
- G. Tusnády: Statistical analysis and prediction of Hungarian mortality curves, In: É. Erlich—G. Révész: Human resources and social stability during transition in Hungary, 242—253, International Center of Economic Growth, San Francisco, California, 1995.
- Tusnády Gábor: A rákkutatás matematikai alapjai, Alkalmazott Matematikai Lapok, 16(1992), 115—130.
- Vajda György: Kockázat és biztonság, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1998.
- Varga Zoltán: Személyes gondolatok az evolúcióról, Magyar Tudomány, 9(1998), 1029.