Perjés Zoltán

Szimmetriák a fizikában

Szimmetriákkal lépten-nyomon találkozunk az élettelen és az élő természetben. A fizika leghatékonyabb módszerei is felhasználják a szimmetriatörvényeket. Amint elmerészkedünk a legparányibb részecskék világába vagy éppen a világegyetem egészének átfogó szerkezetéig, e határterületeken kevés olyan használható eszköz áll rendelkezésünkre, mint a szimmetriák tanulmányozása.

Ahol elnémul a szó, ahol a köznyelv képtelen a mindennapi életben elő sem forduló összefüggések megfogalmazására, ott előtérbe kerülnek az általános érvényű természettörvények és ezek hordozói, a matematikai összefüggések. A szimmetriatörvények például kifejezésre juttatják, hogy egy jelenség vagy tárgy nem változik meg valamilyen átalakítás hatására.

A szimmetriákat sokszor az esztétikával hozzuk összefüggésbe. Az emberi test, az azt ábrázoló képzőművészeti alkotások arányai, vagy amelyekkel a természetben, építészetben újból és újból találkozunk, a szépség érzését keltik bennünk. A matematika semmit sem tud kezdeni érzésekkel. A matematikai leírás a szimmetriák általánosan érvényes tulajdonságait ragadja meg. Ezeknek vajmi kevés közük van az esztétikához. Ehelyett az lesz a kérdés, hogy egymás után végrehajtott szimmetriaműveletek milyen újabb szimmetriaműveletet hoznak létre. A műveletek ilyenfajta kombinálását *szorzás*nak nevezzük. Vegyünk például egy álló szabályos emberi alakot. Ha tükrözzük a középen átmenő függőleges síkra nézve, akkor önmaga tükörképébe megy át, ami erősen hasonlít az eredeti alakhoz. Például helyet cserél a bal és a jobb váll. Jelöljük ezt a műveletet P-vel. Ha megismételjük a tükrözés műveletét, az annyi, mintha egyáltalán nem csináltunk volna semmit. Másképpen, az alakot pontosan önmagára képeztük le. Így például a bal váll képe a bal váll lesz. Az azonos (identikus) leképezést I-vel jelölve, a tükrözés eme egyszerű tulajdonságát így foglalhatjuk össze: $P \cdot P = I$. Fennáll továbbá, hogy a tükrözés után semmit sem csinálva ismét a tükrözést kapjuk: $P \cdot I = P$. Az ilyenféle matematikai struktúra neve: *csoport*. A szimmetriák matematikai elmélete a *csoportelmélet*.

Matematikai szempontból a szimmetriáknak kétféle változatuk van: a véges (diszkrét) és a folytonos szimmetriák. Előbbiekre éppen az imént mutattunk be egy egyszerű példát, és folytonos szimmetriákra is gyakran rábukkanunk. Például egy gömb önmagába fordul át, ha a középpontja körül tetszőleges szöggel elforgatjuk.

Mind a folytonos, mind pedig a diszkrét szimmetriacsoportokat felbonthatjuk bizonyos összetevőkre, melyeket egyszerű csoportoknak nevezünk. Az egyszerű csoportok meghökkentően kevés változatban fordulnak elő. A folytonos csoportok elméletét már a múlt században kidolgozta *Sophus Lie* norvég matematikus, és az elmélet alapjai alig változtak. (A diszkrét csoportok rendszerezése viszont csak néhány éve fejeződött be, röviddel a Szörny csoport felfedezése után).

A fizikában a *véges szimmetriák* és a *Lie-csoportok* egyaránt roppant jelentőségűek. Az általános érvényű természettörvényekről a kvantumrészecskék tükrözési szimmetriáinak tanulmányozása útján meglepő új ismeretekhez jutottak a részecskefizikusok. A *P* paritást és a vele kombinált *C* elektromos töltéstükrözést sértő részecskebomlások felfedezéséért több fizikai Nobel-díjat ítéltek oda. A diszkrét szimmetriajelenségeket *Nagy Tibor* már korábban taglalta a Weyl-kötet magyar fordításához[1] írt kitűnő kiegészítésében, ezért most a *folytonos szimmetriák és a fizika összefüggéseire* fordítjuk figyelmünket.

Ahol a szó elakad, ott a modern fizika gyakran a mezőelmélet eszközeit hívja segítségül. A mező fogalma nem lehet senki számára idegen, hiszen mindannyian gravitációs, elektromágneses és egyéb mezők tengerében éljük életünket. A tér egy pontjához és az adott pillanathoz matematikai mennyiséget rendelünk hozzá. Például az elektromosság esetében ez a mennyiség a térerősség vektora. Úgy mérjük meg a térerősséget, hogy az adott helyre elektromos töltést teszünk és vesszük a reá ható erőt. A kvantumfizikában a részecskéket is mezők hordozzák. Ezzel fejezi ki az elmélet a kvantumrészecskék kettős jellegét: a terjedésük hullámszerű, kölcsönhatásaikban viszont részecskeként viselkednek.

Hogyan lehet alkalmazni a mezőelméleti módszereket egy adott fizikai problémához? Ehhez a természet egyik legátfogóbb törvénye, a *legkisebb hatás elve* szolgáltatja a kulcsot. A mezőkből fel lehet építeni egy olyan mennyiséget (ti. a hatást), amelynek a megváltozása az elképzelt fizikai folyamatok közül ott a legcsekélyebb, amely folyamat ténylegesen megvalósul. Ez meglehetősen misztikusan hangzik, és valóban az elmúlt századokban olykor az isteni beavatkozás példájaként emlegették. Tény, ami tény, a legkisebb hatás elve az elemi kölcsönhatások kvantumelméletétől a kozmikus törvényekig egyaránt érvényes. (Ezeknek a szertartásoknak az alapjai még a klasszikus mechanikában alakultak ki).

A fizikus két lépésben végzi el a hatás megszerkesztését. Először a fizikai mezőkből a Lagrange-függvényt szerkeszti meg figyelembe véve a leírt rendszer tulajdonságait. Majd a Lagrange-függvénynek a tér és az idő minden pontjában felvett értékét összeadva megkapja a hatást. Az így nyert hatással különféle műveletek végezhetők. Ha a tér mozgásegyenleteire vagyunk kíváncsiak, akkor rögzítjük az adott folyamat kezdő- és végállapotát, és kipróbáljuk, hogy melyek a hatás lehetséges értékei, ha a közbenső helyeken változtatjuk (variáljuk) a mezőket. Ha pedig azt keressük, hogy mely fizikai mennyiségek értéke marad változatlan a folyamatok során, akkor ugyancsak a hatás variálása útján ún. divergenciaegyenleteket vezetünk le. A divergenciaegyenletek a megmaradási törvényeket hordozzák matematikai alakban. A bennük szereplő mennyiségeket áramoknak nevezzük.

A szimmetriák és a megmaradási törvények közötti összefüggéseket századunk elején *Emmy Noether* német matematikusnő fogalmazta meg két tétel formájában.

Noether első tétele: Ha a hatás invariáns egy *r* paramétert tartalmazó folytonos szimmetriacsoporttal szemben, akkor a hatás variálása útján kapott egyenleteknek *r* darab független kombinációja divergenciaegyenlet lesz. Megfordítva is igaz: Ha a variálással *r* darab független divergenciaegyenletet kapunk, akkor a rendszernek *r* paraméteres folytonos szimmetriája van.

Noether második tétele a lokális szimmetriacsoportra vonatkozik; némi megkötéssel lényegében hasonló összefüggést fogalmaz meg *végtelen*, folytonos szimmetriacsoportokra.

A megmaradási törvényekkel szoros összefüggésben a fizikai mezőkhöz különféle *potenciálok* is tartoznak. Közülük talán a legismertebb a gravitációs és az elektromos mezőhöz tartozó potenciális energia, amely az adott helyen tartózkodó test munkavégző képességét méri. A mezők és a potenciáljaik között finom összefüggések vannak. Egy adott mező erőtere nem határozza meg teljesen a hozzá tartozó potenciálokat. Ismert tény például, hogy a gravitációs potenciál zérushelye önkényes; csupán a p és q pontok közötti potenciálkülönbség mérhető.

A mezőelmélet segítségével leírt potenciálokon végrehajthatunk olyan szimmetriaműveleteket, amelyek nem változtatják meg a hozzá tartozó mezőt. E transzformációknak két alapvető fajtájuk van. A *globális* transzformációk a tér minden pontjában azonos módon változtatják meg a potenciált, a *lokális* szimmetriák viszont helyről helyre másképpen. Az első lokális szimmetriát felmutató elmélet az elektromos és mágneses jelenségek Maxwell-féle elmélete (1868). Ez utóbbi elméleteket mértékelméletnek nevezzük.

A mértékszimmetriák fogalmát *Herman Weyl* vezette be 1920 körül, a gravitációs és elektromágneses jelenségek közös leírását keresve. Olyan elméletet javasolt, amely teljes szimmetriát mutat a tér tetszőleges megnyújtásával szemben. Ez az elmélet nem vette (és abban az időben még nem is vehette) figyelembe az elemi részek később ismertté vált tulajdonságait. De mértékszimmetriára épül az elemi részek ma használt szabványos modellje is.

A Szabványos Modell

Az elemi részek szabványos modelljének története 1954-re nyúlik vissza. A Brookhaven Nemzeti Laboratórium kutatói, *C. N. Yang* és *R. L. Mills* az erős kölcsönhatások közelítő szimmetriatulajdonságait tanulmányozták. A protonnak és a neutronnak az a tulajdonsága, hogy teljesen megegyező módon vesznek részt az erős kölcsönhatásban. Elméletükben ezt a tulajdonságot a két kutató izospin-szimmetriának nevezte. Ha mindenütt felcseréljük a protont és a neutront, ez megfelel annak, hogy az állapotot jellemző belső nyilakat az „izospin-térben" mindenütt azonos mértékben elforgatjuk. Ez a már említett globális szimmetriának egy példája. Yang és Mills azt a gondolatot vetették fel, hogy egy erősebb, lokális szimmetria is fennáll, vagyis az állapot nyilait a tér minden pontjában és minden időpontban függetlenül is elforgathatjuk. Ez a lehetőség, a magrészecske személyazonosságának pontról pontra történő megválasztása nem más, mint lokális mértékszimmetria.

Olyan esetekben, amikor a globális szimmetriát lokálissá alakítjuk át, más összetevőket is be kell vonnunk az elméletbe. Az izospin-invariancia esetében például hat új mező létezését kell feltételeznünk ahhoz, hogy a fizikai törvények invariánsak maradhassanak. E hat Yang—Mills-mező közül kettő az elektromos és a mágneses mezővel azonos és nem hordoz elektromos töltést. A többi is páronként értelmezhető és — mint a foton — szintén nulla tömegű. E két utóbbi pár azonban elektromos töltést is hordoz: az egyik pozitív, a másik negatív töltésű.

Ebben az alakban a Yang—Mills-szimmetria nyilvánvalóan tarthatatlan volt. Nem azért, mert a protont és a neutront azonos részecskeként kezelte, hanem főleg az elektromos töltést hordozó, nulla tömegű fotonok megjövendölése miatt. Ilyen fotonokat senki sem látott. Az elmélet szépségétől elbűvölt fizikusok ezért módszert találtak az elektromosan töltött kvantumok felruházására nyugalmi tömeggel. Ha a kvantumoknak tömeget sikerül találni, akkor a hatótávolságuk egyszeriben végessé válik. Ha a tömeg kellően nagy, akkor a hatótávolságot tetszőlegesen kicsire lehet méretezni. Így ezeknek a mezőknek a létezése egyszeriben összeegyeztethetővé válik a kísérleti eredményekkel. Ha az egyetlen hosszú hatótávolságú kvantum elektromosan semleges, akkor ez rögtön megkülönbözteti egymástól a protont és a neutront. Az izospin-invariancia csak közelítőleg teljesül. Az ilyenfajta közelítő szimmetria igen elterjedt a természetben (ilyen az emberi test tökéletlen bal-jobb tükörszimmetrája is).

Sajnos, a Yang—Mills-modellt ebben a módosított formában sem sikerült megmenteni. A nehézséget a benne előforduló mezők kvantumos változata okozta: az egyszerű elektromágnesség kvantumelméletével ellentétben nem lehetett belőle kigyomlálni a matematikai végteleneket. Így a Yang—Mills-modellt nem lehetett a mérési eredményekkel megbízhatóan összehasonlítani. Ez 1970-re vált nyilvánvalóvá *M. G. Veltman* és *G. 'tHooft* utrechti kutatók számára[2]. Orosz matematikusok (*L. Fagyejev, V. Popov, E. Fradkin* és *I. Tyutyin*) azonban úgy találták, hogy az eredeti, nulla tömegű részecskéket tartalmazó Yang—Mills-modell kvantumos mezőelméletét rendbe lehet hozni. *Peter Higgs* skót, *François Englert* és *Robert Brout* belga fizikus pedig új módszert találtak arra, hogy a Yang—Mills-mezők némelyikét tömeggel lássák el. Módszerük — melyet ma Higgs-mechanizmusnak neveznek — nem rontja el a pontos szimmetriát.

A Higgs-mechanizmus alapötlete, hogy olyan mezővel bővítsük ki az elméletet, amely nem tűnik el üres térben sem. Csakúgy, mint a szimmetria fogalmát, az üres teret is gyakran másképpen értelmezzük, mint a mélyebben szántó elmélet. Filozófiailag nézve az üres tér az, amiben nincs semmi. A fizika azonban pontosabban definiálja az üres teret: az az állapot, amelyben a mezőknek a lehetséges legkisebb energiájuk van. A legtöbb ismert mezőnek akkor a legkisebb az energiája, ha a térerősség a legkisebb, vagyis a mező kikapcsolt állapotban van. Például az elektronmezőnek akkor van a legkisebb energiája, ha nincsenek elektronok. A Higgs-mező azonban más tulajdonságú. A kikapcsolásához energia szükséges. Akkor legkisebb az energiája, ha a mező értéke a téridő minden pontjában pozitív állandó. Ez az állandó érték az izospintérben a Higgs-mező hossza lesz. Ehhez a vektorhoz tudjuk immár viszonyítani a többi mezők értékét pontról pontra. Így meg tudjuk különböztetni a protont a neutrontól.

A Higgs-mechanizmus a fizika más területein is ismert, spontán szimmetriasérülésnek nevezett jelenség egyik példája. A spontán szimmetriasérülés fogalmát *Werner Heisenberg* vezette be a ferromágneses jelenségek magyarázatára. Az izospin vektorának a ferromágneses anyagok esetében a mágnesezettség vektora felel meg. Heisenberg megjegyezte, hogy az elmélet tökéletes térbeli szimmetriát mutat, és mégis, a felmágnesezés után az anyag mágnesezettsége kitüntetett irányt vesz fel.

A Higgs-mezőnek csak nagysága van (iránya nincs) a téridőben, és ennek következtében spin nélküli részecskét képvisel. A Yang—Mills-fotonok viszont 1 spinű, nulla tömegű részecskék. A kvantumelméletben az 1 spinű részecskéknek háromfajta spinhelyzet áll a rendelkezésükre: a mozgásirányú, az azzal ellentétes és a mozgásirányra merőleges. Egyszerű mértani megfontolások alapján azonban látszik, hogy ezt az utóbbi spinállapotot kivételesen nem lehet elfoglalni, ha a részecskének nincsen tömege. Ha a részecske tömegre tesz szert, elveszíti ezt a tulajdonságát, és mind a három spinállapotot felvehetné. A spin a kvantummechanikában is szigorúan megmaradó mennyiség, ezért a harmadik lehetőségnek valahonnan jönnie kell, mégpedig a Higgs-részecske állapotából. Minden Yang—Mills-részecske beolvaszt magába egy Higgs-részecskét. Ennek következtében tömegre és három spinállapotra tesz szert, a Higgs-részecske pedig eltűnik.

A Yang—Mills-elmélet az erős kölcsönhatások modelljeként indult, de végül a gyenge kölcsönhatások elméletében találta meg alkalmazásait. 1967-ben *S. Weinberg* a Harvard Egyetemen, majd néhány év múlva *A. Salam* pakisztáni és *J.C. Ward* angol fizikusok megalkották a gyenge kölcsönhatásoknak a Yang—Mills-elméletre épülő, a Higgs-mechanizmussal kibővített modelljét. Ezt a mind kísérleti, mind pedig elméleti szempontól kielégítő eredményt 1979-ben a fizikai Nobel-díjjal honorálták. Mára, a kvarkelmélettel kiegészülve, az elemi részek Szabványos Modelljébe épült bele. A Szabványos Modellt minden eddigi megalapozott kísérleti eredmény alátámasztja.

A Geroch-csoport

Az általános relativitáselméletre jellemző geometriai szemléletmód bőségesen kínálja a természetben előforduló szimmetriák példáit. A téridő minden pontját négy szám jelöli meg: az adott eseménynek a három térdimenzióbeli helye és időpontja. Ezek a számok az esemény koordinátái. A koordináta-rendszer kezdőpontja ott van, ahol a négy szám mindegyike nulla. Ha egy másik pontban vesszük fel a kezdőpontot, akkor minden eseményhez másik négy szám kerül, de az így végzett számítások eredménye pontosan azokhoz az eredményekhez vezetne, mint a régi koordináta-rendszerben. Például bármely két pont között változatlan a távolság értéke. A koordináta-rendszer kezdőpontjának áthelyezhetősége természetes szimmetria.

A relativitáselméletben rendre megtalálhatjuk a mezőelmélet ismert tartozékait, és minden esetben szemléletes geometriai jelentéssel bírnak ezek. Így például a térerősség nem más, mint a téridő görbülete. A hozzá tartozó potenciál a pontok közötti távolságot meghatározó *mértéktenzor*. Eltérően más mezőelméletektől, itt a potenciál is közvetlenül mérhető, mégpedig idő- és távolságmérések útján. A gravitációs mező térerősségét pedig különféle viszonylagos gyorsulásokkal mérhetjük.

A gravitációs jelenségek leírásához elegendő a mértéktenzor ismerete. A mező szimmetriái közül is azok a legjelentősebbek, amelyeket a mértéktenzor mutat fel. A mértéktenzor szimmetriáit Killing-szimmetriának nevezzük tanulmányozójuk, a német *Wilhelm Killing* tiszteletére.[3] Ha ilyen szimmetriát mutat fel egy téridő, akkor annak minden pontjához tartozik egy szomszédos pontba mutató nyíl. A nyíl hegyénél lévő pontba áttéve az a téridő eredeti pontjait, a mértéktenzor nem változik meg. Az effajta nyilak összessége is a mező fogalomkörébe tartozik. E mező szokásos elnevezése: Killing-vektor. Ha például a mértéktenzor nem függ az időtől, akkor az ennek megfelelő Killing-vektor időirányba mutat, röviden: időszerű. A forgástengely körüli szimmetriához viszont térszerű Killing-vektor tartozik.

Szimmetriát felmutató testek szimmetrikus mezőket alakítanak ki maguk körül. A szimmetriatengelye körül forgó test gravitációs mezeje is tengelyszimmetrikus és időben nem változó (stacionárius). A stacionárius, tengelyszimmetrikus gravitációs terek az általános relativitáselmélet egyik legszebb fejezetét képezik. A mezőelmélet itt ismertetett módszereit kitűnően illusztrálhatjuk segítségükkel.

A forgó testek gravitációs potenciálja a Newton-féle potenciált komplex számok segítségével általánosító E potenciál (a jelölést *Frederick J. Ernst* vezette be 1968-ban). Ennek valós része nem más, mint a stacionárius szimmetriát kísérő időszerű Killing-vektor hossznégyzete, képzetes (az imaginárius egységgel arányos) része pedig ugyanezen vektor forgását jellemzi. A teljes általános relativitáselmélet apparátusát ebben az esetben egyetlen komplex E potenciál hordozza. Az ebből felépített hatás variálása útján kapjuk meg a mező egyenletét. Ez a rendkívül egyszerű alakú egyenlet az Ernst-egyenlet:

$$(Re\mathrm{E}) \cdot \Delta \mathrm{E} = \nabla^2 \mathrm{E}$$

A lényeg az, hogy ebben az egyenletben az E potenciálon kívül más ismeretlen mennyiség nem szerepel, és így a megoldásával megkapjuk az adott gravitációs probléma teljes leírását. Ha pedig a gravitáló test nyugalomban van, akkor az Ernst-potenciál valós lesz, és a gravitációs problémát a jól ismert Laplace-egyenletre vezetjük vissza, csakúgy, mint a nemrelativisztikus gravitáció elméletében.

Jürgen Ehlers német kolléga felismerte, hogy a forgó testek terének itt ismertetett leírása nem változik, ha az E potenciált három állandóval megtoldjuk. Így például a képzetes részhez hozzáadhatunk egy tetszőleges számot. Ez három paraméteres folytonos szimmetriának felel meg, amelyet Ehlers-transzformációnak nevezünk. A problémának van egy másik háromparaméter-szimmetriája is. Utóbbi onnan származik, hogy két tetszőleges vektorból számokkal történő szorzás és összeadás útján újabb vektorpárokat képezhetünk. A Killing-vektorok esetében még az alaptulajdonságot (mértéktenzor változatlanul hagyása) is megtarthatjuk, ha a szorzókat a téridő minden pontjában állandó értéken tartjuk.

Robert Geroch amerikai matematikus vette észre, hogy az Ehlers-féle szimmetriacsoport és a Killing-vektorok említett megváltoztatása egymással fel nem cserélhető műveletek. Így tehát, váltakozva végrehajtva a kétféle transzformációt, újabb és újabb gravitációs tereket kapunk. A műveletek során végtelenül sok paraméter fordul elő. Ennek a bonyolult szimmetriának a felderítése évtizedek óta folyó program. Alig néhány éve bizonyította be egy német kutató, hogy a teljes matematikai szerkezet kimeríti a végtelen paraméteres csoport fogalmát.

Az értelem hatalma

A fizikai törvények rendszerének alapjait háromszáz éve rakta le *Isaac Newton* Principia Mathematica Philosophiae Naturalis c. művében. Talán ez a legnagyobb jelentőségű munka a természettudományok történetében. A Newton-féle törvények keretbe foglalják Galilei megfigyeléseit a szabadon mozgó testek viselkedéséről, a Kepler által megfigyelt törvényszerűségeket a bolygók mozgásában, Kopernikusz világképének mélyebb megértését. Túlhaladottá vált Arisztotelész és Ptolemaiosz évezredes naiv és téves természetmagyarázata.

A newtoni fizika törvényekbe foglalja a természeti jelenségek addig megismert szimmetriáit. A zárt mechanikai rendszereket a tér mindhárom irányában elmozdítva, háromféle tengely körül elfordítva, változatlanul zajlanak le a folyamatok.

Két évszázaddal később az elektromosság és a mágnesség is bevonul a jól megértett jelenségek körébe. A Maxwell-elmélet kitágítja a természetben megfigyelt szimmetriák körét. Maxwell törvényeit a tér alaktartó megnyújtása sem változtatja meg. Mindössze néhány évtized múlva, a huszadik században pedig Minkowski és Einstein a gyorsításokat is belevonja a fizikai szimmetriák bűvkörébe. A kör tovább bővül a legkisebb részecskék kvantumfizikájával és ennek mértékelméleti szimmetriáival.

A fizikai tudomány fejlődésének évszázadai során az értelem mind mélyebben hatolt be az anyag titkaiba. Mind sikeresebben használja fel az ipari termelés ennek eredményeit, és a társadalom egészére gyakorolt hatások mind átfogóbbak. Elegendőnek érzem csupán azt felidézni, hogy az emberiség évezredeken át úgy élt együtt az elektromos és a mágneses jelenségekkel, hogy azokról szinte alig vett tudomást (*elektron* a tengerparton lelt gyanta görög neve, *Magnézia* görög város környékén pedig furcsa kövek találhatók). És ma? Szinte mindenütt megtalálható a TV, PC, CD... A társadalom egésze ezen korábbi felfedezések gyümölcseit élvezi. A fizika három évszázada alatt kikristályosodott a tudományos módszer. A mérésekkel ellenőrizhető elmélet, annak rendszeres dokumentálása töretlen fejlődést tesz lehetővé az alapvető jelenségek megismerésében. Az elmélet hatalmának növekedését híven jelzi a feltárt természeti szimmetriák gyarapodása. A fizika gyorsuló fejlődése pezsdítőleg hat más természettudományokra: például a molekuláris genetika nem jöhetett volna létre a kvantummechanika nélkül. A társadalom és a társtudományok is részesülnek a fizikusok munkájának gyümölcseiből. Botorság lenne alábbhagyni az anyag titkainak megismerésével.

HIVATKOZÁSOK:

1 *Weyl H.* Szimmetria. Gondolat, 1982.
2 *'tHooft, G.* Scientific American, 1980.
3 *Killing, W.* Mathematische Ann., 1888.