

Császár Ákos

Matematikai kutatások hazánkban

1998 tavaszán indultak az MTA-n a diszciplínaviták. Céljuk: áttekinteni a magyarországi tudományművelés állapotát. Felmérni: egy-egy diszciplínában milyen irányba megy a nemzetközi "világ", hol áll ehhez képest a diszciplína Magyarországon? Módszerek, tematikák, kutatói intézményrendszer, feladatok: ezek állnak a 15 kiválasztott diszciplína és részdiszciplína összefoglalásainak középpontjában. Ezekre a helyzetfelmérő-elemző tanulmányokra épülhetnek fel hosszú távon mind az akadémiai, mind az egyetemi fejlesztési programok.

A "Magyar Tudomány" — és a széles közönség számára az "Ezredforduló" — következő számaiban még közlünk e tanulmányokból. — A szerk.

A matematika összetettsége

Matematikai tudományok néven szokás összefoglalni mindazokat a tudományágakat, amelyek az elméleti (szokásos rövidítéssel tiszta) matematika köré csoportosulnak s azt egyik (vagy éppen fő) segédeszközüknek tekintik.¹

A ma hazánkban elfogadott felfogás (amelyet a Magyar Tudományos Akadémia szervezeti felépítése is alapul vesz) szerint az elméleti matematika körébe tartozik minden olyan elmélet, amelyben az *axiomatikus módszer* alkalmazható. E módszer abban áll, hogy az elmélet alapfogalmai között bizonyos számú összefüggést *axiómák* alakjában megfogalmazott kiindulási alapnak tekintve, ezekből a továbbiakban már szigorú logikai következtetéssel jönnek létre az elmélethez tartozó eredmények.

Az elméleti matematikának most leírt körülhatárolása viszonylag új keletű, és ma sem általánosan elfogadott. Egyrészt mintegy a múlt század közepéig a matematika részének tekintettek sok olyan kérdéskört, amelyekben a matematikai módszerek lényeges szerepet játszanak, de a kérdéskör egésze mégsem ágyazható be az axiomatikus tárgyalás kereteibe (így például számos természettudományi, elsősorban fizikai kutatást a matematika körébe vontak, ami abban is megnyilvánult, hogy sok tudós egyaránt végzett a szorosabb értelemben vett matematikai kutatások mellett természettudományiakat is). Másrészt sokáig a ma egyértelműen matematikainak tekintett vizsgálatok egy részét, például a geometriai kutatásokat nem tartották a matematikához tartozónak (holott az axiomatikus módszer alkalmazásának éppen ez a klasszikus területe), és mondjuk angolszász nyelvterületen a valószínűség-számítást, s különösen a matematikai statisztikát még a közelmúltban sem tekintették a matematika részének. A geometriának a matematikából való kirekesztését jól tükrözi a matematikának régebben elfogadott magyar elnevezése, a *mennyiségtan*.

Annak a felfogásnak a kialakulásában, hogy az elméleti matematikához való tartozás döntő kritériuma az axiomatikus módszer alkalmazhatósága, lényeges szerepet játszott a múlt század első felében a nem euklideszi geometriák felfedezése, s különösen *Bolyai János* munkássága. Addig ugyanis az axiomatikus módszert az euklideszi geometria felépítésére szolgáló, s egyedül erre alkalmas eljárásnak lehetett tekinteni, de a nem euklideszi geometriák kidolgozása után kitűnt (a legutóbban éppen *Bolyai János* gondolatvilágában), hogy az axiomatikus módszer sok más elmélet megalapozására is felhasználható, csupán az alapul szolgáló axiómákat kell a célnak megfelelően megválasztani. Ebben a felfogásban tehát az elméleti matematika egyes ágait a *közös módszer* teszi egységes tudománnyá.

Az elméleti matematika azért ölel fel különböző ágakat, mert az elmélet alapjául szolgáló axiómarendszer sokféle forrásból eredhet. Évszázadokon át a minket körülölelő világban tapasztalt körülmények közvetlenül vagy más tudományok tapasztalatain keresztül vezettek olyan állítások megfogalmazásához, amelyek azután egy-egy axiómarendszerre álltak össze, és egy-egy matematikai elmélet felépítésének alapját képezték. Így a matematikai leírásra váró tudományág egy-egy fogalma egy-egy matematikai fogalom mintájául szolgált, és az e fogalmak között a valóságban észlelt összefüggések matematikai megfogalmazása öltött alakot az axiómákban; a most röviden leírt eljárást nevezzük *matematikai modell* megalkotásának. Ez az eljárás napjainkban is fő forrása az egyes axiómarendszereknek. Melléje sorolható az a módszer is, amikor már meglévő axiómarendszer módosításával, szűkebb vagy éppen bővebb axiómarendszerre való áttéréssel nyerünk vizsgálatra érdemes újabb axiómarendszereket. Sokszor így is — olykor akár az axiómarendszer módosítása nélkül is — nyerhetünk matematikai modelleket. Mindezekben az esetekben, esetleg több lépésben, elvégezhető a tapasztalatig való visszanyúlás.

Az elmondottak szerint világos, hogy az axiomatikus módszer sokféle tárgykörre alkalmazható, s így a matematika számos részdiszciplínára oszlik, és a fejlődés során egyre újabbak keletkeznek. A múlt század végéig kialakult (és egyenként nagyszámú részre oszló) *számelmélet*, *algebra*, *geometria* és *analízis* mellé odakerült még a *matematikai logika*, a *halmazelmélet*, a *topológia*, a *valószínűség-elmélet*, a *diszkrét matematika* és még sok más.

Az elméleti matematika köré csoportosul egy sereg további matematikai tudomány, amelyek mintegy hidat alkotnak egy-egy más tudomány felé; ezeket szokták összefoglaló elnevezéssel *alkalmazott matematikának* nevezni. Az alkalmazott matematika körébe tartozik eszerint minden olyan vizsgálódás, amelynek segítségével az elméleti matematika eredményei egységes rendszerben leírhatóvá teszik a többi tudomány, a gazdaság és a társadalom összefüggéseit.

A 19. század végéig jelentős mértékben a fizika határozta meg a matematika fejlődését; elsősorban a fizikai problémák megoldásának igényei hozták létre a *matematikai analízis*, ezen belül a *differenciálegyenletek* elmélete, a *variációszámítás* stb. kialakulását; mindezek lényeges segédeszközei az alkalmazott matematika *matematikai fizika* néven ismert részének.

A 20. század kezdete óta már más tudományok is összefonódtak a matematikával, és így számos új határterülete alakult ki a matematikának és a társtudományoknak (ökonómia, biológia, kémia, műszaki tudományok stb.).

Néhány példa az ilyen, alig néhány évtizede létrejött határterületekre: *ökonometria*, *biometria*, *vezérléstudomány*, *kemometria*, *számítógép-tudomány* stb. E sor könnyen folytatható volna, mert ma már lényegében minden tudományban, még a társadalomtudományokban is (nyelvészet, régészet, pszichológia, szociológia stb.) szerepet kapnak a matematikai módszerek.

Ennek kapcsán kell megemlíteni egy tudományterületet, amely a matematika és a történettudományok módszereinek összefonódásából jött létre, de nem része a matematikának: a *matematikatörténet* a művelődés-, közelebbről a tudománytörténet része ugyan, de műveléséhez (mégpedig annál inkább, mennél közelebb áll napjainkhoz a feldolgozott időszak)

széles körű és ugyanakkor alapos és megbízható matematikai ismeretekre van szükség, úgyhogy világszerte főként matematikai képzettségű szakemberek művelik.

Az interdiszciplináris kutatások során kidolgozott modellek és módszerek jelentős hatást gyakoroltak az elméleti matematika fejlődésére is. A differenciálegyenletek, a valószínűség-számítás, a matematikai statisztika, a funkcionálanalízis fejlődését meghatározó mértékben motiválták a gyakorlatban felmerült problémák. Magán a matematikán belül is kialakultak a gyakorlat által motivált új területek, mint például a *numerikus matematika*, az *algoritmuselmélet*, a *bonyolultságelmélet* stb.

Mindezek alapján megállapíthatjuk: *az alkalmazott matematika olyan interdiszciplináris tudomány, amelyben a matematika ötvöződik más tudományokkal.* A vázolt példákból látszik, hogy az alkalmazott matematikát a gazdaság, a társadalom és a tudomány fejlődése szükségszerűen hozta létre.

E vonatkozásban érdemes egyre növekedő fontossága és ebből eredő rohamos fejlődése miatt külön, hosszasan szólni az *informatika* néven ismert tudományterületről. Az informatika az információ számítógépes feldolgozásával, tárolásával, az erre szolgáló algoritmusokkal és ezek bonyolultságával, az adatvédelemmel és adatbiztonsággal, az ezeket megvalósító rendszerekkel foglalkozó tudományterület. Angolszász nyelvterületen ennek az elnevezésnek nagyjából a *computer science* felel meg.

Az információval kapcsolatos tevékenységek egy része bonyolult eszközöket vesz igénybe, amelyeknek tervezése, fejlesztése, üzemeltetése magas szintű műszaki feladat; másrészt mindezekhez olyan matematikai diszciplínák ismeretére és művelésére van szükség, mint a *számítógép-tudomány*, *hálózatelmélet*, *információelmélet*, *kriptográfia*, *automataelmélet* stb.

A matematika nemzetközi helyzete

Amennyire a világtendenciát át lehet tekinteni, az elméleti matematika mai fejlődését azokon a területeken lehet a legintenzívebbnek tekinteni, amelyek a szó bizonyos értelmében a matematikán belül „*interdiszciplinárisak*”, azaz a matematikának több ágában gyökereznek: ilyenek például (az elnevezés többnyire mutatja a gyökereket) az *algebrai geometria*, az *algebrai topológia*, a *funkcionálanalízis* (analízis, algebra, geometria), az *algoritmuselmélet* (matematikai logika, kombinatorika), a *differenciáltopológiai* (analízis, topológia), az *algebrai számelmélet*, az *analitikus számelmélet* (analízis, számelmélet), a *halmazelméleti topológia* stb. A mai matematika ezen túlmenően is hajlamos a korábban többé-kevésbé élesen elkülönülőnek tekintett területek fokozott összefonódására, úgyhogy a mai matematikai kutatónak általában több területen is elmélyült ismeretekkel kell rendelkeznie.

A több matematikai terület összefonódásával előállt módszerek hatékonyságának bemutatására elég talán egyetlen, érthetően a szűk szakmai körökön messze túlnyúló érdeklődést keltő eredményt megemlíteni: a *Fermat-sejtést* évszázados próbálkozások után a probléma jellegéből fakadó számelméleti módszerek mellett az algebra, a csoportelmélet és más területek módszereinek bevonásával sikerült 1995-ben *A. Wiles* és *R. Taylor* közös munkájával bebizonyítani.

A matematika különböző ágainak összefonódása magyarázza meg, hogy napjainkban megnőtt a valamely témakör nagyvonalú tárgyalását tartalmazó *áttekintő cikkek* jelentősége. A matematika fejlődésében mindig is fontos szerepet játszottak a világosan megfogalmazott, de létrejöttük idején még be nem bizonyított *sejtések*; klasszikus példa erre a fent már említett Fermat-sejtés. Századunkban ez a szerep még jelentősebbé vált: *Erdős Pál* kész eredményei mellett legalább olyan fontosnak tartotta azt a munkáját, amellyel egy-egy sejtést mondott ki. Természetesen e tevékenység nemcsak a sejtés pontos megfogalmazásában áll, hanem hátterének, speciális eseteinek, esetleges következményeinek részletes elemzéséből is, és így a kutatáshoz tartozó, azt lényegesen előmozdító feladatnak kell ma már tekinteni.

A számítógépeknek a 20. század közepén történt megalkotása óta, matematikai és műszaki szakemberek tömegeinek együttműködése révén, mindennapi életünknek szinte minden mozzanatába behatolt a számítástechnika; nem kivétel ez alól a megállapítás alól a tudományok, így a matematika művelése sem. Nemcsak az egyes szakterületeknek konferenciáit szervezik a világháló felhasználásával, nemcsak az elméleti és alkalmazott matematika problémáit oldják meg régebben elképzelhetetlen gyorsasággal és pontossággal a számítógépek (új prímszámok megtalálásától a másnapi időjárás előrejelzéséig), hanem egy-egy, a hagyományos módszerekkel dolgozó kutató számára kilátástalan számú eset végiggondolását igénylő bizonyítás is csak velük válik kezelhetővé (négy színsejtés), sőt, ismét a világháló alkalmazásaként, egymástól több ezer kilométer távolságban működő kutatók képesek folyamatos gondolatcserére, soha nem sejtett mértékben kitágítva ezzel az együttműködés lehetőségeit, új eredmények nyomtatásban való közlését megelőző (vagy éppen helyettesítő) elektronikus úton való terjesztésük stb.

A matematikai kutatás Magyarországon

A matematikai kutatás terén magyar származású, de külföldön működő tudósok már a 18. század folyamán is elérték említésre méltó eredményeket, de nemzetközi szinten is kiemelkedő matematikai felfedezések csak a 19. század első felében születtek a két *Bolyai*, *Farkas* és *János* munkássága révén. Bolyai János a párhuzamosok kétezer éves problémájának egyik megoldójaként, a hiperbolikus geometria felfedezésével és kidolgozásával üstökösként tűnt fel a magyar matematika egén. 1832-ben (atyjának tankönyvében függeléként publikált) korszakalkotó felfedezése után jó fél évszázadot kellett várni arra, hogy magyar alkotók kutatásaiból újabb jelentős matematikai eredmények szülessenek.

A múlt század végén, s különösen századunk elején a helyzet öröndetesen megváltozott. Csak a legjelentősebb neveket említve, ezekben az évtizedekben jönnek létre *König Gyula*, *Fejér Lipót*, *Riesz Frigyes*, *Haar Alfréd* máig a tudomány klasszikusaként számon tartott eredményei a halmazelmélet és az analízis területén. A két világháború közötti időszakban, éppen az imént említettek magas színvonalú oktató munkája következtében, már tucatjával jelennek meg a nemzetközi értelemben is kiemelkedőnek tekinthető magyar matematikusok (igaz, sokan közülük az akkori viszonyok között azonnal vagy egy idő után külföldön találtak csak munkát). Hogy ismét csak a legnagyobb neveket említsük, ekkor kapcsolódtak be a matematikai kutatásba olyan kiváló szakosok, mint *Pólya György*, *Szegő Gábor*, *Riesz Marcell*, *Neumann János*, *Erdős Pál*.

Mindennek eredményeképpen a második világháború utáni évtizedekben már nemzetközileg is elismert matematikai kutatómunka folyt hazánkban. Ennek színtere a már korábban is működött, de a század második felében kiszélesedett tevékenységű három tudományegyetem [Budapest, Szeged, Debrecen, ismertebb nevükön Eötvös Loránd Tudományegyetem (ELTE), József Attila Tudományegyetem (JATE), Kossuth Lajos Tudományegyetem (KLTE)], a Budapesti Műszaki Egyetem (BME) és a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem (BKE) mellett az 1950-es években alapított Matematikai Kutatóintézet [ma: Magyar Tudományos Akadémia Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézete (RAMKI)], a Magyar Tudományos Akadémia Számítástechnikai és Automatizálási Kutatóintézete (SZTAKI), és további műszaki egyetemek (Miskolc, Veszprém), valamint más (agrár, pedagógus stb.) szakembereket képző egyetemek és főiskolák.

Az, hogy a magyar matematikusok munkásságát a nemzetközi mezőny magasra értékeli, megnyilvánul olyan körülményekben, mint hogy magyar kutatókat rendszeresen meghívják előadások tartására nemzetközi kongresszusokra, konferenciákra, külföldi egyetemekre és más kutatóközpontokba, szerződéssel alkalmaznak rövidebb-hosszabb időre egy-egy külföldi egyetemen vagy kutatóintézetben. A magyar matematika megbecsülését jelzi az is, hogy a Nemzetközi Matematikai Unió 1988-ban Budapesten rendezte meg a matematika oktatásával foglalkozó nemzetközi kongresszust, az Európai Matematikai Társaság pedig második kongresszusát 1996-ban ugyancsak Budapesten tartotta.

Magyar kutatók ismételten részesültek nemzetközi matematikai díjakban, ideértve a matematikai Nobel-díj rangjára értékelt Wolf-díjat is (Erdős Pál (1984) a számelmélet, a kombinatorika, a valószínűség-számítás, a halmazelmélet és az analízis terén elért eredményeiért, Lovász László (1999) pedig a kombinatorikus optimalizálás és a számítógéptudomány terén kifejtett munkásságáért), illetve az Ostrowski-díjat, amelyben Laczkovich Miklós részesült 1993-ban a Banach–Tarski-féle paradoxon kétdimenziós változatának megoldásáért.)

Természetesen nem lehet azt várni, hogy a matematikai kutatás sokfelé ágazó fejezeteinek mindegyikében egyformán magas színvonalú kutatás folyjék. Ezért a következőkben megkíséreljük áttekinteni a matematika egyes területeit ebből a szempontból abban a sorrendben, ahogyan a referáló folyóiratok az egyes fejezeteket felsorolják. Megadjuk azokat a kutatóhelyeket is, ahol a téma művelése intenzíven folyik; ezek az adatok azonban csak tájékoztatásul szolgálnak arra vonatkozólag, mennyire koncentrált egy-egy terület művelése, s a felsorolt kutatóhelyek megemlítése vagy felsorolásának sorrendje semmiképpen sem tekinthető értékítéletnek. Név szerint csak már elhunyt kutatókat említünk.

Matematikatörténet. Kiemelkedő eredmények születtek az antik görög matematika és a filozófia viszonyának kutatásában (RAMKI). Emellett természetes feladata a magyar matematikusoknak a magyarországi matematika történetének vizsgálata és bemutatása. A 20. század elejéig terjedő időszakra vonatkozóan ezt magas színvonalon megtette Szénássy Barna magyar és angol nyelven megjelent monográfiája; ezen a területen is sikerült azonban további fontos eredményeket találni a monográfia megjelenése óta. Ugyanakkor fontos további feladat a 20. századi magyar matematika fejlődésének bemutatása. Ilyen kutatások folynak több helyen is (JATE, Miskolc, Nyíregyháza), és sokat ígér e tekintetben a Bolyai János Matematikai Társulat kezdeményezése, amelynek keretében az egyes területek legjobb szakértőiből álló munkabizottságot hoztak létre egy, a 20. századi magyar matematikai kutatás eredményeit feldolgozó monográfia elkészítésére.

Matematikai logika. Kalmár László és Péter Rózsa munkáját folytatva nemzetközileg elismert színvonalú munka folyik ezen a területen a RAMKI keretében, és művelik a témát a BME és a KLTE kutatói is. A téma fontosságát kiemeli a számítógéptudományban való lényeges alkalmazások lehetősége.

Halmazelmélet. Hála Neumann János, Erdős Pál és Fodor Géza munkásságának, s az ő tanítványaiknak és munkatársaiknak, ez a kutatási terület is az élenken műveltek közé számít elsősorban a RAMKI, illetve az ELTE keretében. Különösen kiemelkednek azok a témák, amelyek a hagyományos Zermelo–Fraenkel-féle axiómarendszer kiegészítő feltevések hatását vizsgálják a topológiai struktúrák viselkedésére; a topológiai struktúrákkal kapcsolatos számossági kérdések vizsgálatában a RAMKI magyar kutatói a nemzetközi mezőny élvonalát képviselik.

Diszkrét matematika. Ez a terület a század második felében fejlődött igen dinamikus, főleg informatikai alkalmazásai révén. A magyar matematika sikereit ezen a területen az tette lehetővé, hogy már a század első felében König Dénes és tanítványai, Erdős Pál, Turán Pál és Gallai Tibor alapvető eredményeket értek el. Ők, tanítványaik és munkatársaik ma már a diszkrét matematika majdnem minden területén fontos eredményeket publikáltak, de néhány területen nemzetközileg meghatározó szerepet játszottak. A gráfelmélet tipikusan magyar terület, hiszen első monográfiája König Dénes tollából jelent meg. A gráfelmélet sok területén, így az extrémális gráfok elméletében folyó kutatások ma is kiemelkedőek. A kombinatorikus optimalizálás korai, alapvető eredményeit König Dénes és Egerváry Jenő érték el az 1930-as években (módszerüket ma is magyar módszer néven emlegetik), és ma is élenjáró kutatások folynak e területen. A valószínűség-számítási módszert Erdős gráfelméleti és számelméleti problémák megoldására dolgozta ki, és azóta

széles körben használt eszköz nemcsak a gráfelméletben és a számelméletben, hanem a csoportelméletben, az algoritmuselméletben és a matematika igen sok ágában is. A magyar kutatók ebben ugyancsak vezető szerepet visznek. A valószínűség-elmélet és diszkrét matematika más irányú szoros kapcsolatát fejlesztette ki Erdős Pál és Rényi Alfréd az 1960-as években a *véletlen gráfok* elméletének kidolgozásával. Ez a terület a későbbiekben kibővült más véletlen struktúrák vizsgálatával, és a hazai kutatások itt is nemzetközileg mértékadó színvonalúak. Diszkrét matematikai kutatások a RAMKI, SZTAKI, ELTE, JATE mellett szinte minden hazai kutatóhelyen folynak.

Hálóelmélet. Különösen az ELTE, JATE és BME kutatói értek el jelentős, meglepő eredményeket a kérdéskörnek a nemzetközi értékelésben vezetőként elismert legkiválóbb kutatóival együttműködésben, de érdemleges kutatás folyik a RAMKI-ban és Sopronban is.

Univerzális algebra. Ebben a témakörben is élénk munka folyik a RAMKI, a SZTAKI, az ELTE, a JATE és a BME keretében.

Számelmélet. A magyar számelmélet is nagy hagyományokra tekinthet vissza. Mint a legfrissebb kutatások kiderítették, ez már Bolyai Jánossal kezdődött, de igazán világhírűvé a 20. században vált elsősorban Turán Pál, Erdős Pál és Rényi Alfréd munkássága révén. Turán Pál a primszámok analitikus — a *matematikai analízis*, elsősorban a *komplex függvénytan* eszközeit alkalmazó — elméletében új módszert, a róla elnevezett *hatványösszegmódszert* dolgozta ki, amelyet azután másokkal együtt a matematika más ágaiban is sikerrel alkalmazott. ő és Erdős Pál bábáskodott a *valószínűségi számelmélet* — a nagy számok törvényeinek érvényességét a számelméletben feltáró tudomány — megszületésénél. Erdős Pálnak úttörő szerepe volt a kombinatorika és a valószínűség-számítás módszereinek számelméleti meghonosításában. Mindebben Rényi Alfréd is segédkezett, de legnagyobb érdeme, hogy jelentős lépést tett a mindmáig megoldatlan *Goldbach-problémában*, ami ma már nélkülözhetetlen eszközzel gyarapította nem csak ennek a kérdéskörnek az eszköztárát. Elsősorban a RAMKI és az ELTE keretében (és külföldön) dolgozó tanítványaik révén, akik tovább folytatják az ő munkásságukat, és számos, a tudományt alapvetően meghatározó problémát oldottak meg, a magyar számelmélet mind a mai napig megtartotta hírnevét, sőt hazai viszonylatban új kutatási területként a *diofantikus egyenletek* elméletében a KLTE keretében — külföldön is így ismert — „debreceeni iskola” alakult.

Algebrai struktúrák. Ebben a témakörben is hosszú időre nyúlnak vissza a hazai hagyományok Kürschák József, Rédei László, Hajós György, Szele Tibor, Kertész Andor révén. Ma is színvonalas kutatások folynak a RAMKI, a SZTAKI, az ELTE, a JATE, a KLTE, a BME, a BKE, Nyíregyháza keretében, főként a *gyűrűk* és a *csoportok* körében, de eredményesen művelik a *félcsoportok*, a *testek* és a *kategóriák* elméletét is. A *lineáris algebra*, illetve a *mátrixelmélet*, amelyben Egerváry Jenő kutatásai meghatározó jellegűek voltak, a műszaki alkalmazások kapcsán érthetően elsősorban a SZTAKI, a BME, a BKE és Miskolc kutatói között talált hivatott művelőkre.

Klasszikus analízis. A klasszikus matematikai analízisben és a belőle kifejlődött sor-elméletben és funkcionálanalízisben a magyar matematikának meghatározó szerepe volt: a Fourier- és más ortogonális sorok elméletében, a *konstruktív függvénytanban* és az *interpolációelméletben* Fejér Lipót, Haar Alfréd, Szidon Simon, Szegő Gábor, Turán Pál, Erdős Pál, Alexits György révén, a *komplex függvénytanban*, *potenciálméletben* Fejér Lipót, Pólya György, Szegő Gábor, Riesz Frigyes és Marcell, Fekete Mihály, Turi Pál révén, a Hilbert-terek alapjainak és módszereinek kidolgozása terén Neumann János, Riesz Frigyes, Szőkefalvi-Nagy Béla révén. Kevés matematikus lehet a világon, aki ne hallott volna

a Fejér-közepekről, Haar-mértékről vagy a Reisz-féle reprezentációs tételről.

Ma is jönevű iskolák működnek Budapesten, Szegeden és Debrecenben a *valós függvénytan*, az *approximáció- és interpolációelméletben* (RAMKI, SZTAKI, ELTE, JATE, KLTE, BME); a mai magyar analízis legkiemelkedőbb eredménye a jó fél évszázada felállított Banach—Tarski-féle paradoxon kétdimenziós változatának Ostrowski-díjjal kitüntetett megoldása.

Differenciálegyenletek elmélete. Ennek a természettudományi és műszaki alkalmazásai folytán különösen fontos, *Egerváry Jenő* munkássága révén nagy hagyományú területnek eredményes kutatói dolgoznak a RAMKI, a SZTAKI, az ELTE, a BME keretében és Sopronban, s különösen a JATE oktatói között.

Függvényegyenletek. Erős, a terület vezető kutatóival szoros kapcsolatot tartó iskola működik a KLTE-n.

Sorelmélet. Már említettük e terület kiterjedt hazai hagyományait. A mai kutatók intenzív kutatásokat folytatnak a RAMKI, az ELTE, a BME, Nyiregyháza s különösen a JATE keretében.

Funkcionálanalízis. A fent már említett világszínvonalú hagyományok mellett említendő még *Riesz Frigyes* és *Szökefalvi-Nagy Béla* alapvető monográfiája (sok nyelvre lefordítva); az ő tanítványaik kiváló eredménnyel dolgoznak (RAMKI, ELTE, JATE, KLTE, JPTE, BME, BKE) a *lineáris operátorok elméletének* kutatásában.

Geometria. Hagyományaink ezen a területen a Bolyaiakra nyúlnak vissza. A 20. században *Hajós György* munkásságát folytatva élénk munka folyik több irányban is. A *diszkrét geometria* jellegzetesen magyar tudományágnak tekinthető: az elmélet megalkotásában, első monográfiáinak megírásában magyar geometerek munkája túkröződik. Ma is nagy intenzitással és eredményesen dolgoznak a fiatalabb kutatók ezen a területen (RAMKI, SZTAKI, ELTE, JATE, BME, Sopron). A szorosan vett diszkrét geometria kérdéskörén kívül is érvényesül a diszkrét matematika módszereinek geometriai alkalmazása (RAMKI). A *véges geometriában* *Kárteszi Ferenc* és *Rédei László* úttörő munkája nyomán sikeres iskola működik (ELTE, BME). Az *algebrai geometriában* (amely nálunk sokáig hiányterületként szerepelt) külföldön élő magyar matematikusok a kutatás élvonalába törtek, és itthon is igéretes kutatások indultak (RAMKI). A *differenciálgeometria* területén — *Varga Ottó* és *Rapcsák András* munkájának folytatásaként — erős iskola működik (RAMKI, ELTE, JATE, KLTE, Nyiregyháza).

Topológia. A topológiai struktúrák általános elmélete mellett (RAMKI, ELTE, KLTE, BKE) erős a *halmazelméleti módszerek* alkalmazása (ott már említettük) (RAMKI, ELTE, KLTE), és *Kerékjártó Béla* érdeklődési köréhez kapcsolódva megbecsült kutatások folynak az *algebrai topológia* és különösen magas színvonalon a *differenciáltopológia* területén is (ELTE, KLTE, BME).

Valószínűség-elmélet és sztochasztikus folyamatok. Ezen a területen a magyarországi kutatások az 1940-es évek végén *Rényi Alfréd* munkássága kapcsán lendültek fel, és az 1950-es években *Erdős Pál* hatására tovább szélesedtek. A körülöttük tömörült fiatalok rövidesen önálló iskolát alakítottak ki a RAMKI keretében. Ebből az iskolából került ki mai nemzetközileg elismert magyar valószínűség-elméleti iskola legtöbb tagja (RAMKI, SZTAKI, ELTE, JATE, KLTE, JPTE, BME, BKE, Miskolc). Fő kutatási területek: *határeloszlástételek*, *véletlen bolyongások*, *nagy számok törvényei*. Jelentős eredmények születtek a *sztochasztikus folyamatok*, a *sztochasztikus analízis* és a *véletlen mezők* kutatásában is.

Külön említendő, hogy a *statisztikus mechanika* szabatos matematikai tárgyalásával

kapcsolatos kérdésekben nemzetközileg elismert kutatócsoport dolgozik kiváló eredménnyel (RAMKI, JATE, BME), mozgósítva a *dinamikus rendszerek* elméletének módszereit is.

Matematikai statisztika. Ez a matematikának talán a legszélesebb körben alkalmazott területe, módszere a *valószínűség-elméletre* támaszkodnak (*statisztikai próbák és becslések, többváltozós analízis, idősorok elemzése* stb.). *Jordán Károly* korábbi és *Vincze István* közelmúltbeli munkásságának hatása tovább él abban a tekintetben is, hogy mind az elméleti kutatás, mind a statisztika biológiai, orvosi, szociológiai, műszaki és más kapcsolatai (pl. a *biztosítási matematika*) területén magas színvonalú kutatómunka folyik (RAMKI, SZTAKI, ELTE, JATE, KLTE, JPTE, BME, BKE, Miskolc).

Numerikus analízis. Eredményes munka folyik több kutatóhelyen (SZTAKI, ELTE, KLTE, BME, BKE, Miskolc, Sopron).

Számítógép-tudomány. E tudományterület atyjának *Neumann János* tekinthető. Magyarország Kelet-Európában az elsők között *Kalmár László* alakított ki iskolát Szegeden; ez különösen az *automataelmélet* területén ma is aktív, eredményes kutatást folytat. További lendületet adott ennek a területnek, hogy a diszkrét matematikai iskola bekapcsolódott a kutatásba több területen is (*algoritmuselmélet, bonyolultságelmélet, kriptográfia, adatbázisok*). Ezeken túl e széles tudományág igen sok egyéb területén (*formális nyelvek, mesterséges intelligencia, komputergrafika, alakfelismerés*) folyik eredményes kutatás; a fő centrumok a RAMKI, SZTAKI, ELTE, JATE, KLTE, BME, de ide kapcsolódik még a BKE, Sopron, Eger is.

Operációkutatás. Ez a terület a 20. század második felében alakult ki, de legfőbb ágának, a *lineáris programozásnak* egyik alaptételét a 19. században bizonyította be *Farkas Gyula*. Ma sokoldalú és külföldön is megbecsült kutatások folynak elméleti és a hozzájuk kapcsolódó alkalmazott területeken, többek között a *sztochasztikus, diszkrét, nemlineáris programozás* területén, és számos kapcsolódó területen, melyek a *játékelméletig* terjednek (SZTAKI, ELTE, KLTE, JPTE, BME, BKE, Miskolc, Sopron).

Információelmélet. *Rényi Alfréd* honosította meg Magyarországon. Az ő munkáját magas színvonalú, nemzetközileg nagyra értékelt kutatás folytatja, amely felöleli az információelmélet módszereinek statisztikai, kombinatorikai, *kriptográfiai* és *ergodelméleti* alkalmazásait is (RAMKI, SZTAKI, ELTE, JPTE, BME).

A hazai matematikai kutatás intézményes feltételei

Mint az előzőekben láttuk, a matematikának (mind elméleti, mind alkalmazási vonatkozásban), jó néhány ága szerepel a hazai matematikai kutatások palettáján. Ezzel kapcsolatban természetesen vetődik fel néhány kérdés.

a) Megüti-e a hazai kutatás a nemzetközi szinten kialakult mércét?

Láttuk, hogy erre számos területen határozottan igenlő válasz adható; ennél azonban több is igaz: nem kevés a matematika olyan ágainak száma, amelyekben a magyar kutatás a világ élvonalába tartozik, s hazai kutatóink mintegy megszabják a nemzetközi kutatási szintet.

b) Lefedi-e a hazai kutatási spektrum a matematika különböző ágainak egészét?

Erre határozottan nemet kell mondani, ami azonban természetes: egyetlen kis ország sem képes a sokféle ágazó matematikai és alkalmazott matematikai kutatási irányok mindegyikében számottevő vagy éppen kiemelkedő intenzitással részt venni; ha ezt tenné, az óhatatlanul az erők megengedhetetlen szétforgácsolásával járna, és a kutatások színvonalának érezhető csökkenését jelentené.

c) Tehet-e valamit, s ha igen mit, a tudománypolitika a hazai matematikai kutatások témaválasztásának befolyásolására?

Mint fentebb kifejtettük, nem szabad célba venni a kutatási spektrum teljessé tételét; arra azonban törekedni kell, hogy új kutatási területeket lehetőleg a leginkább előremutató irányokban vonjunk be (tehát a több ágazat összefonódásában gyökerező, fentebb interdiszciplinárisnak mondott területek preferálandók). Egyrészt tehát nem lehet reális célnak tekinteni azt, hogy a hazai kutatást minden területen egyformán magas színvonalra emeljük, s még csak azt sem, hogy minden fontosnak tartott területen folyják intenzív hazai kutatás, de azt igen, hogy a nemzetközi irányzatok figyelembevételével fontosnak megismert területeken legyen lehetőség a kutatók képzésére (egyetemi oktatás graduális és posztgraduális szinten, doktori iskolák, külföldi ösztöndíjak stb.).

Mivel a kutatási területek számának növelése és az egyes területeken felmutatott kutatási színvonal emelése egyidejűleg alig lehetséges, kitüntetett figyelemmel kell lenni arra, hogy a hagyományosan kialakult hazai matematikai iskolák támogatása ne szenvedjen csorbát. Ezeknek területei meg kell, hogy kapják a kellő figyelmet és prioritást; gondolni kell arra is, hogy külföldi kutatók elsősorban ezeknek a területeknek a kedvéért keresnek fel bennünket.

d) Kell-e, lehet-e módosítani az egyes kutatási témák koncentrátsági fokán?

Láttuk, hogy csaknem minden intenzívebben kutatott területen több centrumban is folyik a kutatás [kutatóintézet(ek), egyetemek, részben itt sokszor külön nem is említett főiskolák]. Bizonyára nem volna értelme annak, hogy a kialakult helyzetet erőszakkal változtassunk; azt azonban elő kell segíteni, hogy a rokon területen dolgozó kutatók kommunikációja könnyű legyen. Több területen folynak olyan közös szemináriumok, amelyekben az egymáshoz közel álló témákon dolgozó kutatók rendszeresen találkoznak, és a műszaki feltételek ezen felül is egyre könnyebbé teszik a rendszeres és gyors gondolatcsere-t. Mindezeket a lehetőségeket határozottan meg kell ragadni, s ha szükséges, fejleszteni, s ezáltal a kutatók esetleges elszigeteltségét megszüntetni úgy, hogy az együttműködés a kutatók között akár sok kilométer távolságból is akadálytalan és folyamatos legyen.

A kutatóhálózat kapacitásának fenntartása természetes kívánalom, ha a kutatások színvonalát meg akarjuk őrizni vagy éppen emelni akarjuk. Az akadémiai kutatóhelyek konszolidációja során fontos szempont volt mindez, de a felsőoktatás az utóbbi években átesett bizonyos kényszerű redukción; csak remélni lehet, hogy eközben a színvonal csökkenését sikerült elkerülni. A következőkben feltétlenül gondoskodni kell a további lépések megelőzéséről, és a nyugdíjba vonuló vagy más módon kieső kutatók és oktatók megfelelő színvonalú fiatalokkal való pótlásáról.

A kutatói utánpótlás kérdése mindenekelőtt a felsőoktatás feladatát jelenti. Veszélyeket rejt(het) magában az a körülmény, hogy számos okból általános tendencia a hallgatók számának növelése. Igen gondosan kell ügyelni arra, hogy az oktatási színvonal átlagának valószínűleg elkerülhetetlen csökkenése ne jelentse egyszersmind a kutatói utánpótlás szempontjából szóba jövő elit számának és szintjének csökkenését is. Vonatkozik ez már a posztgraduális oktatásra is, de a felsőoktatás irányítóinak elsődendő feladatává kell tenni különösen a doktori iskolák megfelelő színvonalának megőrzését. Ebben lényeges szerepet kap az a (szerencsére meglévő) tendencia, hogy a doktoranduszok képzésében az egyetemek együttműködnek az akadémiai kutatóintézetekkel.

Az ímént mondottak a kutatóhelyek személyzeti politikáját érintik elsősorban. A kutatásnak és a kutatók képzésének tárgyi feltételei nem kevésbé lényegesek s emiatt nem kevesebb figyelmet érdemelnek. Minden lehető módon törekedni kell arra, hogy a matematikai kutatóhelyek könyvtáraiban a könyvek és folyóiratok beszerzése elé mind kevesebb akadály tornyosuljon, s az e téren mutatókozó elkerülhetetlen nehézségeket körültekintő szervezéssel kell kompenzálni. Így meg kell keresni a módját annak, hogy az egyes intézmények könyvtárai könnyen hozzáférhetőek legyenek az országban bárhol dolgozó matematikus kutató számára, a beszerzéseket össze kell hangolni, elő kell segíteni az

egyres folyóiratcikkekről fénymásolatok készítését és az országon belül bárhová való eljuttatását, meg kell szervezni a könyvtárközi kölcsönzést; mindezt, amennyire lehet, külföldi viszonylatban is lehetővé kell tenni, illetve támogatni kell.

Gondoskodni kell a matematikai kutatóhelyek számítógép-felszereltségének szinten tartásáról és javításáról, különös tekintettel az internet hálózatba való bekapcsolódás lehetőségeire.

A kutatók mozgását (örvendetesen) már ma sem gátolják adminisztratív korlátok. Az Európai Unióhoz való csatlakozásunk után (legalábbis az unió területén) a mozgás még akadálytalanabb lesz. Ennek eredményeképpen számolni kell azzal a már ma is tapasztalt jelenséggel, hogy akár vezető kutatók, akár pályakezdő fiatalok külföldön találnak munkát. Mindent meg kell tenni azért, hogy ne vesszenek el a magyar tudomány számára: akár a hazatérés támogatásával, akár a tartósan külföldön dolgozók itthoniakkal való kapcsolattartásának megszervezésével (hazlátogatás elősegítése és támogatása stb.) el kell érni, hogy az egy-egy kutató kiképzésére, nevelésére fordított energia (és persze pénz) minél nagyobb hányada itthon is eredményt hozzon.

JEGYZET:

1 A Magyar Tudományos Akadémia III. Osztályában 1999 első hónapjaiban ismételtén viták folytak az e tanulmány címében megfogalmazott témáról. A tanulmány lényegesen támaszkodik a vitát lezáró, 1999. április 14-én elfogadott állásfoglalás megállapításaira. A III. Osztály itt felhasznált állásfoglalásának megfogalmazásában *Benczúr András*, e tanulmány összeállításában *Csiszár Imre*, *Halász Gábor*, *Lovász László*, *Révész Pál* s elsősorban *T. Sós Vera* volt segítségemre. Mindnyájuknak őszinte köszönettel tartozom.

Amíg el nem fogy, a Magyar Tudomány az alábbi könyvesboltokban kapható:

Balassi Könyvesbolt	1023	Budapest	Margit u. 1.	212-0214
Budapesti Teleki Téka	1088	Budapest	Baross u. 1.	
Fókusz Könyvárúhá	1072	Budapest	Rákóczi út 14.	268-1103
Írók Boltja	1061	Budapest	Andrássy út 45.	
Kis Magiszter Könyvesbolt	1053	Budapest	Magyar u. 40.	
Kódex Könyvárúhá	1054	Budapest	Honvéd u. 5.	331-6350
Litea Könyvesbolt és Teázó	1014	Budapest	Hess András tér 4.	375-6987
Osiris Könyveshá	1053	Budapest	Veres Pálné u. 4-6.	318-2516
Pont Könyvesbolt	1051	Budapest	Nádor u. 8.	
Egyetemi Könyvesbolt	8200	Veszprém	Egyetem u. 10.	88/429-073
Két Könyvész Kft.	7616	Miskolc	Egyetemváros	
Könyveshá	9700	Szombathely	Hollán Ernő u. 7.	94/340-700
Sík Sándor Könyvesbolt	6720	Szeged	Oskola u. 27.	
Sziget Könyvesbolt	4010	Debrecen	Egyetem tér 1.	
Széchenyi István Könyvesbolt	7624	Pécs	Rókus u. 1.	
Vörös Cédrus Könyvkereskedés	9400	Sopron	Mátyás király u. 34/F	99/320-222