MAGYAR
PHILOSOPHIAI SZEMLE.

SZERKESZTI ÉS KIADJA

BOKOR JÓZSEF.

VI. ÉVFOLYAM. 1887. I. FÜZET.

A „Magy. Phil. Szemlét“ a Magy. Tud. Akadémia támogatja ugyan, de a lap irányáért és tartalmáért csakis a szerkesztőség felelős.

BUDAPEST.

Szerkesztő- és kiadóhivatal: VI., Nagy János-utcza 5.

TARTALOM.

Értesitö.

A Magyar Phil. Szemle öt ives füzetekben, évente hatszor jelenik meg. Előfizetési ár egy évre 5 frt. Egy szám ára 1 frt.

MAGYAR

PHILOSOPHIAI SZEMLE.

SZERKESZTI ÉS KIADJA

BOKOR JÓZSEF

egyetemi m. tanár.

VI. ÉVFOLYAM. 1887 JANUÁR-DECZEMBER.

BUDAPEST.

NYOMATOTT MÜLLER K., ezelőtt MÜNSTER K. KÖNYVNYOMDÁJÁBAN

(II. kerület, fő-utcza 20.)

TARTALOM.

Iskola.

ÉRTESITŐ.

Könyvismertetés.

Különfélék, névvel és név nélkül.

A MATHEMATIKA
A POSITIV PHILOSOPHIA RENDSZERÉBEN.*

A mennyiségtan a tudományok legrégebbike és legfejlettebbje, de fogalmát mostanig nem tisztázták. Az utolsó század elején kezdett csak világosabban kiemelkedni az egésznek valódi szelleme, midőn különböző tudományágai már némi befejezettségre jutottak. A tudósok lázas tevékenysége u. i. annyira kifejleszté a mathesist, akár magát, akár alkalmazását tekintsük, hogy a haladás szempontjából annak egységes rendszerbe való foglalása föltétlenül szükséges volt. Hogy e bölcsészeti eljárást már a tudomány álláspontja is követelte, azt Lagrange-nak „Mécanique analytique (1788)" és „Traité des fonctions analytiques (1797)" művei is mu-

* Régi, úgy szólván keletkezésekor tett igéretnek tesz eleget a M. Phil. Szemle, midőn ezuttal megkezdi Comte rendszerének előadását. E rendszer, melynek jellemvonásait a Szemle 1884. folyamában Böhm Károly feltüntette, a megismerés viszonylagosságában, a neki megfelelő módszerben s végül az alapvető tudományok encyclopaediájában domborodik ki s nyit az értelem körére eddig semmi philosophiai rendszer által felül nem mult perspektivát. Hol és mennyiben vár kiegészitésre Comte rendszere ? e kérdésre mellőzzük itt a választ. Volt arról másutt szó, a többek közt alaposan fejtegette Böhm Károly „Ember és Világa" czimü terjedelmes könyve s fog bőven foglalkozni vele az ismeretek e faja iránt mind fokozottabb mértékben érdeklődő jövő. Annak éreztük szükségét, sőt parancsát, hogy a rendszert, a mint Comte Ágost megalkotta, lehető hüen ösmertessük meg a magyar közönséggel. Közleményeink sorát a mathematikával kezdjük meg mint a mely a rendszernek alapját képezi. Tudvalevő ugyanis, hogy Comte a következő módszeres összefüggésben adta elő rendszerét: 1. Mathematika, még pedig az elvont, — s a concrét mathematika, mely utóbbi alá a geometriát s a rat. mechanikát foglalja. 2. Az anorganikus physika, még pedig a) az astronomia, b) physika. Az utóbbi a α) barologia, β) thermologia, γ) akustika, δ) optika, ε) electrologia, ζ) chemia. 3. Organikus physika, még pedig a physiologia és a sociologia. E rendben fogjuk tárgyalni az imposans rendszert, arra vállalkozott szakértők szives közremüködésével, kiknek a hazai tudományosság érdekében tett fáradozásaiért eleve is köszönetet mondunk. Szerk.

tatják, melyeken a főrészekben egy eddig elő nem fordult egység nyoma vonul át.

A mathesist rendesen következő határozatlan, jelentéktelen, scholastikus módon definiálják:

„A mathesis a nagyságok (grandeur) tudománya", vagy „az a tudomány, melynek czélja a nagyságok mérése."

E meghatározásnak azonban két hibája van: 1. hiányos, 2. nem elég mélyreható. — A mérést ugyanis az ész ugy tekinti, mint közvetetlen összehasonlitását bizonyos nagyságnak a vele egyneművel, mely utóbbit egységnek tekintjük és ismertnek föltételezzük.

E szerint a mély értelmi munka végtelen lánczolata helyett, mely szellemi tevékenységünknek kimerithetetlen táplálékot nyujt, a mathesis oly mechanikus eljárássá törpűl, mely a vonalak egymásra helyezésével analog művelet utján határozza meg a megmérendő nagyságokat. Az emlitett meghatározás tehát directnek tünteti fel azt a dolgot, mely csaknem mindig indirect, nem világositja meg a mathesis lényegét. E primitiv tervből kiindulva, könnyen eljuthatunk a helyes definitióhoz.

A superpositio csaknem mindig cserben hagy a nagyságok meghatározásánál. Már az egyenes vonal közvetetlen lemérése is igen megszorító föltételekhez van kötve (egész hosszában végig haladhassunk rajta, se tulságos nagy, se tulságos kicsi ne legyen, alkalmasan feküdjék, pl. ne legyen vertikális), hogy az evégből czélzatosan megszerkesztett vonalokon kivül alig találunk lemérhetőt. Ha már az egyenesnél ily nehézségek állnak elé mennyivel inkább más nagyságoknál (terület, köbtartalom, erő, stb.) E körülmény okozta, hogy az emberi szellem lemondva a nagyságok közvetetlen megméréséről, azok indirekt uton való meghatározását tűzte ki feladatául, s ez a mathesis megteremtésére vezetett. A nagyságok ilyetén meghatározása különböző mértékben lehet indirect. Legtöbbször azok a nagyságok, melyekre a meghatározandók megalapítását visszavezetjük, maguk sem lemérhetők; igy hát ezek meghatározása is hasonló kérdés tárgya lesz, s ez igy folytatódik. Az értelemnek is igen sokszor föl kell ölelnie az intermediär kérdések egész sorát, melyek első pillanatra a kérdéses feladattal semmiféle kapcsolatban sem látszanak állni, hogy a lemérhető és keresendő nagyságok közötti összefüggés segitségével az utóbbiakat meghatározza.

Pontos meghatározása a mennyiségtannak abban áll, hogy az oly tudomány, mely feladatául tüzi ki a nagyságokat egymással kifejezni azon pontos kapcsolat alapján, mely köztük létezik.

E meghatározás tünteti fel a mathesisben levő tudományos momentumot. Minden tudomány ugyanis arra törekszik, hogy a körébe vágó tüneményeket egymás által meghatározza az ezek közt fönálló relátiók alapján. A tudomány átalában a tények coordinálásában leli alapját. Ha a különböző megfigyelések elszigeteltek volnának, nem is léteznék tudomány. — A tudomány az, mely a direkt megfigyeléstől felold és az adatok kis számából a legnagyobb eredmények lehozatalára képesít. Ezen czél elérését a mathesis nagyobb mértékben valósította, mint a tudományok bármelyike. Ez okozza, hogy a mennyiségtan tanulmányozása által, és csak általa alkothat az ember magának helyes és mély fogalmat a tudomány mibenlétéről. — A mathesisnél kell keresni azt az általános módszert, melyet az emberi szellem minden positiv kutatásnál alkalmaz, mert sehol másutt nincsenek a feladatok oly teljesen megoldva, sehol sincsen a bebizonyitás oly messzire, oly ellenállhatatlan szigorral kiterjesztve.

A mathesis fölosztása.

A czél: a mathesis kutatásának egymástól különböző főirányait präcise jellemezni.

Minden mennyiségtani kérdés megfejtése szükségképpen két részre oszlik, melyeknek természete lényegileg különböző. Ismeretes, hogy a mathesis az ismeretlen nagyságokat ismeretesekkel fejez ki aköztök levő összefüggés alapján. Ily formán először a mennyiségek közt fenálló összefüggést kell pontosan megismernünk, s ez képezi a kutatás concret részét. E müvelet után azonban megváltozik a feladat, mert tisztán a szám kérdésévé lesz, mely abban áll, hogy egy ismeretlen számot ismertekkel fejezzünk ki, ha azokat pontos kapcsolat köti össze. Ez pedig az eljárásnak abstract része. A mathesist tehát két tudományágra oszthatjuk: az abstract mathematikára és a concret mathematikára.

A menyiségtani kérdésnél egyszer az abstract, másszor a concret résznek megfejtése okozza a főnehézséget; mert hisz lehet egy tüneménynek mennyiségtani törvénye igen egyszerű, de nehezen megnyerhető, és lehet a törvény könnyen fölfedezhető, amellett azonban igen összetett. — Világos tehát, hogy a mennyiségtani tudomány e két része terjedelemre és nehézségre nézve egyenértékü.

E két rész azonban nem csak a szellem által vizsgált tárgyra nézve, hanem a kutatás természetére nézve is különbözik. — A tünemények egész soránál ugyanis ugyan azon kapocs állhat fön, hogy a tüneményeket, bár igen különböznek egymástól, a menyiségtudós az analysis egy kérdése gyanánt tekinti és egyszer s mindenkorra megoldhatja. Igy pl. a szabadesésnél (üres térben) az út és időközti relatio, a gömb felülete és az átmérő közti kapcsolat, sőt a fény, hang és hő intensitasa és a forrásnak a hatásnak kitett testtől való távola közti összefüggés tárgyalásának abstract része egyforma; a concret részt azonban mindenikre nézve külön kell megvizsgálni a nélkül, hogy egyiknek vagy másiknak megoldása a többire nézve segitséget nyujtana. Nem lehet tehát átalános módszert megalapitani, mely meghatározott és változhatatlan uton bármily mennyiségek közti relatiok felfedezésére vezetne: mindig csak különös módszerről lehet szó, mely itt a geometriai, mechanikai, physikai tüneményekre vonatkozik. Föltéve azonban, hogy a mennyiségek közt levő relatiokat pontosan ismerjük, ugy arra néve, hogy ezek egyikét a másikkal kifejezzük, már vannak átalános módszereink. A mathesis abstract része tehát átalános, a concret rész pedig különös természetü.

A concret mathesisnek kisérleti, physikai, tüneményszerü jelleme van; mig az abstract rész tisztán logikai. — A concret rész a külvilágra van alapitva és nem fejthető meg pusztán értelmi combinátiók utján. Az abstract rész ellenben csak a levezetések rövidebb vagy hosszabb sorából áll.

A concret és abstract mathesis mibenléte.

A concret mathesisnek, melynek feladata a tüneményeket egyenleteknek alávetni, annyi részből kellene állnia, ahány egymástól lényegesen különböző categoriája van a tüneményeknek.

Az összes tünemények összetartozó fajtái közt azonban pontos quantitativ kapcsolatot megalapitni csak ideális czélja lehet a concret mathesisnek, elérni azt soha nem fogja az alkalmazásnál föllépő leküzdhetetlen nehézség miatt. Ha azonban egy tudomány teljes szellemi jelentőségéről van szó, ez esetben ki kell azt terjeszteni minden kérdésre, mely logikailag véve hatáskörébe tartozik.

Az emberi szellem jelen állapotában a tüneményeknek két átalános categoriája van, amelyekre vonatkozó egyenletek ismeretesek: az egyik categoria a geometriai, a másik a mozgási tüneményeket öleli föl.

E beosztás logikai átalánossága akkor tünik ki, ha a tüneményeket a természet-philosophia legmagasb álláspontjáról vizsgáljuk. Ha u. i. a mindenség mozdulatlan volna, csak geometriai tünemények léteznének, mert alakról, nagyságról és helyzetről lehetne csak szó. De tekintetbe véve a mindenségben az időben lefolyó helyzetváltozásokat, szükségkép még a mechanikai tüneményekkel tágul megfigyelésünk köre. — Blainville e meggondolást igy fejezte ki: a mindenség statikus szempontból tekintve geometriai tüneményekhez vezet, mig dynamikus álláspontból tekintve a mindenséget a mechanikus tüneményekhez jutunk.

Az abstract mathesis köre már pontosabban, sőt teljes pontossággal meg van határozva. Tárgyát a calculus (számtan a szó legtágasb értelmében) képezi, mely a számmüveleteken túl kiterjed a trancendens analysis legmélyebb kérdéseire. A számtan a számokra vonatkozó összes kérdések megfejtését czélozza. Kiinduló pontja pedig a kérdéses nagyságok közt fennálló kapcsolatoknak vagyis egyenleteknek pontos ismerete.

A mennyiségtani analysis fogalmai abstractabbak, általánosabbak és egyszerübbek mint akár a mértaniak, akár a mechanikaiak. Igaz ugyan, hogy az analysis fő alkotásai a geometriai és mechanikai vizsgálatok hatása alatt keletkeztek, sőt ezek előrehaladása befolyt nem egyszer az analysisére is; mégis a logika álláspontjáról tekintve, az utóbbi a geometriától és mechanikától teljesen független, mig ezeknek az analysis képezi alapját. — Sőt kimondhatjuk, hogy az analysis az összes positiv ismeretek alapja, mert fogalmai az összes fogalmak közt, melyeket r e a l i s a n észrevehetünk, a legegyszerübbek, legelvontabbak, legátalánosabbak. Tagadhatatlan az, hogy nincs kérdés, mely végsőelemzésben számviszonyokra alapított ne volna, mely tehát a mennyiségek közt fenálló relatiok alapján a számok kérdésévé ne válnék; és ha a számviszonyokat a mennyiségek közt nem ismerjük, végczélunk mindig oda irányul, ezeket megalapitni. Hiába hozná fel valaki Kant átalános beosztását, mely szerint a fogalmak két kategoriába oszthatók minőség és mennyiség szerint, s csak ez utóbbi kategoria képezi a mathesis tárgyát. E metaphysikai beosztás felületes megkülönböztetését magának a mathesisnek fejlődése is megczáfolta. A mathematikában föllépő concretnek és abstractnak összefüggéséséről való alapvető gondolat is kimutatta, hogy minden minőség számbeli fogalmakra vezethető vissza. E gondolatot Descartes csak a geometriai tüneményekre mutatta ki; utódai már a mechanikai, hő-, hang- és fénytüneményekre is kiterjesztik. E fokozatos átalánositás hozta magával, hogy a mennyiségtudós minden tüneményt e g y e n l e t b e n való kifejezésre alkalmasnak tekint, mint ez a görbe vonalnál vagy mozgásnál lehetséges, fentartva az egyenlet f ö l t a l á l á s á n a k és m e g o l d á s á n a k nehézségét, a mely többnyire fölülmulja az ember értelmi erejét. Hogy u. i. egy kérdés a mathematikai analysis körébe léphessen, meg kell alapítani a tüneményekben levő, coexistáló mennyiségek kapcsolatát, mert ennek megalapítása kiinduló pontja az analysisnek. E kapcsolat fölfedezése azonban annál nehezebb, minél különösb és ennek következtében összetettebb tüneményről van szó.

Az élettelen tárgyak átalános tulajdonságai csaknem változatlanok, vagy legalább igen egyszerü változásoknak alávetvék, mely változásokat az egyformaság jellemzi s következéskép pontos törvényeknek hódolnak. Pl. az anorganikus szilárd testek alakja, állománya, fajsúlya, ruganyossága stb. jelentékeny időre megtartja számértékét s ez megengedi azok mathematikai szempotból való vizsgálatát. Már a chemikai tünemények összetettebbek, több körülménytől függők, több változásnak alávetettek, szabálytalanabbaknak látszók.

Az organikus testek tulajdonságai azonban akár a geometriaikat, akár mechanikaiakat, akár a chemiaikat, biologiaiakat tekintsük, a változások megszámlálhatatlan sokaságának vannak alávetve még a legkisebb időközökben is, mely változásokat belső vagy külső, magukban is változó körülmények okozzák. Hogy azonban a tünemények nagy complicáltsága miatt nem vethetjük alá a tüneményeket mathematikai törvénynek, még nem jele annak, hogy ily törvény átalában nem létezik. Ha szigoruan elkülönithető lenne minden egyszerü ok, mely közreműködik egy élettani tünemény létrehozatalánál, nagyon hihető, hogy kellő határok közt a behatás és a visszahatás mennyisége közt oly szigoruan pontos kapcsolat léteznék, mint a mily pontos kapcsolat a gravitatióban a természeti törvények példányképében van kifejezve. A tünemények látszólagos szabálytalanságát az agensek igen nagy száma okozza. Hisz nem is kell az élő testekhez fordulnunk, már az élettelen testeken is megokolva látjuk állitásunkat. A meteorologiai tüneményeknél az agensek, melyek némelyikét még nem is ismerjük, bizonyára mathematikai törvényeknek alávetettek; de sokaságuk a megfigyeléseket oly szabályszerütlenekké teszi, mintha semmiféle präcis föltételnek sem hódolnának. Sőt bármely abstract esetről térjünk a concretre, tekintetbe véve mindazon föltételeket, melyek módositólag hathatnak, ily értelemben a mathematikai megoldás legtöbb esetben lehetetlenné lesz. Igy pl. nincs megoldva a nehézség behatása alatt álló folyadéknak egy csövön való kiömlése, ha minden lényeges körülményt tekintetbe veszünk; s ugyanigy áll a dolog a szilárd projectil kérdésével is, ha az ellenálló közegben mozog. Hogy az égi tünemények beható vizsgálatára az analysis oly csodálatosan alkalmasnak mutatkozik, annak oka is csak az, hogy e tünemények aránylag rendkivül egyszerüek ama — szinte mondhatná az ember — esetleges okoknál fogva, hogy számuk kicsi, tömegük csaknem elenyésző a napéhoz képest, távolságuk egymástól aránylag igen nagy, pályájuk csaknem köralaku és viszonos inclinatiójuk kicsiny. Ha ezen körülmények nem állanának fön, úgy a gravitatio törvényének ismerete az égi tüneményeket mostanig sem vetette volna alá a mennyiségtani analysisnek, sőt a gravitatió-törvényt sem inducalhattuk volna.

E meggondolásból levonva a következményeket, azt mondhatjuk, hogy ha a mathematikai tudomány szigorú logikai átalánosságát csak az inorganikus physika egyes részeire kiterjesztjük, még ez esetben is nagyon kibővitettük valódi kiterjedése határait. E határon túl alkalmazva a mennyiségtan a chimerikus és elérhetetlen tökéletességű kutatások által tudományos irányától fosztatnék meg.

Átalános vizsgálat a mathematikai analysisre nézve.

Descartes óta az abstrakt analysis haladását a concret rész haladása szabta meg; sőt az abstract rész főbb alkotásai még jelenleg is magukon hordják geometriai vagy mechanikai eredetök bélyegét, bár jelenleg ezen kezdetleges jellegtől egészen fölszabadult az analysis különösen Lagrange úttörő művei által, ki az analysist már teljesen abstract, egységes és folytonos rendszerbe foglalta.

E rendszer ismertetése lesz feladatunk, de csak a legátalánosb vizsgálatokra terjeszkedünk ki.

A concret mathesis czélja a természeti törvényeket kifejező egyenletek fölállitása, s ez egyenletek kiinduló pontját képezik az abstract mathesisnek, melynek tárgya kifejezni az egyik mennyiség értékét a másikéban. Ilyformán szükségképi követelmény az egyenletnek fogalmát szigorúan meghatározni. Ez eszközli majd, hogy az abstract és concret mathesist elválasztó határvonalt is pontosabban megvonhatjuk.

Igen tágas az egyenlet azon meghatározása, hogy az a tekintetbe vett nagyságok bármily kifejezése közt fenálló egyenlőségi viszony. Minden egyenlet egyenlőségi viszony ugyan; de a megforditás logikailag hibás, correlationális tévedés van benne. E lényeges megkülönböztetést nem téve, megmagyarázhatatlanná válnék ama fő és roppant nehézség, melyre az ember bukkan, midőn a concret viszonyt abstracte kell kifejezni, a mely lépés minden mennyiségtani kérdésben előjő. Ha az egyenletnek oly tágas értelme volna, mint az az imént föl volt emlitve, akkor bármily föladatra vonatkozó egyenletrendszer fölállitása semmi nehézséggel sem járna, mivel az egyenlőségi viszonyt rendesen csak közvetetlenül, vagy legtölebb igen csekély transformátiók mellett fogjuk fel. Az egyenlet fogalma változott a tudomány haladtával, s megalapitása okáért a függvények egy szempont szerinti osztályozásával kell tisztába jönnünk. — A függvények abstractak vagy concretek lehetnek, s ezek közül az egyenletekben csak az elsők szerepelnek. A figyelembe vett nagyságokra nézve fönálló két abstract függvénynek egyenlőségi viszonya teszi az egyenletet. Itt azonban meg kell jegyezni, hogy az abstract függvények nemcsak a feladat által nyujtott nagyságokra vonatkozhatnak, hanem minden más segéd-nagyságra is, melyek a kérdéshez kapcsolódnak s melyeket csak a tüneményekre vonatkozó egyenletek fölfedezésének könnyitésére vezetünk be mathematikai eljárás utján.

A függvények emlitett felosztása a priori és a posteriori történhetik; t. i. átalánosan jellemezzük a függvények mindenik nemét és azután előszámláljuk az ismeretes abstract függvények közül azokat, melyekből a többi összetehető. E két eljárás kiegésziti egymást.

A priori tekintve abstractak azok a függvények, melyek a nagyságok közt oly összefüggést fejeznek ki, mely számok közt fenállónak tekinthető a nélkül, hogy egy tüneményt kellene fölhozni, melynél e kapcsolat valósul. Ezzel ellentétben concretek azok a függvények, melyek közti kapcsolat csak úgy definiálható, gondolható, ha azt egy physikai, geometriai vagy mechanikai esetet megjelölőnek tekintjük.

A függvények nagyobbára concretek voltak eredetileg. A mostanság teljesen abstract függvények is a tudomány kezdetén nem voltak ilyenek. A hatvány például csak Viéte és Descartes óta abstract függvény. Az ókor mathematikusai előtt x^2, x^3 a területnek illetőlegesen a köbtartalomnak a hosszhoz való viszonyát fejezték ki, s a függvények elemi tulajdonságait is geometriai uton ismerték fel. A függvények e beosztására egy alkalmas példa még a direct vagy invers körfüggvények is, melyek még most is concretek vagy abstractak a szerint, a mint különböző szempontból vizsgáljuk őket.

Miután röviden megemlitettük a jellemző tulajdonságot, mely egy függvényt abstractá vagy concretté tesz, egyszerüvé válik annak a posteriori megalapitása, hogy egy függvény az analytikus egyenletekben szerepelhet-e, vagyis abstract jellege van-e, mert minden efajta függvényt elő fogunk sorolni.

De hisz az analytikus függvények száma végtelen, tehát elősorolásuk nem lehetséges. E feladat azonban könnyűvé lesz, ha a függvényeket e g y s z e r ű e k r e és ö s s z e t e t t e k r e osztjuk; mert ha végtelen is az abstract függvények száma, ugy ezek igen kis számu e l e m i f ü g g v é n y e k-ből tehetők össze, melyeket definiálhatunk s egy függvény concret vagy abstract jellegü lesz a szerint, amint csak ez alapelemekből összetett, vagy másokat is foglal magában. Világos, hogy itt elég az egy változós függvényekre kiterjeszkedni, mert a több független változójuak is csak többé vagy kevésbé összetettek.

Ha x a független és y a függő változó, ugy egymástól való függésüknek 5 faja lehet, melyekhez az által, hogy y-t tekintjük bennük függetlennek és x-t függőnek, még 5 invers egyszerü functio járul:

1. pár.	1. $y = a + x$	összeg
	2. $x = y - a$	különbség
2. pár.	1. $y = ax$	szorzat
	2. $x = y : a$	hányados
3. pár.	1. $y = x^a$	hatvány
	2. $x = \sqrt[a]{y}$	gyök
4. pár.	1. $y = a^x$	exponentialis függvény
	2. $x = \lg y$	logarithmikus függvény
5. pár.	1. $y = \sin x$	direct kör függvény (trigonometrikus)
	2. $x = \mathrm{arc}(\sin = y) = \mathrm{arcsin} y$	invers kör függvény (kyklometrikus)

A sin x egyszerü függvény, ha ugy tekintjük, mint egy geometriai relatio megjelölését, ekkor azonban concret functio. Máskülönben teljesen megfelel egy abstract függvény követelményének, ha azt $\frac{e^{xi} - e^{xi}}{2i}$ által definiáltnak tekintjük, de ekkor nem új függvény, mert a megelőzőkből összetettnek tünik elő. — Lehet ily formán még más concret függvényt is az analytikus elemi függvények közé fölvenni: ilyenek pl. a Legendre és Jacobi által bevezetett elliptikus függvények, s Fourier-nek „Théorie analytique de la chaleur" 1822 müvében előforduló néhány integrál, melyek az analysis mezejét lényegesen kitágitották.

A priori semmiféle rationális meggondolás sem irja körül szigorúan az analysis elemeinek e kis számát, mely a tudomány jelen állásának tényleges kifejezése. Hisz analytikus elemeink jelenleg számosabbak, mint Descartes, Newton, Leibnitz idejében voltak: a két utolsó pár függvényt csak Bernoulli János és Euler hozta be: az elliptikus függvények születési ideje századunk elejére esik. Valószinű, hogy idővel még ezekhez is újak fognak járulni, de számuk gyarapodása soha sem lesz nagy, mert számuk növesztése igen nagy nehézséget okoz.

Az elmondottak alapján juthatunk az egyenlet fogalmához. — E magyarázat egyúttal megértetheti, mily nehéz a tüneményekre vonatkozó egyenletek fölállitása; ez u. i. csak ugy lehet, ha a felemlitett kis számú mathematikai (elemi) függvények segitségével azon összetett függvényeket birjuk kifejezni, melyekben a tüneményekre vonatkozó tőrvények benfoglalvák. Ez által a problema abstracttá válik és a szám kérdésévé lesz, mert az emlitettek az egyedüli egyszerű functiók, melyek számok közt fönállnak. Látjuk egyúttal, hogy a concretről az abstractra való átmenet nehézségét az analytikai elemi functiók kis száma okozza.

Miután az analysis tárgyát és körét szigorúan megjelöltük, most annak fölosztása következik.

Első meggondolásra rögtön két egymástól lényegesen különböző részre oszlik az analysis. Az egyik rész az algebra, a másik az arithmetika, itt azonban e kifejezéseknek a lehető legtágabb logikai értelem adandó.

A calculus minden kérdésének megfejtése két folytatólagos, lényegében különböző részből áll. Az elsőnek feladata az adott egyenletek transformatiója a végből, hogy kitünjék az ismeretleneknek értéke kifejezve az ismeretesekben; ez az algebra feladata. A második résznek czélja az algebra által nyert képletek értékét kifejteni, vagyis meghatározni a keresett számokat, melyeket már adott számokból alkotott explicit függvények képviselnek; ezzel az arithmetika foglalkozik. Ha pl. $x^3+3ax-2b=0$ egyenletet vizsgáljuk, mely a szög három egyenlő részre való osztásánál is szerepel, nyilvánvaló, hogy egyrészt x másrészt a és b közti függés teljesen meghatározott; de míg az egyenlet e primitiv alakját megtartja, nem látszik, hogy származik az ismeretlen az ismeretesekből. Ez a kérdés, mielőtt az ismeretlen értékének kifejtésére gondolhatnánk. Ha a transformátiók egy sora után mindinkább világossá lett az ismeretlennek az ismeretesekből való származási módja, ez alakra jutánk:

$$x=\sqrt[3]{b+\sqrt{b^2+a^3}}+\sqrt[3]{b-\sqrt{b^2+a^3}},$$

ekkor az algebrai rész be van fejezve, itt kezdődik az arithmetika feladata, t. i. az x-nek a és b specialis értékeire való kiszámitása.

Az algebra és arithmetika tehát eltérnek egymástól kitüzött czéljukra nézve, de különböznek a szempontban is, melyből a számokat tekintik. Az algebra ugyanis a számok közti relatiókat, az arithmetika a számok értékét vizsgálja.

Az algebra (algebre ou le calcul des fonctions) tárgya az egyenletek megoldása, e definitiót lehető legtágasb értelemben vevén ugy, hogy ide még az implicit függvényeknek explicitekké való változtatását is fölveszszük; az arithmetika (arithmétique ou le calcul des valeurs) feladata a függvények értékének kifejtése.

Innen látszik, mily elégtelenek, sőt tévesek a használatos meghatározások. Rendesen a tulbecsült fontosságu megjelölés, melyre az okoskodás folyamán szükség van, nyujtotta a felosztási alapot, a mi elvben képtelenség, tényleg pedig téves. Sőt Newton hires definitiója is: az algebra átalános arithmetika, helytelen fogalmat nyujt az algebra és arithmetika természetéről.

Következőkben a calculus két részének terjedelmét, jelentőségét és nehézségét átalánosságban fogjuk tárgyalni, hogy ezután csak a függvényekre kelljen kiterjeszkednünk.

Az arithmetika első tekintetre oly terjedelmesnek látszik, mint az algebra. Rövid meggondolás azonban már elég, hogy az arithmetika szükebb körét belássuk. A függvények egyszerüek és összetettek, lehetnek; s világos, hogy ha az egyszerüek értékét meghatározni tudjuk az összetett függvények e tekintetben semmi nehézséget sem nyujtnak. Algebrai tekintetben azonban az összetett függvény egészen más tulajdonságokat mutathat, mint azon egyszerü függvények, melyekből áll; innen ered a főnehézség. Az arithmetikai operatiók száma átalában azon 10 abstract függvény által van megadva, melyek táblázatilag is felsoroltattak. E tiz függvény értékkiszámitása minden más analytikai functio értékkiszámitásának módját is megadja. Az arithmetika köre tehát meg van szoritva, az algebráé végtelen.

Az arithmetikának azonban tágasb mezeje van, mint az elmondottak után valaki gondolhatná. A logarithmikus és trigonometrikus táblázat, oly számegyenletek megoldása, melyeket algebrailag megoldani nem lehet, a határozott integrálok meghatározása, melyeknek határozatlan integrálja ismeretlen, mind az arithmetika uradalmába tartoznak, bár erre nézve az ezen vizsgálatoknál használt jelvényeknek tulajdonitott tulságos fontosság habozóvá is tehetné az embert. Arithmetikához tartozik a számelmélet is, mely a különböző számokhoz tartozó, értékükhöz tapadó tulajdonságoknak fölfedezésével foglalkozik. E részre illenék rá leginkább Newton definitiója.

Bár elég tágas tehát az arithmetika mezeje, mégis összehasonlítva azt a functiók tanával, az arithmetika csak egy fejezete az abstract mathesisnek.

Ez utóbbi gondolat megértésére meg kell jegyeznünk, hogy ha ki kell számítani egy ismeretlen számot, melynek alakulási törvénye adva van, úgy e szám az arithmetikai kérdés puszta föltevésével is már ki van valamilyen alakban fejezve. Az ismeretlen számnak meghatározása azonban abban áll, hogy a megadott kifejezést más meghatározott és megszokott alakban (a számlálás rendszerében előforduló valamely számmal) irjuk, s ez alakban való kifejezéséhez, mint föltételhez, kötjük a különös számnak pontos ismeretét. Az értékmeghatározás sem egyéb tehát, mint oly transformatió, mely a számot ily alakra hozza:

$$a_n\sigma^n + a_{n-1}\sigma^{n-1} + \ldots + a_1\sigma + a_0\sigma^0 + a_{-1}\sigma^{-1} + \ldots + a_{-m}\sigma^{-m}$$

hol σ rendesen 10-et jelent, a_i átalában egész, positiv σ-nál kisebb szám. Az arithmetikai operatiók ilyformán ugy tekinthetők, mint az algebrai transformatióknak különös esetei, tekintetbe nem véve azon különös nehézségeket, melyek a coefficiensek megalapítására háramlanak ezeknek viszonos függése következtében.

Ebből aztán világosan kitünik, hogy az abstract mathesist főkép a functiótan alkotja, mely annak legfontosabb, legelterjedtebb és legnehezebb része, s ezért a következők az algebrára fognak vonatkozni.

Megalapítottuk a concretről az abstractra való átmenet nehézségének okát, kiséreljük meg philosophiailag méltányolni azt az eljárást, melylyel az esetek oly nagy számánál e nehézségen diadalmaskodott az emberi ész. Közvetetlenül vizsgálván e fontos kérdést, a nehézségek elhárítására első eszközül uj elemi függvények képzése ajánlkoznék, mert hisz ezeknek kicsiny száma a főbaj. Bármily természetes is e gondolat, mélyebb vizsgálódásnál illusoricussá lesz. Lehet ugyan egy vagy más tekintetben hasznos az elemek gyarapítása, de okvetetlenül elégtelen.

Egy uj elemi függvény megalkotása már magában véve ellentmondónak látszik. Egy uj analytikai elem nem teljesithetné azon lényeges föltételeket, melyek az elemi függvényeket jellemzik, t. i. értéke nem volna közvetetlenül kiszámítható; mikép lehetne másrészt kiszámítni egy uj, valóban egyszerü függvényt, mely a már ismertekkel nincs valami kapcsolatba hozva. Egy uj elemi függvénynek, illetőleg egy összetartozó függvénypárnak (minden függvényhez egy invers függvény is tartozik) az analysisbe való behozatala uj alapmüvelet megalkotását föltételezné, a mi igen nehéznek látszik.

Ha kutatjuk a módot, melynek segitségével az emberi szellem uj analytikai elemeket alkotott, ugy azt látjuk, hogy ez eljárás teljesen ki van már meritve. Az exponentiális functió: a^x és a logarithmikus: lgx egy ismert függvénynek, a legátalánosabb hatványalaknak, más szempontból való vizsgálata által keletkeztek. A hatványban u. i. az alap helyett az exponenst kellett változónak tekinteni. Ez eljárás azonban bármily szellemes legyen is, ezen kivül semmi ujat nem nyujt, mert többi analytikai elemeinkben ugyanily módon forditva a dolgon, azok egymásba mennek át. Látható, hogy aligha van mód, melynek segitségével oly abstract analytikai elemeket képezhetnénk, melyek az elemi függvényeket jellemző szükséges és elégséges föltételeknek megfelelnének. De azért semmiesetre sem állitható, hogy jelenleg ezen tekintetben értelmi belátásunk határához értünk; sőt bizonyos az, hogy az analysisnek legutóbbi időben történt haladása kibővitette elemi függvényekre vonatkozó ismereteinket, midőn bizonyos értelemben vett határozott integrálokat, az elemek közé vétettek fel, melyek több tekintetben az egyszerü függvények helyét pótolják, bár a szükséges föltételek mindenikének nem felelnek meg.

Az elemi függvények szám-szaporitásának eszméjétől tehát el kell állnunk, s igy csak az az eszköz marad hátra, hogy nem találhatván meg közvetetlenül a tekintetbe vett mennyiségek közti egyenletet, ezt segitő mennyiségek között keressük, melyekből a kezdetleges nagyságok közt fenálló egyenletre térünk át. Ez a conceptio az emberi szellemnek különösen termékeny alkotása, mely a természeti tünemények mennyiségtani kutatásának leghatásosb eszközét szolgáltatja, a transcendens analysist.

Philosophiai szempontból a segédmennyiségek a kérdésben előjövő elemekből valamilyen törvény szerint származnak, s igy e gondolat nagyobb hordozó-erejü, mint milyet neki még a legjelesb mennyiségtudósok is tulajdonitnak. Fontos e gondolatot egész logikai terjedelmében feltüntetni, mert ez által a derivatiónak sokszorosan átalánosabb módjához jutunk, mint a mily értelemben a derivatiót most venni szokták; ez átalános mód a mennyiségtani analysis tökéletesitésére és a jelen eszközöknél sokkal hatásosabbak megalkotására van hivatva a természeti törvények fölfedezésének czéljából. Hogy miként történik ez, még tárgyalás alá kerül. A kezdetleges mennyiségek helyébe a tudomány jelen állapotában segédmennyiségekül a végtelen kis elemeket hozza be a transcendens analysis. E végtelen kis elemeket Leibnitz különböző rendü differentiale-knek mondta. Newton fluxio-knak vagy az eredeti két mennyiség egymásnak megfelelő növekedése kezdet- és végarányának nevezi. Lagrange-nál e segédmennyiségek deriváltaknak neveztetnek, melyek alatt az összetartozó növekedéseket kifejező egyenletek együtthatóit értjük.

A transcendens analysisnek e három főszempont szerint való felfogására még később áttérünk. Most csak arra használjuk fel a segédmennyiségek eszméjét, hogy a függvénytan alapfelosztását létesíthessük. A gondolatok természetes rendjét követve a transcendens analysisnek elsőnek kellene lennie a tárgyalásnál, mert czélja az, hogy könnyítse a mennyiségek közti egyenletek fölállitását, minek mindenesetre előbb kell megtörténnie mint a közönséges analysis (analyse ordinaire) feladatát képező egyenlet-megoldásnak. De bár ez a kapcsolat az analysis e két része közt, a közhasználatban az utóbbi mégis megelőzi az elsőt, mert a transcendens analysis a kérdés megfejtésénél mindig reászorul a közönségesre s igy ha ezt előlegesen nem tanulmányoztuk, sok kérdést függőben kellene hagynunk.

Ilyformán azt mondhatjuk, hogy az analysis két részből áll: 1) a functiók tanából (calcul des fonctions) vagy a közönséges analysisből vagy az algebrából (legtágabb értelmében véve e szót), e résznek közvetetlen czélja az egyenletmegoldás, ha az egyenletek a tekintetbe vett mennyiségek közt közvetetlenül fönállnak, és 2) a transc. analysisből, vagy infinitesimalis calculusból vagy a fluensek és fluxiók tanából vagy az elenyésző (evanuissants) mennyiségek tudományából. Comte átalánositván és praecisirozván Lagrange eszméit, az első részt a direct, a másodikat az indirect függvények tanának nevezi.

A direct függvények tanának átalános vizsgálata.

Feladatunk a direct függvények tanának alkotását és jelenlegi fejlettségének fokát vizsgálni.

E résznek czélját képezi az egyenletek megoldása, vagyis az ismeretes és ismeretlen mennyiségek közti egyenletekből az ismeretlenek értékét kifejező ismeretes nagyságok összeköttetési módjának fölfedezése; — s igy annyi részre oszlik, ahány különböző faju egyenletet lehet megkülönböztetni. Terjedelme tehát határtalan, mert a különböző fajta függvények, melyekből az egyenlet állhat, végtelen számuak, jóllehet igen kevés elemekből alakulnak.

Az egyenletek amaz analytikai elemek szerint osztatnak fel, melyekből keletkeznek.

Ugy az egy mint a több változós egyenletek két főosztályra oszlanak: 1) az algebrai egyenletekre, ha az elemi függvények közül csak a három első párt tartalmazzák és 2) transcendens egyenletekre, ha exponentiális vagy circularis függvények fordulnak elő az egyenletben. Ez utóbbi osztályra vonatkozó ismereteinkigen tökéletlenek. Felvilágositásul szolgáljon a $a^x + b^x = c^x$ egyszerű alakú egyenlet, melynek megoldását semmi módon sem létesithetni.

Az algebrai egyenletek elméletében már valamivel tovább haladtunk. Ez egyenletek a változók irrationális vagy rationális függvényeit tartalmazzák, de könnyebb vagy nehezebb transformatiókkal az irrationális függvényeket rationális alakra hozhatjuk. Ez az oka, hogy a mennyiségtudósok csak az utóbbiak megoldásával foglalkoznak.

Az algebra keletkezésekor az egyenleteket a bennök előforduló tagok száma szerint osztályozták. E beosztás hibás volt, mert alapul egy esetékes jelt (note accidentale) választott. Mellesleg megjegyezhetjük, hogy e hiba a differentiális egyenletek osztályozásánál is ismétlődött. Előnyösnek bizonyult mégis a kéttagu (binomiális) egyenleteket más neműektől megkülönböztetni.

Az egyenleteknek fokuk szerinti osztályozása természetes alapon nyugszik. E beosztás megjelöli a megoldás nehézségének a fokszám nagyobbodtával való növekedését, mi onnan jön, hogy a magasb fokú egyenlet a nála alacsonyabb fokú egyenletek megoldását föltételezi (legalább negyedik fokig ez állitás érvényes). A nehézségek, a bonyodalmak már a 4. foku egyenletnél nagyok. Az ötödfoku egyenletekről pedig, ha bizonyos föltételeknek nem alávetvék, kimutatták, hogy átalánosan megoldhatatlanok. Egy n-ed foku átalános egyenlet megoldásáról ilyformán nem szólhatunk, mert az Lagrange szerint túlszárnyalja értelmünket.

De ha az n-ed fokú egyenletet meg is tudnók oldani, az algebrai kérdéseknek csak igen kicsiny része lenne letárgyalva. Máskülönben a figyelmes vizsgálat mutatja, hogy az emberi természet hatalmasb uj kérdések föltevésében, mint a milyenek az ezek megfejtésére szolgáló kútforrások, más szavakkal: az emberi szellem képzelő ereje nagyobb, mint az érvelő. Ezért nem győzhetjük le soha a képzelőerő felhalmozta nehézségeket, bármily kifejlődést érjen is el szellemi működésünk. Igy ha a jelenleg ismert egyenletalakokat meg is oldanák valaha, ami képzelődésnél nem egyéb, bizonyára túlhaladná az emberi szellem a nehézséget, hogy — e czélt elérendő — uj elemi segédfüggvényeket állítson fel, de ezek megint uj megoldatlan függvények alkotására vezetnének, s igy az analytikai ismereteknek ekkor is a jelenlegi állapothoz hasonló relativ tökéletlensége állana elő.

Algebrai ismeretünk összege az első-, másod-, harmad-, negyedfoku, a binomiális, néhány speciális magasb foku, igen kis számu exponentiális, logarithmikus és circularis egyenlet megoldására terjed ki. A századok törekvés nem e cseppnyi ismeret tágitását, hanem hasznositását czélozta és e fáradozást teljes siker koronázta.

A tudósok belátván, hogy a negyedik foknál magasb foku egyenlet átalános megoldása nem sikerül, e nagy hiányt kitelhetőleg pótolni akarták a mathematikai tudomány azon részével, mely az egyenletek számbeli megoldásának neve alatt ismeretes. Czélja e tudományszaknak egy átalános megoldási képlet ismerete nélkül az ismeretlen öszszes értékeit ugy meghatározni, hogy azok az adott föltételeknek megfeleljenek. Az analystáknak erre vonatkozó különös és nem teljes müvei, hol az algebrai és arithmetikai kérdések vegyesen jönnek elő, oda vitték a dolgot, hogy e czélt tetszőleges pontossággal elérhetjük, s igy ez irányban még csak az eljárás egyszerüsítése van hátra.

A direct functiok tudománya két részre oszlik a szerint amint az egyenletek algebrai megoldása vagy számbeli megfejtése a főczél. Nemcsak a czél, különböző, e két esetben hanem a szempont is, melylyel a szám szerepel. Az első rész az egyenletek természete szerint oszlik fel, függetlenül az ismeretlenek értékétől. A másik rész éppen ellenkezőleg nem az egyenletek neme, hanem az ismeretlenek értékének számneme szerint választ más és más eszközöket czélja elérésére. Az incommensurabilis vagy commensurabilis gyökök megkülönböztetése semmi jelentőséggel sem bir az algebrai megoldásnál, mert a gyökök rationalitása vagy irrationalitása az eljárást nem változtatja meg; s ép igy áll ez, ha a gyököknek reális és imaginarius osztályát különböztetjük meg.

E két rész fölött áll az egyenletek elmélete s forrásul szolgál hol az első, hol a második résznek. Két feladatot kell az egyenletek elméletében tárgyalni: 1) az egyenletek elemibb függvényekből összetételét (composition) és 2) az egyenletek transformatióját. Ez utóbbi egy egyenlet valamennyi ismeretlen gyökének ugyanazon törvény szerinti megváltoztatását foglalja magában. Az első feladatot az egy ismeretlenű egyenletnél tárgyalták legbehatóbban, a több ismeretlenű egyenleteknek decompositiója egyszerűbb függvényekre mindig az együtthatók között fenálló relatiók eredménye, de általános szempontból való tárgyalása igen nagy nehézségekkel jár.

Hogy a direct függvények tanának különböző részét fölkaroljuk, még a Descartes megalkotta határozatlan együtthatók módszerét kell megemlítenünk. Ez sokat vesztett fontosságából az infinitesimalis számitás fölfedezése által, mely utóbbi tudományágat a függvényeknek sorba fejtésénél annyira mennyire pótolja. Az infinitesimalis calculus azonban tágította a határozatlan együtthatók módszerének alkalmazási körét és forrásait, e módszer alkalmazása azóta gyakoribb lett, mint annakelőtte.

E vázlat után a direct functiók tanára vonatkozó néhány főbb szempont philosophiai megvilágítása válik szükségessé. Metaphysikai meggondolások az algebrában előjövő néhány symbolumra — pl. complexeknek nevezett kifejezésekre — vonatkozó nehézségeket mértéken fölül hajtották a helyett, hogy ez eredmények valódi lényegük szerint, mint egyszerü analytikai tények vétettek volna tekintetbe. Igy tekintve a számalakokat, könnyen belátható, miután a mathematikai analysis szelleme a nagyságokat egymáshoz való vonatkozásuk szerint fogja fel, függetlenül a meghatározott érték bármily gondolatától is, hogy a mathematikus minden fajta kifejezés elfogadására föltétlenül kötelezve érzi magát, ha e kifejezések az algebrai combinátiók eredményei*. Ha csak egyre nézve is kivételt csinálnánk látszólagos különlegessége miatt, mint a hogy ez megtörténhetik particularis föltételek mellett, melyeket a tekintetbe vett értékekre nézve teszünk, már kényszerülve volnánk conceptióink átalánosságát föladni, s minden okoskodásba a dolog lényegéhez nem tartozó, idegenszerű megkülönböztetést bevezetni, s igy elveszne a mathem. analysis jellemző tulajdona: a kapcsolatba hozott fogalmak egyformasága és egyszerűsége. A zavar, mely még a mathematikusok értelmét is nem egyszer elfogta ily különös kifejezések esetén, a függvény és az érték fogalmának összetévesztéséből ered. Igy pl. metaphysikai vizsgálatok a negativ mennyiségről hány helyén nem levő, minden alapot és tudományos becset nélkülöző fejtegetésre vezettek. — Pedig abstract értelemben véve elfogadásuk szükségszerüségét az előbbi meggondolás igazolja; s ha mint analytikai eszközt tekintjük őket, hogy képleteink átalánossága annál nagyobb legyen, a velök való bánás semmi nehézséget sem okoz. Kételyt a negativ számokra nézve csak sophistikus okoskodás támaszthat. A negativ számok abstract elmélete kielégitő, de nem igy áll a dolog concret elméletükkel. — Az utóbbi elmélet abban áll, hogy az értelmi ellentéteket + és — jellel jelöljük meg analytikailag, mit Descartes philosophiai megfigyelés eredményeként hozott használatba. A tény az: ha a mennyiségek kapcsolatát kifejező egyenletben a mennyiségek néhányát ellenkező értelemben akarjuk tekinteni, mint amilyen-

* E gondolatban van a jelenleg kivétel nélküliség (ausnahmslosigkeit) neve alatt ismeretes elv teljes pontossággal körülírva.

ben az egyenlet fölállitásánál az történt, nem kell az egyenletet ujból származtatni, csak minden értelmét ellenkezőre változtató mennyiségnek előjelét megváltoztatni, s az igy nyert egyenlet összeesik azzal, melyre jutottunk volna, ha az uj tünemény számára kerestük volna az analytikai kifejezést. E tényt átalánosan okadatolni nem lehet, de oly számos geometriai és mechanikai eset igazolja azt, hogy átalános érvénye kétségbevonhatlan.

Igen fontos ezenkivül a homogenitás principiuma; lényege abban áll, hogy a mennyiségek közti relátiók fenállása nem függ a választott egységtől, melyhez azokat viszonyitni kell, hogy számokban kifejezhessük, tehát a tünemény analytikai kifejezése nem változhatik meg, ha a szereplő mennyiségeket egységeik változásának megfelelőleg megmásitjuk. Lehetséges, hogy az egységek egymástól függetlenek, s ekkor a homogenitás az összetartozó mennyiségekre terjed ki. Máskor az egységeket relátiók kötik össze; ekkor az egységek alárendeltségére tekintettel kell lennünk a homogenitás megitélésénél. — Igy ha a geometriai tüneményt kifejező analytikai alakban vonalt, területet, köbtartalmat veszünk tekintetbe, gondolni kell e három mennyiség egységeinek kapcsolatára: $[t] = [h]^2$, $[k] = [h]^3$. — (A homogenitás vizsgálatával átalánosb szempontból Fourier „Théorie analytique de la chaleur" müvében foglalkozott).

Az indirect functiók tanára vonatkozó átalános szempontok összehasonlító vizsgálata.

Az indirect functiók tana három szempontból vizsgálható, melyeknek Leibnitz, Newton és Lagrange voltak megalapitói. Mindeniknek meg van a maga jellemző előnye. Lagrange conceptiójába fog valószinüleg a tudomány haladtával a másik kettő beleolvadni, s ekkor a Leibnitz és Newton alkotása csak történeti becsü lesz. Addig azonban e tudománynak azon ideiglenes állapotban kell maradnia, mely a különböző szempontoknak egyidejü tekintetbe vételét követeli meg. Logikailag nem kielégitő ugyanazon tárgynak többféle conceptió szerinti vizsgálata; de ez nem ejt csodálkozásba, ha meggondoljuk a tudományág roppant terjedelmét, nagy nehézségét és aránylag nem régi fönállását.

E tudomány csiráját a görögökre lehet visszavezetni, kik a kimerités (exhaustio) módszerével hidalták át a közt, mely az egyenes vonalu és görbe vonalu idomok közt fönáll. De ha megczáfolhatatlan is ez elv fontossága, nem járnak el mégsem helyesen azok, kik az exhaustió módszerét a mi modern felfogásunkkal egyenértékünek tekintik, mert a régieknek semmiféle átalános eszközük sem volt, melylyel a határértékeket meghatározhatták volna, eljárásuk elvont és változatlan szabályoknak és egyöntetü eljárásnak nem volt alávetve, pedig ez jellemzi a jelenlegi transcendens analysist. Fermat a maximumok és minimumok meghatározásánál valamint az érintő vonal problemájára vonatkozólag megtette az első kisérletet; eljárása hasonlitott a jelenlegihez, de nélkülözte az átalánosságot. Félszázaddal később Leibnitz lett megteremtője a transcendens analysisnek. De oly megérett volt már ez eszme, hogy, mint rendesen a nagyszabásu conceptioknál történni szokott, Newton is, bár egészen más meggondolással ugyanazon eredményekre jutott. — E történeti részlet után az a kérdés, miben áll a három-féle conceptió lényege? Leibnitz a számitásba az egyenletek fölállitásának könnyitésére a végtelen kis mennyiségeket hozza be, melyekből az egymással relatióban álló mennyiségeket összetetteknek kell tekinteni. E végtelen kis mennyiségek (differentialé-k) közt egyszerübb relátiók léteznek, mint a kezdetleges mennyiségek közt Ez egyszerü relátiókból pedig egy különös számitási mód a keresett egyenletekhez vezet, melyeket directe leggyakrabban nem lehetett megkapni.

Ha az itt jelölt átalános gondolatmenelet megismételjük, a másodrendü stb. differentialékhez jutunk.

E meggondolásból azonban még nem látható be, hogy a differentiale behozatala miért könnyitse a tünemények törvényeinek fölfedezését, mert hisz egy mennyiségnek kisebb vagy nagyobb értéke semmi befolyást nem gyakorolhat oly vizsgálatra, mely természeténél fogva a számérték fogalmától független. S mégis átalánosan föltüntethetni a differentiale behozatala által az egyenlet fölállitására kiterjedő egyszerüsitést. A végtelen kis mennyiségeknek különböző rendjét veszik föl, ezek vagy az elsőrendü differentiale egymásutáni hatványai, vagy oly kifejezések, melyeknek ezen hatványok valamelyikéhez való viszonya véges és meghatározott. Az infinitesimalis analysis sarkelve, hogy a végtelen kis mennyiségek a végesekhez képest és átalán a magasb rendü differentiale az alacsonyabb rendőhöz képest elhanyagolható. Ebből közvetlenül kiviláglik, miért könnyebb a mennyiségek differentiálé-i közt felállitni az egyenleteket; e differentialék helyett u. í. bármily ugyanazon rendü differentialéket helyettesíthetünk ha az uj elemek a megelőzőktől a náluk magasbrendü differentialekben különböznek is. Ez az alapja, hogy a geometriában a görbéket végtelen sok egyeneskéből, a görbe felületet sikelemekből, a változó mozgást a végtelen kis időben történő egyenletes mozgásból tekinthetjük összetettnek. E tudomány ág jellemének felvilágositására szolgáljon a sik görbe egy pontjához tartozó tangens amplitude-jére vonatkozó

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$$

egyenlet. Ez egyenlet minden görbéhez tartozik. Egy másik példa az, ha egy adott görbe hosszát akarnók meghatározni, melyet ugy tekintünk, mint a görbe végpontjaihoz tartozó abscissák függvényét. A legmélyebb vizsgálat sem tudna relátiót találni az iv és e coordináták között, mig a geometria elemeiből — az ivet végtelen kicsinek gondolva — következik:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2, \text{ vagy } ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Az első és második példában már csak a differentialeket ki kell küszöbölni s magukat a változókat kell a specialis esetekben helyökre behozni, s ez az indirect functiók körébe vág.

A transcendens analysist tehát két fontos tulajdonság jellemzi: az átalánosság (pl. egy diff. egyenlet adja az összes görbék tangenseit, egy másik területmeghatározásukat, az u. n. quadraturát, egy változatlan egyenlet az összes mozgásokat magában foglalja stb.) és a tünemények mennyiségtani törvényeinek könyü kifejezése.

Leibnitz conceptioja Descartes eszméjét: a természeti tüneményeknek analytikai ábrázolását is méltó világitásba helyezte; addig még Pascal sem méltatta ezt figyelmére. Oka, hogy trancendens analysis nélkül Descartes eszméje jelentékeny eredményekhez nem vezethetett; már pedig még a nagy szellemeknek is az a sajátja, hogy a módszereket nem philosophiai jellemök szerint, hanem az azok által közvetlenül elért tényleges ismeretek szerint becsülik meg.

Leibnitz eszméjének gyönge oldalát a bizonyitásnál követett logikai eljárás teszi. — Az infinitesimalis analysis első korában Bernoulli János, Jakab és mások inkább Leibnitz halhatatlan fölfedezésének sokirányu kiterjesztését czélozták, nem gondoltak a tan logikai alapjának biztos megvetésére. Ők másodrangu tudósok ellenvetéseire a legnehezebb problemák megfejtésével feleltek bizonyosan azon meggyőződéstől áthatva, hogy az uj eszközöket föl lehet használni, ha azok termékenyek, mert a tévedés nem fog soká észrevétlen maradni, ha a helyes eredmények megsokasodnak.

Mindennek daczára szükségessé vált a gondolkozás rendes szabályaival ellentétben állani látszó használatos eljárást szigoruan megokolni. Leibnitz megkisérlette e czélt, de téves magyarázatot nyujtott, midőn a végtelen kis mennyiségeket összehasonlithatatlanoknak mondta és midőn azokat a végesekkel szemben ugy tekintette elhanyagolhatóknak, mint elhanyagoljuk a porszemet a tengerhez képest: ez az infinitesimalis analysist közelitő számitássá alacsonyitaná, mi alapjában helytelen volna, mert hisz általánosságban nem lehetne előre látni, menynyire növeszthetik meg a műveletek a kezdet-hibákat, melyek ily körülmények közt itt-ott tekintetbe veendők is volnának. — Leibnitz tehát a maga alkotta tudomány alapját igen homályosan fogta föl. Követői Leibnitz eljárásának jogosultságát abban találták, hogy egyes problemákat Leibnitz szellemében megoldottak, (e módszer lévén legalkalmasb azok fölfödözésére) s azután a régi módszerekkel kisérlették meg a megoldást s fáradozásuk eredménye a nyert végkifejezések identitása volt. Midőn később e mély kérdés ujból szóba jött, azt nem megoldani, hanem kikerülni iparkodtak mint pl. Euler és d'Alembert, kik kimutatni törekedtek, hogy Leibnitz conceptiója megegyez a többi szokásban levőkkel, különösen Newton-éval, melynek pontossága ment volt minden ellenvetéstől. Ily átalános igazolás elégséges a Leibnitz-féle analysis jogos használatára vonatkozó kételyt eloszlatni: de e conceptio oly fontos, az alkalmazásnál annyival előnyösebb a többinél, hogy az infinit. számitás jellemének tökéletlensége volna, ha önmagában nem hordaná jogosultságát és azt logikailag másnemü vizsgálatra alapitanók, melyet ezután nem használhatnánk előnynyel. Lagrange müvei voltak különösen, melyek az infinitesimális számitás alapjának meggondolására terelték soknak figyelmét, és Carnot nyujtotta Leibnitz módszerének helyes logikai magyarázatát, midőn azt a hibák szükségszerü compensatiójának elvén alapulónak mondta. Ez szigoru és világos kifejezése Leibnitz zavart és határozatlan szavainak, melyekkel tana rationalis alapját magyarázni igyekezett. Carnot e gondolatát nem méltatták mindeddig érdeme szerint, noha az infinitesmális számitás e logikai váza is csak ideiglenes, amennyiben lényegében véve hibás. Álljon itt mindazonáltal Carnot átalános bizonyitása, mint olyan, mely Leibnitz analysisének jogosultságát kimutatja.*

Midőn egy tünemény differentiál-egyenletét fölállitjuk, a különböző tekintetbe vett mennyiségek helyébe más egyszerűbb azoktól végtelen keveset különbözőket helyettesithetni, s e substitutió Leibnitz módszerének fő-momentuma, mely nélkül az semmi könnyebbitést sem nyujtana a diff. egyenletek képzésére. Carnot az eljárás által az egyenletbe hibát vél behozni s ezért az ily egyenletet tökéletlennek mondja, de e hiba csak végtelen kicsiny lehet. Azonban az analytikai eljárások, úgy a differenti-

* Carnot »Reflexions sur la métaphysique du calcul infinitesimal“.

álás mint az integrálás, melyeket e differentiál-egyenleteknél alkalmaznak, hogy a végtelen kicsinyek kiküszöbölésével véges mennyiségek közti egyenletekhez jussanak, analog de ellenkező hibákat okoznak s ilyforma módon a hibák teljes kiegyenlitődése állhat elő, a végegyenletek tehát Carnot kifejezése szerint „tökéletesek“ lehetnek. — Carnot e szükségképpeni hiba-kiegyenlitődés szükségszerű és változatlan jelének a különböző rendü végtelen kicsiny mennyiségek teljes kiküszőbölését tekinti, s ez czélja egyúttal a transcendens analysisnek. Ha u. i. az okoskodás átalános törvényei ellen csak az infinitesimális módszer követelte módon vétünk, az igy okozott végtelen kis hibák minden egyenletben csak végtelen kis hibákat okoznak, s igy a relátiók szigoru pontosságuak, ha véges menynyiségek közt fenállókká lesznek, mert hisz ily körülmények között csak véges hibák létezhetnének, pedig ily nemü hiba nem csúszhatott be. Ez elmélet elég szellemes ugyan, de nem elég alapos. Logikai szempontból tekintve gyönge oldalát maga az infinitesimális módszer teszi, melynek úgy látszik természetes fejleménye és átalános magyarázata.

Newton a transcendens analysist többféle szempontból fogta fel. Jelenleg leginkább az van elterjedve, melyet az első és végső viszony vagy a limesek módszerével jelölt meg.

E szempontból tekintve a transc. analysis átalános szelleme abban áll, hogy a kezdetleges mennyiségek helyébe vagy azokkal együtt a mennyiségek összetartozó növekedéseinek végső viszonyát vezetjük be, vagy más szóval a növekedések viszonyának limesét (határát), melynek meghatározott és véges értéke lehet. Egy különös számolás van azután hivatva e határértékből a kezdetleges mennyiségek közt fenálló egyenletekre való áttérést eszközölni. Hogy az analysis a tünemények mathematikai törvényeinek könnyebb kifejezésére alkalmas, annak oka az, hogy e számolás nem a mennyiségek összetartozó növekedésére, hanem a növekedések arányának limesére vonatkozik, s igy az egyes növekedések helyébe sokkal egyszerűbbet tehetünk, föltéve hogy a helyettesitő és a helyettesitett viszonyának határértéke az egység. E principiumból kiindulva a Leibnitz-féle analysis könnyebbségét érezzük egyes kérdések tárgyalásánál, csakhogy más szempontból tekintjük azokat. Ha pl. egy görbe érintőjének irányát kellene meghatározni, ugy ezt azon határnak kell tekinteni, melyhez egy metsző közelg, mely az adott pont körül ugy forog, hogy a másik metszési pont az elsőhöz végtelenül közeledik. Ha $\triangle y$ és $\triangle x$ a két pont coordinatái, ugy a secansnak az abscissa tengelylyel képzett szögnek tangense: $t = \frac{\triangle y}{\triangle x}$ és vévén a határesetet, a tangensre nézve lesz:

$t = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Hasonlóan van, ha egy görbe kiegyenesitése (rectificatio) volna a föladat, úgy a görbe *s* ivének növekedése helyébe ezen növekedéshez tartozó húrt substituáljuk, mely kettő növekedésének határértéke az egység; s Leibnitz eljárásával megegyezőn találjuk:

$$\left(\lim \frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 \text{ vagy:}$$

$$\left(\lim \frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\lim \frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2$$

Hasonló könnyüséggel tárgyalhatók a limesek módszerével a már előbb az infinitesimális módszernél fölemlitett egyébb átalános feladatok is. Ez lényegében véve Newton, helyesebben Maclaurin és d'Alembert gondolata, melyet ők Newton eszméinek állandósitásánál mint az analysis leghelyesb alapját jellemeztek.

Mielőtt Lagrange conceptiójára áttérnénk, meg kell emlitnünk Newtonnak egy másik az analysisre vonatkozó módszerét, melyet egyrészt egyes esetekben világossága, másrészt a transcendens analysis vég-czéljának megértetése tüntet ki. Ez a fluxiok és fluensek tana, mely a sebesség átalános ismeretén alapul.

E tan alapgondolatának megértésére tegyük fel, hogy egy adott görbe mentében egy pont bizonyos föltételeknek alávetett, átalában véve változó mozgást végez. Az abscissa, az ordinata, az iv, a terület a mozgás közben egyszerre létrejötteknek tekinthetők; s f l u x i ó n a k nevezzük a sebességet, melylyel e mennyiségek közül az egyik leiratik, a f l u e n s pedig maga a leirt mennyiség. E szerint az indirect functiók tana abban áll, hogy közvetetlenül fölállitsuk a tekintetbe vett mennyiségek fluxióinak egyenletét s ezekből különös eljárással a fluensek közötti egyenletekre térjünk át. Ami itt a görbékre nézve mondatott, bármily nagyságokra vonatkozhatik, ha ezek egyikét a másiktól függő coordinátának tekintjük. E felfogás teljesen identikus a limesek módszerével, csakhogy ez utóbbiba a mozgás idegenszerű fogalma is be van vonva. Mert föltéve, hogy az abscissa növekedése arányos e növekedésre szükséges idővel, ugy eltekintve az idő intermediär gondolatától az ordinátának, az ivnek, a felületnek fluxiója e különböző mennyiségeknek az abscissához való végső viszonya. E módszer tulajdonkép nem egyéb, mint az első és végső viszonyok (premières et dernières raisons) módszerének mechanikai uton való tárgyalása.

Lagrange módszere csodálatosan egyszerü s abban áll, hogy a transcendens analysist algebrai számolási módnak tekinti, mely szerint az egyenletek fölállitásának könnyitésére bevezetjük az eredeti egyenletek helyébe vagy velük együtt deriváltjukat, derivált alatt értvén Lagrange definitiója szerint a függvényben előjövő változó növetének emelkedő hatványa szerint rendezett függvény-növet első tagjának együtthatóját. E definitiót következő kifejezésből egy pillantásra megérthetjük:

$$f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \frac{h^3}{3!} f'''(x) + \ldots .$$

Az indirect functiók tanának czélja e segitségül vett deriváltakat kiküszöbölni s a kezdetleges mennyiségek közt fennálló megfelelő egyenletet megalapitani.

A transcendens analysis ilyen formán csak jelentékeny kiterjesztése a közönséges analysisnek. A mathematikusok régi eljárása az, hogy az egyenlet egyszerüsitésére és könnyebb fölállitása czéljából a vizsgálandó mennyiségek helyébe azok valamely hatványát, logarithmusát, sinusat stb. hozták be. Az egymásutáni derivatió ugyanily természetü átalános érvényü müvelet.

De bár a priori belátható, hogy a deriváltak eszméje az egyenletek fölállitását könnyitheti, nem könnyü azt kimagyarázni, miért kell a derivatiónak éppen az elfogadott módon s nem egy egészen másminő transformatió szerint történnie. Nem is érthető meg átalánosságban abstract uton a transcendens analysis más conceptióinak tekintetbe vétele nélkül, miért nyujt az ily értelemben fölfogott analysis a tünemények mathematikai törvényeinek kutatásánál könnyebbséget. E meggondolás alkalmazásának bemutatására az érintő problemáját tárgyaljuk. A tangens e conceptio szerint nem — mint Leibnitz mondta — a görbe egy elemi ivecskéjének meghoszszabbitása, nem is a metszők határa — mint azt Newton felfogta. — Lagrange az érintőt, a régiek definitiója szerint, oly egyenesnek mondja, melynek érintési pontján át közte és a görbe között más egyenes nem mehet. Ezért az érintő irányának meghatározására keresni kell az egyenes és a görbe két megfelelő pontjának távolát az ordinata irányában és az egyenes irányszögére vonatkozó állandót ugy kell választani, hogy e távolság lehetőleg kicsiny legyen. Ha x y pont az érintési pont, ugy a görbére nézve: $y = f(x)$ az egyenesre vonatkozólag: $y = a\,x + b$. Lesz tehát a görbének és egyenesnek $(x + h)$-hoz tartozó ordinátája:

$$y_1 = f(x+h) = f(x) + f^{I}(x) \frac{h}{1} + f^{II}(x) \frac{h^2}{2!} + \ldots$$

$$y_2 = a(x+h) + b = (ax+b) + a\,h = y + a\,h \quad \text{s így}$$

$$y_1 - y_2 = [f^{I}(x) - a]\,h + f^{II}(x) \frac{h^2}{2!} + \ldots\ldots$$

Az $(y_1 - y_2)$ távolság pedig akkor lesz legkisebb h-nak alkalmas választása esetén, ha az utolsó egyenlet jobb oldalának első tagja zérus, mi csak ugy lehet, ha $f^{I}(x) - a = 0$, vagyis

$$a = f^{I}(x)$$

oly eredmény ez, melyre az infinitesimalis vagy határértékek módszerével is jutottunk.

A mondottakból kiviláglik, hogy mind a három módszer u. a. logikai eljáráson alapul, mely a segédmennyiségek bizonyos rendszerének behozatalán fordul meg, melyek az eredetiek helyébe helyettesíttetnek, hogy a tünemények mennyiségtani törvényeinek analytikai kifejezése könnyebbé váljék. A segédmennyiségek ezután egy különös számolással elimináltatnak. Ez vitte Comte-ot arra, hogy a transcendens analysist az indirect functiók tanának mondta. Mind a három módszer sajátja, hogy a concretről az abstractra való átmenetelt könnyíti, akár Leibnitz szerint, differentiális egyenletek, akár Newton szerint határértékek egyenletei, akár Lagrange szerint a deriváltak közt fönálló egyenletek nevét viselik az egyenletek, melyekből egy különös, meghatározott módon az eredeti mennyiségek közötti kapcsolatot alapítjuk meg.

A három módszernél azonban nemcsak az eredmények egyeznek, hanem ezek elérésének módja is; mert mind a három módszernél behozott segédmennyiségek teljesen identicusak, csak a felfogás módjára nézve különböznek. Ezt könnyen kimutathatni. Vegyük kiinduló pontul Lagrange conceptióját, mely idegen elemtől leginkább ment. A derivált függvények definitiója mutatja, hogy ezek nem mások, mint Leibnitz differentiál-quotiensei, vagyis a függvény differentialjának a benne előforduló változó differentiáljához viszonya, mert az első differentiale meghatározása után az infinitesimalis módszer természete szerint a változó differentialejének első hatványát tartalmazó tagra kell csak szorítkozni. Ép ugy a derivált függvény nem szükségképpen határa-e a függvény és a benne előjövő változó növetének, ha az utóbbi végtelenül fogy, meggondolván, hogy az első derivált azt fejezi ki, mivé válik a függvény és a benne előjövő változó viszonya, ha ez utóbbinak növetét zérusnak gondoljuk. Amit Leibnitz $\frac{dy}{dx}$-el jelöl, azt Newton szerint $\lim\frac{\triangle y}{\triangle x}$-el, és Lagrange szerint $f^1(x)$-el irjuk, s mind a három u. azt jelenti más és más szempontból vizsgálva.

Ha a három módszer becsét akarjuk megalapitani, mindenikben előnyökre és hátrányokra bukkanunk, s ez utóbbiak okai annak, hogy a mathematikus ezek egyikéhez sem tarthatja magát kizárólag, véglegesen. Leibnitz gondolata az alkalmazásnál nagy előnnyel jár; mert gyorsabban, kevesebb szellemi megerőltetéssel vezet a segédmennyiségek közti egyenletek megálapitására. E módszernek köszönhetjük a magas tökélyt, melyet a geometria és mechanika elértek. Bármilyen is a mathematikusok véleménye az infinitesimalis módszerről, abstract szempontból tekintve azt, mégis hallgatagon megegyeznek annak alkalmazásában, valahányszor uj kérdést tárgyalnak, hogy ne nagyitsák a nehézséget tisztán mesterséges akadályokkal, melyeket nem kellő helyen alkalmazott akaratosság az által okoz, hogy nehezebb uton akar haladni. Maga Lagrange is, miután a transcendens analysist uj alapon fölépitette, világos jelét adta Leibnitz conceptiója iránti tiszteletének, midőn kizárólag ezt követte „Méchanique analytique“ művében.

Ha azonban önmagára logikai szempontból vizsgáljuk Leibnitz alkotását, be kell ismernünk Lagrangeval annak téves alakját. A végtelen kicsiny ismerete hibás fogalom, melyet elgondolni nem lehet, bár ittott képzelődésben ringassuk is magunkat. Comte e fogalmazásban a trans. analysist még mindig metaphysikai alaptételen nyugvónak látja, melytől az emberi szellem nem győz minden positiv ismeretet eléggé függetleníteni. E módszer korának és lángeszű megalkotójának jellegét hordja magán.

Newton alkotása ment a Leibnitzé ellen emelt ellenvetésektől. A határok ismerete igazsága és csinossága által válik figyelemre méltóvá. Az ily módon megalakult transcendens analysis egyenletei kezdettől fogva helyeseknek tekintendők, s a bizonyitás átalános szabályai ép oly következetesen tekintetbe vétetnek itt, mint a közönséges analysisben. De hiánya, hogy távolról sem oly hatalmas eszköz a problemák megoldására, mint az előbbi, mert a segédegyenletek fölállitását igen hátráltatja az által, hogy azt követeli, hogy ne a mennyiségek növeteit külön önmagunkban, sem ezek viszonyát, hanem e viszonyok határértékét vegyük figyelembe. Newton módszerre azonban az átalánosságnak azon terjedelmével sem rendelkezik, melylyel Leibnitz conceptiója bir. Igy pl. Newton theoriáját a több változóju függvényekre csak nehézkesen lehet kiterjeszteni.

Többen Newton módszerét fogadták el és azzal födték el annak tökéletlenségét, hogy következetlenül a Leibnitz conceptióját jellemző megjelölést használták. Mit lim $\frac{\Delta y}{\Delta x}$-el kellene jelölni, azt $\frac{dy}{dx}$-el irják s ez irásmódot kiterjesztik minden egyéb analytikai ismeretre is, ez által a két módszer előnyeit kétség kivül egyesiteni gondolván; ez által azonban csak zavar támad és a két módszer lényegének megértése van meggátolva. De furcsa is a gondolat, hogy valamiféle megjelölés az alapjában véve oly különböző két elméletet egyesíthetné!

Végre a limes behozatala, bár kisebb mértékben, elválasztja a közönséges analysist a transcendenstől s ez is egy tökéletlensége Newton alkotásának.

Az analysis egysége, alap ismereteinek tiszta abstract jelleme teljes mértékben föllelhető Lagrange conceptiójában, és másutt nincs meg; éppen ezért philosophiailag a legtökéletesb. Lagrange mellőz minden másfajta gondolatmenetet s a transcendens analysist valódi alapjára vezette vissza, ugytekintvén azt, mint az analytikai transformatiók egy igen átalános faját, melynek segitségével a különböző feladatok föltételeinek kifejezése különös módon egyszerüsül. E szellemben felfogva, a trans. analysis a közönséges analysis kiterjesztése. Ez óta az analysisnek annyira össze nem tartozó részei egy egységes rendszerré alakultak. — Alkalmazásnál azonban e módszer még a Newtonénál is nehézkesebb, s igy kizárólag nem fogadható el. Lagrange a maga megalkotta módszerrel csak nehezen tudta az infinitesimalis módszer eredményeit bebizonyitni; innen következtethetni, mely akadályokkal járna új és nehezebb feladatok tárgyalása Lagrange módszere segitségével.

Czélunk ezek után a transcendens analysis tárgyának áttekintése; s a mint a czélnak megfelelő lesz, az ismertetett módszerek közül majd az egyiket, majd a másikat használjuk.

Az indirect functiók átalános képe.

A mondottakból következik, hogy az indirect functiók tana két részből áll. Kereshetni u. i. a segédmennyiségek közti relátiót ha adott a primitiv mennyiségek közt fönálló egyenlet, vagy megforditva a direct egyenleteket keressük a közvetetlenül megálapitott indirect egyenletekből. E két müveletet Leibnitz differentialis és integralis számolásnak nevezte; Newton a fluxiok és fluensek tanának mondta; Lagrange után pedig a derivált és primitiv functiók tanának nevezik.

A differentialis számolás alapja a másik résznek; mert csak a differentiális kifejezések integrálhatók közvetetlenül, mely differentiális kifejezésekhez az alapfüggvények differentialása vezet, melyek a transcendens analysis alapját képezik. Az integralás lényegében véve minden esetnek az alapintegrálokra való visszavezetésében áll.

Ha azonban a transcendens analysist egészben véve tekíntjük oly értelemben, mint azt már előadtuk, nem látható be a differentialis számolás haszna, eltekintve ama kapcsolattól, melyben az a látszólag kizárólag nélkülözhetetlen integrál-számitással áll. De megváltozik e nézetünk, ha meggondoljuk, hogy a differentiális számitás okvetetlenül szükséges a függő változók differentiáleinek a független változó differentialejével való kifejezésnél, és ez által a differentialis egyenlet képzésénél fölhasznált intermediär függvények és differentialeik eliminátiójánál. Pl. a görbe vonal ivhosszának differential-egyenlete:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

Itt x a független változó, s benne kell a keresett s függvényt kifejezni. De egyidejüleg y és z intermediär függvények differentialjai is szerepelnek. Ez esetben a differential egyenlet integratióra nem alkalmas. Az intermediär függvények differentiáljait először ugy kell eliminálni, hogy csak a keresett s függvény és a független változó x differentialeja forduljon elő — mi $y = \varphi(x)$ és $z = \psi(x)$ egyenletek segitségével meg is történhetik — s ekkor a kérdés egyszerü integratióra van visszavezetve.

Sok kérdés van ezen kivül, hol a keresett mennyiségek éppen differentiálás által nyerhetők, igy van ez pl. a tangensek problemájánál, a sebességek kérdésénél, a maximális minimális feladványoknál stb. Itt tehát az integrátió szóba sem jő.

De vannak oly kérdések is, melyek természetükre nézve az előbbieknek éppen elentétét képezik. Ezeknél a differentiális egyenletek közvetetlenül alkalmasak az integratióra, mert kezdetleges megalakulásuktól fogva csak a keresett függvények és az egymástól független változóknak differentiale-it tartalmazzák a nélkül, hogy intermediär függvények differentiáléit kellett volna bevezetni. Vagy ha esetleg ily intermediär függvények alkalmaztattak volna is, ugy azok differentiálás alkamazása nélkül directe eliminálhatók a közönséges algebrával oly formán, hogy a kérdés megfejtése csak integrátiótól függ. Igy a quadraturát kifejező egyenlet $dA = ydx$ közvetetlenül alkalmas lesz integrálásra, ha az intermediär y függvényt kiküszöböljük a kérdésben levő görbe egyenletének megfelelőleg.

Egészben véve tehát három részre oszlanak a transcedens analysisre vonatkozó kérdések: 1) olyanok, melyek kizárólag differentialis számitással megoldhatók, 2) melyek csak az integrál-számitást kivánják, 3) melyek mindakét számitási-módot megkövetelik.

Vizsgáljuk már most a három rész alkotását, megkezdvén azt a differentialis számoláson.

A transcendens analysis tárgyalásánál rendesen összezavarják a tisztán analytikai részt, mely a differentiatio és integratio elvont tárgyalását foglalja magában, e tanoknak főbb alkalmazásával. A fogalmak ezen zavara, mely a tudomány történeti fejlődésének következménye, nem egyszer meggátolja az analysis és geometria lényegének kellő szempontból való felfogását. E helyen csak a tulajdonképeni indirect functiókra terjeszkedünk ki, a geometriai és mechanikai nagyszabásu alkalmazás vizsgálata a concret mathesis philosophiai tanulmányozásához tartozik.

A differentiálásnál két eset különböztethető meg, a szerint, amint explicit vagy implicit függvényeket differentiálunk. E két esetnek megfelelőleg megkülönböztetjük a képletek és egyenletek differentiátióját (differentiation des formules et des équations). E megkülönböztetés szükségtelen volna, ha minden egyenletet megtudnánk oldani algebrailag, mert ekkor minden implicit függvényt explicitté lehetne tenni. Mivel az egyenletek megoldása gyermekkorát éli, sőt mi Comte ellenében kimondhatjuk, hogy bizonyos tekintetben tovább nem is fejlődhetik, egészen máskép alakul a dolog, mert itt egy bár meghatározott, de ismeretlen alaku függvény differentiálásáról van szó. Az implicit függvények differentiálása természetszerüen más, és szükségszerüleg bonyodalmasabb, mint az explicit függvényeké. Ilyen formán a képletek differentiáján kell kezdeni és ezután ezen esetre kell átalánosan visszavezetni az egyenletekét.

E két fő esete a differentiálásnak még más szükségszerü szempontban is különbözik. Az implicit függvények differentiálói közt fönnáló kapcsolat vonatkoztatva azt a véges mennyiségekre, okvetetlenül indirectebb, mint az explicit függvényeknél. Hisz ismeretes Lagrange vizsgálata szerint, hogy ugyanazon egyenletnek derivált egyenlete igen különböző alaku lehet, bár alapjukban equivelensek, amint más-más állandó szerint oldjuk meg; ennek az explicit képletek differentiátiójánál helye nincs. Tudjuk azt is, hogy u. a. derivált egyenletnek az eredeti (primitive) egyenletek nagy száma felel meg és sokkal nagyobb változatosságot nyujt, mint az ugyanazon explicit differentialével biró egyenletek, melyek csak egy állandóban különböznek.

E két rész mindenike ujból két elméletre oszlik, a mint egy vagy több független változós függvényről van szó. A másik rész nyilván öszszetettebb az elsőnél ugy az explicit függvényeknél, mint még inkább az implicit-eknél. Különben egyiket a másikból vezethetni le egy igen egyszerü alapelv segitségével, mely abban áll, hogy a totalis differentiálét ugy tekintjük, mint az egyes független változókra vonatkozó partialis differentiálék összegét, partialis differentiale alatt értve a függő változó azon végtelen kis növetét, mely a független változók egyikének differentialejéhez tartozik, miközben a többi független változó állandónak tekintetik. Meg kell még azt a különbséget is figyelni, mit az egy és több független változó létesit. — Az egyváltozóju függvényeknél csak egy derivált lehet, mig a több változójuaknál a derivált minden független változóra nézve más-más, sőt számuk a derivátió rendjével is mindinkább növekszik. Innen következik, hogy a differentialék közti relatiok, melyek több független változóhoz tartoznak, sokkal indirectebbek és határozatlanabbak az egy független változót tartalmazóknál. Ez különösen az implicit egyenletekre nézve áll, hol tetszőleges állandók helyett a differentiálásnál a változók függvényei esnek el; innen is már következtethetni az ily differentialek integratiójánál föllépő nehézségekre.

A differentialis számolás képének kiegészitésére még azt az esetet, midőn több függő változót tartalmazó egyenletet kell differentiálni, meg kell különböztetni attól, midőn mindezek a függő változók külön, egy-egy egyenletben fordulnak elő. Világos, hogy a functiók első esetben még implicitebbek, mint a másodikban; ez esetben u. i. nemcsak megoldani nem lehet a primitiv egyenleteket, hanem az eliminátiót sem végezhetni. A differentiálás is tehát ez esetben bonyodalmasabbá válik. Ez természetes kapcsolata és rationalis felosztása a differentiatió főbb tanainak. De mert az implicit függvények differentiatiója állandó alapelv szerint az explicit függvények differentiatiójából vezethető le, s a több változós függvények differentiatiója meghatározott tétel szerint szintén az egy változósokéval egyezik: ugy végelemzésben a differentialás tana az egy változós explicit függvény differentiálására van visszavezetve. Ennek azonban a tiz alapfüggvény differentiálása képezi kiinduló pontját, mert az összetett függvények differentiátiója közvetetlenül az őket alkotó egyszerü függvények differentiatiója által el van érve. A tiz alapfüggvény differentialeját és még az emlitett alapelveket kell tehát ismerni s ezekre vezetendő vissza a differentiatió minden kérdése. Logikai szempontból határozottan ez a legérdekesebb kép, melyet a mathematikai analysis értelmünknek nyujthat.

E kép azonban igen hézagos volna, ha záradékul nem említenénk meg még egy igen nevezetes elméletet, mely a deriváltak transformátiójában áll, minek következménye, hogy a megalapított differentiális egyenletekbe más változókat vezetünk be, mint a milyenek azokban eredetileg voltak. E transformátió teljes átalánosságban meg van oldva és egyszerűbb, mint a differentialis számitás bármely más része. Ily transformatio által oly változókat hozhatunk az egyenletekbe, melyek a czél elérésére legalkalmasabbak. Igy a legtöbb geometriai kérdés legkönnyebben oldható meg orthogonális coordinátákkal, s ép ezért közvetitőül ezeket használhatjuk, de az átalános elmélet szerint akármikor bármily végleges rendszerre áttérhetni.

A különböző rendü differentiálék képzése uj problemát nem nyujt, mert minden analytikai functiónak akármely differentiáléja a differentiátió többszörös ismétlésével nyerhető meg, fontos azonban e megkülönböztetés az integrál-számolásban ennek nagy tökéletlensége miatt.

Álljon itt egyuttal a differentiale-nek tisztán analytikai kérdésekre vonatkozó alkalmazása. E kérdések három részre oszlanak: 1. az egy és több változós függvényeknek sorba fejtése, vagy átalánosabban a függvények átalakitása, ez a differentiálásnak az átalános analysisre vonatkozó legszebb és legfontosabb alkalmazása s magában foglalja Taylor, Maclaurin, Bernoulli, Lagrange stb. sorait, 2. az egy vagy több változós függvények maximuma-minimuma a differentialis számolás természetében fekszik s kétségen kivül a legérdekesb föladat, mit az analysis nyujthat, 3. a függvények értékének meghatározása a változó oly értékére, melyre nézve a függvények határozatlanok, ez a rész legszükebb körü és legkevésbé fontos a három közül. Az átalánosság, melyet meg kell óvnunk, hátráltat e tárgyakba mélyebben beleereszkednünk, s igy az integrális számolás beosztására térünk át.

Az integrál-számolás beosztása is ugyanazon módon történik, mint a differentiálszámolásé, t. i. megkülönböztetik az explicit és implicit differentiálok intregrátióját, ez utóbbiakat differential-egyenleteknek is mondják. E két résznek megkülönböztetése az integrál-számolásnál még sokkal fontosabb, mint a differentiational. A differential-számolásnál e megkülönböztetés csak közönséges analysis nagy tökéletlenségéből ered. De világos, ha minden egyenlet algebrailag meg volna is oldva, ugy a differential-egyenletek mégis egy egészen más integrationalis esetet képeznének, mint a milyen explicit differential integrálása. Mert ha y függvénye x-nek, s ha föltesszük, hogy egy $\frac{dy}{dx}$-re nézve magasb foku elsőrendü rendü differential-egyenletet algebrailag meg is oldunk, ugy a derivált függvény ki lesz fejezve x-ben és y-ban, mely utóbbinak alakja x-ben volna meghatározandó, s igy az integrátió kérdése semmiben sem változott, s a megoldás tényleg előbbre csak annyiban vitetett, hogy a derivált első hatványon van, ez azonban kis fontosságu dolog, mert az algebrai megoldás az implicit differentiál-egyenleteket csak igen kivételes esetekben változtatja explicitekké, mi akkor történik, midőn a differential-egyenletben $\frac{dy}{dx}$ együtthatói az x függvényei, ekkor a kérdés quadraturára van visszavezetve. Ez eset megfelel az egyváltozós explicit függvények differentiálásának.

E meggondolás még nagyobb fontosságu a magasb rendü vagy több független változót és ezek függvényeit tartalmazó differential-egyenletekre nézve. Az implicit differential-egyenletek tehát függetlenül az algebra fejlettségi állapotától, egészen más esetet alkotnak, mint a független változókban explicite kifejezett differential-egyenletek. Az implicit differential-egyenletek integratiója complicaltabb, mint az expliciteké; ez utóbbiak megoldása szülte az integrál-számitást, s ezekre törekszenek az elsőket visszavezetni. A változók elválasztása s a multiplicator elve sem egyéb, mint differentiális képletekre visszavezetése a kérdésnek.

Az integrálszámolás mindkét része megint ketté szakad épugy, mint a differentiál számolásnál, amint egy vagy több független változó van a differentiál egyenletben. E beosztás is fontosabb az integratiónál, mint a differentiálásnál. Itt u. i. az az eset jöhet nem egyszer elő, hogy a keresett függvény meg van határozva egy differentiális egyenlet által, mely e függvénynek különböző független változók szerinti partiális deriváltjai közt áll fön. Ez azon rész, mely a partiális differential-egyenletek tanának nevét viseli, megalkotta d'Alembert, s Lagrange méltatása szerint ebben a mathematikusoknak egy uj számolást kellett volna látniok, melynek philosophiai jelleme nincs eléggé pontosan megitélve. Ezen eset és az egy független változós egyenlet közti lényeges különbség abban áll, hogy a tetszőleges változókat tetszőleges függvények helyettesithetik, s ez által a megfelelő integrálok tetszőleges átalánosságot nyernek. E rész azonban még csak gyermekkorát éli, mert már a legegyszerűbb esetben, midőn a két független változót tartalmazó függvény partiális deriváltijai első rendüek, nem tudják teljesen visszavezetni az integratiót közönséges differential-egyenletekére. A több változót tartalmazó függvények integratiójával sokkal jobban állunk, ha teljes differentialéval van dolgunk, de ez eset végtelenül egyszerűbb is a most tárgyaltnál.

Egy új megkülönböztetés, melynek ugy az implicit mint az explicit függvények alávetvék, a differentiálás rendjéből folyik; ez a differentiális számolásban semmi új kérdéshez nem vezet. Ami az explicit differentiális egyenleteket illeti, úgy itt a rendnek megkülönböztetését az integrál számitás nagy tökétetlensége teszi szükségessé. Ha u. i. minden differentiális képletet tudnánk integrálni, úgy a magasbrendü deriváltak egymásutáni integratióval a primitiv functióhoz jutnánk. Mivel az integratióra vonatkozó ismereteink igen kicsik, ez az oka, hogy a magasbrendű differentiálékből a primitiv függvény megnyerésénél uj meg uj nehézségek halmozódnak össze. Mert lehet, hogy egyszer vagy többször is el tudjuk végezni az integratiót, de végre oly differentialékhez jutunk, hogy a számolást tovább nem folytathatjuk.

Még fontosabb a rendszám megkülönböztetése az implicit differentiáleknél, mert eltekintve a most említett októl, mely itt is érvényes marad, a differentialis egyenlet magasb rendje szükségkép uj természetü kérdéshez vezet. Valóban, ha minden első rendű differential — egyenlet egygyel alacsonyabb rendűre visszavezethető. Mert ha y az x függvénye is van egy relatiónk y, x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ közt, nem lehet közvetetlenül levezetni egy első integratió végzése által az ezen relatiónak megfelelő kapcsolatot y, x és $\frac{dy}{dx}$ közt levezetni, mely kapcsolatból uj integratióval a primitiv egyenletet nyernők. Ez első integralás u. i. csak akkor volna lehetséges, olyan forma mód szerint, mint az első rendű differentialis egyenleté, ha a másodfoku differentialis egyenlet y-t nem tartalmazná. Átalában, a differential — egyenletek annyival inkább inplicitek, minél magasb a rendszámuk, s mindeniknek alacsonyabb rendüre való visszavezetése speciális módszereket igényel, melyeknek kutatása a kérdések uj osztályát alkotja meg, melyekre nézve még egy független változó esetén is alig tudunk valamit. Kivételt csak a linearis akár hányadrendű, állandó cofficiensekkel biró diff. egyenletek képeznek, s ezek megoldása is oly algebrai egyenlet megoldásától függ, melynek foka a differentiatió rendjével egyenlő.

Ha mélyebb pillantást vetünk a diff. egyenletek különböző rendjére, azt találjuk, hogy egy végső megkülönböztetést tehetünk rájuk nézve. Az egy vagy több változós diff. egyenletek u. i. vagy csak egy, vagy pedig (s ez az implicitebb és bonyolódottabb eset) több függvényt tartalmaznak, amely eset a differential-számitásnál implicit simultán függvények differentiátiójának felelne meg. Itt több függvényt kell egyidejüleg meghatározni a differentiál-egyenletek rendszeréből, melyben e függvények deriváltjaikkal vegyitve fordulnak elő. A kérdés ily alakban uj nehézséggel jár, mert a keresett függvényeket ugy el kell különiteni uj differentiális egyenletek képzése által, hogy az igy nyert diff. egyenletben csak egy függvény és ennek deriváltjai jöjjenek elő. Ez előleges munkálatot, mely az algebra eliminátió-feladatával analog, specialis esetek kivételével el kell végezni, hogy a függvényeket közvetetlenül meghatározhassuk. De könnyü ezen megkülönböztetésnek a differentialis egyenletek rendjére vonatkozóval való identitását kimutatni. Ismeretes, hogy a függvények elkülönitése a simultán differentiál-egyenleteknél az egyes függvényekre külön vonatkozó oly diff. egyenletek alakitásában áll, melyeknek rendje az adott egyenletekének összegével egyenlő. E transformatio mindig elvégezhető. Másrészt bármily rendű e g y függvénynyel biró differentiálegyenletet első rendűre vezethetünk vissza, ha megfelelő számu segéd diff. egyenletet hozunk be az által, hogy melyek a különböző rendű deriváltakat uj függvényeknek tekintjük. A diff. egyenletek átalános elméletében szükségkép äquivalens e két fajta föltétel: a függvények bizonyos számának simultanitása és u. a. függvény bizony számu magasb differentiálja. A differentiálegyenletek számának növesztésével elkülönithetjük a függvényeket, és mesterségesen növesztvén a függvények számát minden diff. egyenletet első rendűvé változtathatunk. Következőleg mindkét esetben u. a. a nehézség, csak más szempontból tekintve.

Minden integratiónak alapja az explicit differentialis képletek integratiója, s ezt is csak akkor végezhetni el, ha elemi képletekre vihetni vissza, melyek integrátiója directe történhetik. Ez integrátiót quadraturának nevezik, mert minden ily alaku $\int f(x)dx$ integrál egy görbének: $y=f(x)$ területét képviselheti. E kérdés a differentialis calculusban az egy változós explicit függvények differentiájának felel meg. De az integrál számolásban természeténél fogva sokkal bonyolódottabb és sokkal terjedtebb e kérdés, mert a differentiálszámolás a feladatot megoldja az alapfüggvények differentiatiójának ismeretével; ellenben az összetett függvények integratiója nem vezethető le az egyszerüekéből, s igy más-más összetett függvény integratiója más-más nehézségekkel is jár.

Átalában két főrészre oszlik az integratió, a szerint amint a derivált algebrai vagy transcendens. Ez utóbbi osztály analytikai integratiója keveset haladt akár az exponentialis, akár a logarithmikus, akár a circularis függvényeket tekintsük. Philosophiai szempontból azt említjük meg, hogy a quadratura különböző eljárását semmiféle egység sem jellemzi, nagyszámu össze nem függő kis hatáskörü fogásból (artifice) áll. Átalánosságánál fogva megérdemli, hogy megemlitessék a Bernoulli Jánostól származó „integratio per partes," mely azonban koránt sem átalános módszer. Ezzel minden integrált más alakuvá változtathatni, mely utóbbi néha könnyebben meghatározható. — E szellemes kapcsolat volt az inditó ok az ismeretlen integráloknak oly egymásba való transformatiójára, melyet különösen Fourier a hő elméleténél oly sikerrel használt.

Az algebrai egyenletek integratiója már előbbre haladt, bár az irrationális függvények integratiójáról most is csaknem semmit sem tudunk. A rationális függvények integrátiója teljes terjedelmében tárgyalható, s igy philosophiai szempontból legkielégitőbb, de egyúttal a leglényegtelenebb. Sőt még e kérdés is csak abstracte van megoldva, mert concret esetben az integratiót legtöbbször gátolja a közönséges algebrára vonatkozó tökéletlen ismeretünk, mert ez integratió az egyenletek algebrai megoldásától teszi függ.

A quadraturánál használatos eljárások átalános megértésére elég, ha megjegyezzük, hogy a tiz alapfüggvény differentialján alapul, mely differentialok invers szempontból tekintve az integratiónak ugyanannyi főtételét alapitják meg. Az integratió abban áll, hogy minden quadraturát ez elemi quatraturák valamelyikére kell visszavezetni, ez eljárás — sajnos — legtöbbször nem ismeretes.

Az integralis számitás fő részeinek logikai kapcsolat szerinti előszámlálásánál nem emlitettük az Euler és Laplace által vizsgált singularis (hibásan: particularis) integrálokat Külön szólunk e részről, mert bár a differentiális egyenletek integrátiónak átalános elméletébe tartoznak, mégis némi tekintetben azon kivül állnak és mert alkalmazásuk szépsége által és elméletük tökéletességével kitünnek. — Clairaut találta föl azokat s az integratio — számitás paradoxonját látta bennök, mert bár megfelelnek ezek az egyenletek a differentiál egyenleteknek, még sem foglaltatnak a differentiál — egyenlet megoldásának átalános alakjában. Lagrange adta ezek egyszerü és átalános elméletét, megmagyarázva szellemesen és kielégitően e paradoxont, midőn kimutatta, hogy a singuláris megoldás az átalános integrálból ered egy tetszőleges változójának változtatása által. Ő foglalkozott behatóan ez integraloknak alkalmazásával, megmutatta egyúttal mily egyszerü módon lehet bármely differentiális egyenlet singuláris megoldását nyerni, föltéve, hogy ily megoldás van. Ez eljárás differentiatiót kiván csak, s igy a differentiatió ez esetben hivatva van az integratió tökéletlenségét pótolni.

Hátra vannak még a határozott integrálok, melyeket az integrál számolásnál azért nem emlitettünk fel, mert tényleg nem kell velök integratiót végezni, sőt éppen pótolni hivatvák az analytikai integralokat, melyek különben is legtöbbnyire ismeretlenek. Az integrálnak sorba fejtése ily sorban uralkodó törvényszerüség fölfedezésének nehézsége miatt nem fontos algebrai szempontból, de annál fontosabb arithmetikailag, mert ez azaz eszköz melylyel legtöbbször meghatározzuk a határozott integrálokat, vagyis ismeretlen függvényeknek értékét az ezen függvényekben előjövő független változónak speciális értékére.

E kutatásnak az algebrában az egyenletek numerikus megoldása felel meg. Ha nem tudjuk az általános vagy határozotlan integrált megnyerni, mely differentiálva az integrandust adná, feladatunk oda irányulhat, hogy az integrale ismerete nélkül mégis megalapitsuk ez integrálnak értékét, ha benne a változó valamely különös értéket vesz fel. Ez nyilván egy számtani kérdésnek megoldása, mielőtt a megfelelő algebrai feladatot megfejtettük volna, pedig ez utóbbi volna az általánosabb. Ily analysis már természeténél fogva tökéletlen, mint azt láttuk az egyenletek számbeli megoldásánál.

És valóban olyforma zavar is van a határozott integrálok tanában mint az egyenletek számbeli megoldásánál, lépten nyomon változik az algebrai és arithmetikai szempont; ebből aztán, akár a logika akár az alkalmazás szempontjából tekintsük a dolgot, nagy nehézségek erednek. Annyi azonban igaz, hogy az általános integralnak ritka esetben való ismerete mellett fontos ránk nézve a határozott integralok nyujtotta tökéletlen és elégtelen megoldás is. Valóban vannak is általános módszerek a határozott integralok érték meghatározására, melyek legfölebb a számitás egyszerüsitését igényelnék itt-ott, s ez egyszerüsitésre irányulnak a mennyiségtudósok specialis transformátiói. Ha e transcendens arithmetikát tökéletesnek tekintjük, az alkalmazásoknál a nehézség egy határozott integrálnak fölállitásában áll, ami nem mindig sikerül.

Meggondolásunkból következő eredményt vonhatjuk le: a differentiálásnak véges és tökéletes a rendszere, melyhez valami lényegest hozzá fűzni alig lehet; az integralás mezeje azonban kimerithetetlen, ha alkalmazásától el is tekintünk. Egy általános integrationális módszer fölfedezésére vonatkozólag Lagrange maga mondja, hogy azt még remélnünk sem lehet.

Nem is az indirect függvények elméletének képzelt tovább vitele lesz majd a czél, hanem ha ezen analysis legfontosb alkalmazását a tudósok kimerítik, uj forrást alkotnak majd a derivatió módjának megváltoztatásával, más segédfüggvényeket hozván alkalmazásba az egyenletek fölállításának könnyitésére, melyeknek megalkotása az igazságoknak uj és végtelen nagy számát ismertetheti meg. Ily természetü segédeszköz sokkal tágasabbá teheti ismereteinket, mint az indirect functiókra vonatkozó tan tovább vitele.

Az indirect functiók alkalmazásával ugy állunk, mint az algebráéval. Igaz, kicsik ismereteink. Különösen az integratióban, s ezek segitségével mégis a legfontosb geometriai, mechanikai, physikai kérdéseket megfejtették. Philosophiai magyarázata ennek az abstract ismeretek fontosságában és szükségszerü és tuluralkodó jelentőségében rejlik; ez ismeretek legkisebbike is a concret kutatások egész seregében érvényesül, mert az emberi szellem folytonos tágulásának egyedüli forrása az abstract de egyuttal positiv fogalmak vizsgálata.

A transcendens analysisnek még egy részét tárgyaljuk, mely által Lagrange még könnyebbé tette a legnehezebb problemákra vonatkozó egyenletek fölállitását ez a variatiok módszere.

A variatio-számolás.

A variatio-számitás philosophiai jellemének megértésére czélszerü öszszegezni azon problemákat, melyek ily hypertranscendens analysis megalkotását szükségessé tették. E számolás-mód még igen közel van keletkezéséhez, alkalmazásai nem nagyon változatosak, s ezek alapján róla kielégitő és világos fogalmat nem igen alkothatunk. A mathematikai kérdések, melyek a variatio-számitást szülték, átalában egyes ismeretlen integrálkifejezések maximuma- vagy minimumának keresésében állnak; ez integrálok a geometriai vagy mechanikai tünemény analytikai törvényét fejezik ki. A menyiségtudósok e fajta kérdéseket isoperimetrikus problemák nevével jelöltek, bár ezek a föladványok a variatió számitásnak igen kis részét teszik.

A maximum-minimum-keresés elméletében a czél, egy adott egy vagy több változós függvényben mily értékeket kell a független változók helyébe tenni, hogy a kérdéses függvény megfelelő értéke maximum legyen az ezen értékre nézve közvetlenül szomszédos értékekkel összehasonlitva; vagyis keressük, mikor szünik meg a függvény nőni a végből, hogy fogyni kezdjen, vagy megforditva. A differentialis számitás teljesen megfejti a kérdést; s az eredmény az, hogy a független változók érték-rendszere, mely a maximumnak vagy minimumnak megfelel, a függvénynek az egyes független változó szerinti derivaltját mindig zérussá teszi. E számolás arra nézve is ismertető jelet alapít meg, maximum vagy minimumról van-e szó. Egy független változó esetén például a másodrendü deriváltnak positiv értékéből arra következtetni, hogy a helyettesitett érték minimuma az eredeti függvénynek, míg a negativ érték a maximumot jelöli. Több változó esetén ugy a maximumok vagy minimumok meghatározása, mint annak megitélése is: maximumról vagy minimumról van-e szó, abstract és változatlan, bár mindinkább bonyolultabb törvényeknek van alávetve. Midőn ez elméletnek általános megalakulása elenyésztette az érdeklődést, melyet eleinte kelett a tudósokban, új magasb fontosabb gondolathoz emelkedtek, s ez az isoperimetricus probléma. Ez nem adott függvényeket maximummá vagy minimummá tevő független változók értékének meghatározásában, hanem a függvényalaknak a maximumot vagy minimumot jelölő határozott integral föltétele szerinti meghatározásában áll.

Ilynemü kérdések legrégebbike a legkisebb ellenállásu szilárd test feladata, melyet Newton principiumainak második kötetében tárgyalt, hol meghatározza azon forgási test meridian-görbéjének alakját, mely test egy folyadékban tengelye irányában bizonyos sebességgel haladván, lehető legkisebb ellenállásra találjon. Döntő hatással volt a mathesis e nemü vizsgálatára Bernoulli Jánosnak 1695. évi brahystochronra vonatkozó feladata, mely hasonló kérdések egész özönét hozta felszinre. Bernoulli feladata azon görbének meghatározásában áll, melyen haladva egy sulyos test leggyorsabban ér egy magasabb fekvésü pontból egy alacsonyabb fekvésübe. Eltekintve a surlódástól, a levegő ellenállásától és a gyorsulás esetleges vártozásától, e görbét könnyen megtalálhatni, mely egy megforditott cyclois lesz, melynek kezdőpontja a magasabb fekvésü pontban van.

Bár eleinte a mechanika nyujtotta az anyagot a variatió-számitáshoz, később a geometria vezetett igen fontos kutatásokhoz ez irányban. Igy a feladat lehet, két pont között huzódó meghatározott hosszuságu görbék közül azt meghatározni, melynek területe legnagyobb vagy legkisebb (innen ered az isoperimeterek problemájá-nak elnevezése is); vagy kereshetni, hogy az adott föltételnek megfelelő görbék melyikének forgatása által származik a legnagyobb felületü vagy köbtartalmu test stb. Bernoulliak, Taylor, Euler, ilyforma föladatot igen sokat megoldottak, és Lagrange-é az érdem, hogy a megoldást egy ávont és átalános érvényü módszerre vezette vissza. Nem történetét akartuk ezzel adni, hanem néhány egyszerü egyenlet fölemlitésével a variatio-számitás hivatását megjelölni, melylyel különösen feltalálásakor birt.

Analytikai szempontból e problemák mindenikében az a czél, hogy egy vagy több változós ismeretlen függvény alakját meghatározzuk ugy, hogy ezen függvénynyel kapcsolatban álló integrál maximummá vagy minimummá legyen, tekintettel mindazon értékekre, melyeket fölvehet az integrál, ha a függvény bármily más alaku volna.

E feladatokat Lagrange előtt a maximum-minimum theoriára akarták visszavezetni, de ezen transformatióra használt eszközök csak az egyes esetekre külön alkalmas mesterfogásokból álltak, melyeknek fölfedezése változatlan és biztos szabályokhoz nem vezetett s igy minden egyes uj kérdés megoldása uj nehézségekkel járt, s a feloldásokból csak annyiban volt haszna a szellemnek, amennyiben bizonyos irányu ügyességre tett szert.

Lagrange a különböző isoperimetrikus feladatokat egy egyöntetű eljárás által törekedett megoldani, s ekkor a differentialásnak uj módjára jutott, melyet megkülönböztetendő a *d* betüvel jelölttől, δ-val vezetett be. Ez uj differentiálokat ő v a r i a t i ó k-nak mondta. Ezek alatt az integral végtelen kis értékváltozását értjük, ez értékváltozást azonban nem a független változó változása (igy van ez a transcendens analysisben), hanem az integral jele alatt levő függvény alakjának végtelen kis változása okozza. Könnyen megérthető e megkülönböztetés a görbéknél, hol az ordinata, vagy bármely a görbével egyszerre változó mennyiség kétféle differentialásra alkalmas a szerint, a mint egy pontról u. a. görbének egy másik pontjához megyünk, vagy egy más végtelenül közel fekvő görbének megfelelő pontjára térünk át, mely utóbbi görbe az előbbi görbének meghatározott változtatása által származik.

Világos az is, hogy a különböző, kapcsolatos mennyiségekre vonatkozó variatiókkal természetüknél fogva ugyanolyformán kell számolni, mint a differentialékkel. A variatiók átalános ismerete után a velök való számolás alap-principiumai vezethetők le, melyek abban öszpontosulnak, hogy a variatio jele tetszés szerint a differentialás jele elé vagy mögéje tehető.

Az abstract meggondolás alapján Lagrange az isoperimetrikus feladatokat a rendes maximum-minimum elméletre vezette vissza.

Az isoperimetrikus feladatokat átalán két részre oszthatni, 1. a maximum és minimum a b s o l u t, vagyis a feladat természete által nincs semmi föltételnek alávetve, pl. a brachistochronnál, itt minden elképzelhető görbék közt kell választani; 2. a maximum és minimum relativ, ha az integrális meghatározott föltételek szerint változhatik csak, melyek rendesen egy más, a keresett függvényt tartalmazó, s állandóan u. a. értékkel biró, határozott integrálban vannak kifejezve. Ilyen föladatok a tulajdonképpeni isoperimetrikus problemák, hol a görbe ivhosszára vagy a görbe lap felületére vonatkozó integrálnak kell állandó értékkel birnia.

A variatio-számitás az elsőfajta feladatoknak közvetetlen megoldását adja, mert a maximum-minimum theoriából foly, hogy a keresett relatió esetén zérusnak kell lennie az integrál minden független változó szerinti variatiójának, a mi a maximum-minimum átalános föltétele, s a másodrendü variatiókból megitélhetni, maximum vagy minimum-e a meghatározott függvényre nézve az integrál. Az egyedüli nehézség e helyen a δ jelvény kiküszöbölésében áll, de erre nézve a variatio-számitás a részletes integrátión alapuló átalános és teljes módszerrel rendelkezik. Az analytikai előleges munka itt differentiális egyenletekre való jutásban áll, s innen a kérdés a közönséges transcendens analysis tárgyává lesz, s ez megoldja a feladatot, ha az integrátiót elvégezni lehet.

A tárgyalás e gyors meneténél sem szabad azon isoperimetrikus feladatokat mellőzni, melyek Lagrange által hozattak be, s melyeket ő határokkal biró egyenleteknek (équations aux limites) nevez, s melyek nélkül a legtöbb feladvány szükségkép tökéletlenül volna megoldva. Ha az adott integralok határai állandók, vartatiójuk zérus lévén, nem kell azokat számba venni. De nem ugy áll a dolog, ha a határok a helyett, hogy szigorúan állandók volnának, föltételeknek vannak alávetve, pl. ha a két pont, melyek között a keresett görbének kell húzva lennie, egy vonalon vagy egy felületen tartozik maradni. Ez esetben coordinatáik variatiójára is tekintettel kell lenni, s meg kell alapitani ezen görbék vagy fölületek egyenleteinek megfelelő relatiójukat.

Ezen meggondolás nem egyéb, mint végső kiegészitése a több változóra vonatkozó variatióknak. Ha a változók függetlenek egymástól, mint pl. két pont között huzható minden képzelhető görbe ivhosszának összehasonlításánál, ez esetben az egyes változók szerinti variatiók is függetlenek egymástól, s igy a maximum-minimumot kifejező átalános egyenletben minden egyes partiális variatiónak zérusnak kell lennie. Ha azonban a változókat bizonyos föltételeknek vetjük alá, tekintettel kell lenni a variátiókra ez által háramló befolyásra oly értelemben, hogy ez esetben az átalános egyenlet annyi egyenletre oszlik, a hány független változó van a feladatban. Ily eset fordul elé, midőn két pont között egy adott felületen huzódó legrövidebb vonalat keressük.

A problemák, hol ily módosító föltételek vannak, hasonlítnak a variatio-számítás alkalmazásának második nagy osztályához, mely a mondottak szerint relativ maximum-minimum-keresésben áll. Van azonban lényeges különbség közöttük, mert az első esetben a föltét-egyenlet egy integrállal van kifejezve, mig a második esetben a föltételt egy közvetetlenül adott véges egyenlet nyujtja. — Innen is látható, hogy a relativ maximum-minimum megkeresése sokkal nehezebb, mint az absoluté. Egy átalános tétellel azonban, melyet Euler lángesze talált fel, e feladványok mindkét nemének tárgyalását egyformává tehetni, mert e kérdések egyik nemét másik nemüvé változtatja. E tétel abban áll, hogy ha a maximum-minimum értéket fölvenni tartozó integrálhoz hozzáfüzzük az állandó értékkel biró integrált megszorozva egy határozatlan együtthatóval, ugy e teljes kifejezésre Lagrangenak az absolut maximum-minimumra vonatkozó átalános eljárását alkalmazhatjuk. Hisz az összeg variatiójának zérusnak kell lennie, mert az egyik összeadandó állandó értékü, a másik pedig a maximum-minimum föltétele szerint tartozik elenyészni. E két külön föltételnek teljesen egyező eredményekhez kell vezetnie.

Ez átalánosságban a variatio módszere, mely az isoperimetrikus feladatok mindenikére alkalmazható. Itt látható, mily nagy mértékben értékesíthető a transcendens analysis második alaptulajdonsága, az átalánosság; ez átalánosságon alapul a variatio-módszer egész valójában. Ha nem egy képlettel fejezhetnők ki minden görbének ivhosszát vagy felületét; ha nem volna bármily görbe vonal mentén haladó test esésének átalános egyenlete stb., lehetne-e akkor oly kérdéseket megfejteni, melyek természetüknél fogva a tüneményben jelentkező minden egyes esetnek együttes tekintetbe vételét követelik?

Mivel a variatio-számitás csak a transcendens analysisnek mérhetetlen kiterjesztése, nagyon természetes, hogy hasonló szempontokból vehető tárgyalás alá, mint az indirect függvények tana. Lagrange a variatiót az infinitesimalis alapeszme szerint tárgyalta, mielőtt még a transcendens analysis alapját szigoru tudományossággal megvetette volna. Ezen reformatio keresztülvitele után megmutatta, hogy lehet a derivatio tanát a variatióra is kiterjeszteni. Alkalmazásban, hol a variatio magasb abstractiója következtében már maga is nehézséget okoz az értelemnek, legczélszerübb a directebb és gyorsabb Leibnitz-féle alapgondolatot követni. Lagrange maga is ugy tett „Mécanique analytique“ müvében.

A variatiók philosophiai jellemének megvilágitására egy meggondolást kell itt jeleznünk, mely által a variatiót közelebb juttatjuk a közönséges transcendens analysishez, mint a hogy ezt elérnie Lagrangenak sikerült. Emlitettük, hogy a partialis differentiális egyenletek, melyeket d'Alembert alkotott meg, a transcendens analysisbe a két változóval biró függvénynek kétfajta, különálló, egymástól független növekedését vezetik be, tekintettel az egyes változókra. — Igy a felülethez tartozó z coordinata két egymástól teljesen különböző módon változhatik, mely módok egymástól teljesen különböző törvények szerint történhetnek, a szerint, a mint vagy az egyik (x), vagy a másik (y) horizontális coordinátát növesztjük. E meggondolás természete nagyon közel áll ahhoz, mely a variatió-módszer átalános alapját képezi.

A variatió-számitás ugyanis csak abban nyomult előbbre, hogy a független változókra ruházta át a megváltozás olyforma két módját, milyennek a két független változós függvény e változók egymástól külön tekintetbe vett változása következtében alávethető. E meggondolás alapján a d'Alembert fölfedezte tan természetes és szükséges átmenet a közönséges infinitesimális számitástól a variatio tanához.

Ezekből látszik, hogy philosophiailag a variationál föllépő egyenletek még indirectebbek, mint a differential-egyenletek; képzésük is könynyebb, mint a differential-egyenleteké, s belőlük később tisztán analytikai uton rendes differentialis egyenletekre jutunk, melyeket közvetetlenül nem lehetett volna fölállitni. A variatió-módszer legfelsőbb része a menynyiségtani analysis rendszerének, mely az algebra elemeiből kiindulva, szakadatlan folytonosságban mélyebb és hatalmasb módszereket alkot a természeti philosophia tanulmányozására.

A véges különbségek tana.

A mondottak a mathematikai analysis összességének alapját magukba foglalják. Egy rész van még, a véges különbségek tana, mely bár az analysisbe tartozik, mégis lényegében véve különböző természetünek tekintetik.

Taylor alkotta meg e tant „Methodus incrementorum“ müvében. — Lényegében véve a véges különbségek tana a független változók véges növekményének megfelelő függvény-növet szolgálatában áll. E növetek vagy differentiák, melyeket Δ-val szokás jelölni a differentiáléktól való megkülönböztetés végett, uj függvényeknek tekinthetők s reájuk u. ezen gondolatmenetet lehet alkalmazni, a mi által a különböző rendü differentiák származnak.

Mint az indirect functiók tanánál, ugy itt is két kérdés lehet megoldandó: 1. meg kell határozni az egy vagy több változós függvények egymásutáni differentiáit, föltéve, hogy a független változók véges értékkel változnak s változásuk törvénye rendszerint egy arithmetikai sorral van kifejezve; 2. viszont e differentiákból, vagy a köztük fönnálló egyenletből magukra a primitiv egyenletekre térni. Innen van, hogy ez elmélet két részre oszlik, t. i. a véges különbségek egyenes müveletére és a véges különbségek fordított müveletére.

Taylor e gondolat által Leibnitz számolási módszerénél is átalánosabbat gondolt megalapítni; de Lagrange kimutatta, hogy e tulajdonságok inkább csak az alak- és megjelölésre vonatkoznak, mint az elmélet lényegére. Leibnitz analysisét az jellemzi, hogy a derivált függvények más természetüek, mint a primitiv függvények, s igy egyszerübb és könnyebben megalkotható relatiókhoz is vezetnek. Taylor differentiáival nem igy áll a dolog, mert ezek már az eredetiekkel egyező természetüek, a mi átalánosabb relátiók és egyenletekre alkalmatlanná teszi őket. Nem is nyujt oly előnyöket e tan, mint Leibnitz alkotása egyes geometriai vagy mechanikai kérdések tárgyalásánál. Lagrange azonban még azt is kimutatta, hogy a differentiák és a differentiálék tana közti analogia alapjában téves, ha az elsőkre vonatkozó képleteket különös eseteiként tekintjük a másik nemüeknek, mert ezeknek természete lényegében véve más.

Nem helyes a véges különbségek tanát a transcendens analysis része gyanánt föltüntetni, mert a különbségi egyenletek, daczára a bennök előjövő különleges megjelölésnek, mégis csak direct egyenletek.

Taylor gondolatának tárgya a sorok elmélete, melyhez következő két kérdés tárgyalása tartozik: 1. ha adott a sor törvénye, meg kell keresni az átalános tagot ugy, hogy bármely tag értékét kiszámíthatjuk a nélkül, hogy kényszerülnénk a megelőzőket képezni. 2. hasonló körülmények közt meghatározni bizonyos számu tag összegét, a nélkül, hogy ezen tagokat egyfolytában egymáshoz adnók. Lehetnek olyan sorok is, melyeknek haladási törvényét nem egy, hanem több jel mutatja, mint tette azt pl. Laplace a valószinüségek analytikai elméletében, melyet ő „származtató függvények tanának“ nevezett, ez sem más, mint a magasb rendü véges sorok-, vagy pedig a sorok átalános elméletének egy ága.

A Taylor szellemében való differentiatio egy sor alakulási törvényének az átalános tag kifejezte után való megtalálásában áll, mely egy vagy több indextől függhet; viszont az integrátio tárgya egy sornak öszszegezésében áll, melynek átalános tagja ki van fejezve differentiák által.

Taylor analysisének leggyakoribb alkalmazása van az empirikus törvények megalapításakor használatos interpolationál egy másik alkalmazása a tetszőleges alaku görbe hosszának és területének közelítéssel való meghatározásában áll.

Befejeztük az abstract mathesis főelveinek áttekintését, s most hasonló munkát kell a concret mathesisre nézve is végeznünk. Itt ki kell mutatnunk, hogy az abstract mathesis tudományát tökéletesnek föltételezve, hogyan lehetett az összes geometriai kérdéseket a tiszta analysis kérdéseire visszavezetni s ez által a természet-phylosophia e két ágára a nagy tökéletességnek és szigoru tudományosságnak jellegét reányomni.

(Vége következik.)

Budapest. **Ormay Lajos.**