# A MATHEMATIKA
# A POSITIV PHILOSOPHIA RENDSZERÉBEN.

## II. Közlemény.

### *A geometriáról átalában.*

A geometria természet-tudomány, de egyszerűbb, s ép ezért sokkal tökéletesb, mint a többi.

E tökéletesség okozza, hogy nem egyszer a megfigyeléstől független, elvont tudománynak tekintették, noha világos, hogy minden tanulmányozandó testre nézve megfigyelésen alapuló elemi tünemények léteznek, melyek semmiféle okoskodással sem alapithatók meg, s minden levezetésnek alapját teszik. A tévedés e tekintetben a metaphysikai szellem befolyásának maradványa, mely még a geometriában is uralkodott s akadályozta a concretről az abstractra való áttérés megkülönböztetését.

A geometria tudományos elsőbbsége más tudományok fölött az, hogy a benne előjövő tünemények a legátalánosabbak és legegyszerűbbek. A természeti tárgyak mindenike geometria vizsgálódás alapjául szolgálhat. A geometriai tünemények még akkor is léteznének, ha az egész természetet mozdulatlannak tételeznők fel, s így a geometria átalánosb a mechanikánál, s tüneményei egyszerűbbek, mert függetlenek a mozgás tüneményeitől, mig a mechanikai tüneményeknél a geometriai viszonyokon kivül a mozgást is tekintetbe kell venni. Ezért áll a concret mathesisben a geometria első helyen. A geometriát a kiterjedés (étendue) tudományának mondják; inkább azt kellene azonban mondani, hogy czélját a kiterjedés mérése képezi. Ennek megértésére két, a metaphysika által elhomályosított ismeretet kell megvilágositani.

A tér positiv gondolata abban áll, hogy azt nem a testeken, hanem egy végtelen közben tekintjük, melyben a mindenség összes testeit benlevőknek gondoljuk. Ez ismeretre a testnek egy csepfolyós testbe helyeztekor hátrahagyott lenyomata után jutottak. Geometriai szempontból ily lenyomatot maga a test is helyettesíthet s azért a gondolkozásmenetben változás nem áll elő. E végtelen térnek physikai természetét könnyebbség okáért olyannak kell képzelnünk, mint amilyen az a tér, melyben élünk olyannyira, hogy ha megfigyelésünk tere cseppfolyós volna s nem gáznemű, a geometriai tért is kétségkivül cseppfolyósnak képzelnők. E körülmény azonban fontosságra nézve másodrendü; lényege e meggondolásnak az, hogy a testek az azokat feltüntető tértől elkülönítve vétessenek figyelembe. Ez alapvető képnek fontossága a priori kitünik, mert lehetővé teszi a geometriai tüneményeknek minden egyéb tüneményektől ment vizsgálatát. Ez átalános meggondolás az első lépés a geometria rationális tanulmányánál, mely nem lett volna lehetséges, ha az alakon és nagyságon kivül a test valamennyi más physikai tulajdonságát is tekintetbe kellendett venni. Ezen hypothesis használata, mely talán az emberi szellem által megalkotottak legrégebbike, annyira tulajdonunkká lett, hogy terhünkre esik annak nemlétezéséből folyó következmények megbecslésével fontosságára pontos következtetést vonni.

Midőn ily módon a geometriai vizsgálódások elvontakká lettek, nemcsak egyszerüebbekké, hanem átalánosabbakká is váltak. Ha u. i. a kiterjedést magukhoz a testekhez kötjük, addig csak a természetben létező alakokat vonhatjuk vizsgálásunk körébe; ha azonban a kiterjedést a térbe helyezzük, az emberi szellem bármily képzelhető alakot vehet tekintetbe. A másik geometriai előismeret a kiterjedés különféle fajaira vonatkozik, melyeket köbtartalomnak, felületnek, vonalnak, pontnak mondunk.

Bár nyilván lehetetlen a három dimensio bármelyikétől is valamely kiterjedést (étendue) megfosztottnak gondolni, tagadhatatlan, hogy sokszor a geometriai kérdések csak két, vagy egy dimensiótól függően tekintetnek. Másrészt ezen közvetetlen októl eltekintve az egy és két dimensióju kiterjedés tanulmányozását mulhatatlanul szükségeli a testeknek (három dimensiójuak) tanulmánya, mert ez utóbbiak közvetetlen elmélete igen bonyolódott volna. E két ok kényszerít az egy, a két és a három dimensióju kiterjedés elkülönített vizsgálatára.

A mathematikusok kifejezése a felület és vonal meghatározásánál látszólag hamis fogalmat alkot meg; lényegükben azonban csak arra szolgálnak e kifejezések, hogy könnyen gondolkozhassunk a kiterjedés e két fajáról, amennyiben teljesen abstrahalunk azon elemtől, melyet tekintetbe nem szükséges venni.

Hogy a felületről fogalmat nyerjünk, elégséges az eliminálandó dimensiót folytonosan kisebbíteni, mig végre csekélységénél fogva nem kell reá többet figyelmet fordítani, a másik két méret azonban változatlan marad eközben. A vonal fogalma az eljárásnak uj alkalmazása által származik, midőn ugyan azt tesszük a szélességgel, mit első esetben a vastagsággal tettünk. Végre még egyszer ismételve az eljárást, a pont fogalmához jutunk. Világos ebből, hogy a testeket felületek határolják, ezek határait a vonalok képezik s ezek pontok által vannak határolva. A fölületek és vonalak ilyformán szintén három dimensiójuaknak tekintetnek; s valóban, a felületet csak mint mérhetetlen vékonyságu lemezt, a vonalat mint végtelen finom fonalat lehet elgondolni. A vékonyság fokát, melyet az ember azon méretnek ad, melytől eltekinteni akar, geometriai megfigyeléseinek finomsága határozza meg. Az egyformaság ezen hiánya azonban semmi bajt sem okoz, mert elég az, hogy a felület és vonal megfeleljenek rendeltetésük lényeges föltételének, mely abban áll, hogy mindenki az elhanyagolandó méreteket kisebbeknek gondolja, mint amilyenek nagyságának megbecsülésére a köznapi élet alkalmat nyujt. — Ez egyszerü magyarázatot az ezen tárgyra vonatkozó értelem nélküli metaphysikai képzelődő discussiók tették szükségessé.

Ezek után a geometria átalános definitiójára térhetünk, azt oly tudománynak mondván, melynek végczélja a kiterjedés mérése. Itt a mérés szót nem legszorosb értelemben kell venni, mert ekkor két egynemü mennyiségnek pl. két vonalnak, két felületnek, két testnek közvetetlen viszonyát fejezi ki, pedig ezen összehasonlítás legtöbb esetben nem lehetséges, s ha igen, akkor nem elég pontos. Meg kell tehát e helyen a geometriai mérés pontos fogalmát alapítnunk.

Minden test, s igy annyival inkább minden felület, bizonyos számu, hol könnyebben, hol nehezebben kijelölhető vonalak által meg van határozva. A geometria csak e vonalakat tekintheti közvetetlenül lemérhetőknek, és czélul tüzi ki magának ezek értékeiben kifejezni a keresett köbtartalomnak vagy felületnek az egységnyi felülethez, illetőleg köbtartalomhoz való viszonyát. A czél, tehát a köbtartalmakra és felületekre vonatkozó minden összehasonlítást, a vonalakéra visszavezetni.

Még azt is meg kell jegyezni, hogy csak az egyenes vonal mérése tekintetik közvetetlenül megtörténhetőnek, a görbe vonalak kérdéseit pedig az egyenesekére kell visszavezetni. A geometriának átalános czélja tehát: a fölületek, köbtartalmak, és vonalak összehasonlítását egyenes vonalakéra visszavezetni.

Van ezenkivül a geometriának egy része, mely az egyenesre vonatkozik. Sokszor ugyanis nem lehet a vonalra a mértékegységet fölrakni, s igy a kérdéses egyenes lemérését is más közvetlenül lemérhető analog kiterjedésektől kell függővé tenni.

A geometria módszeres beosztása tehát a vonalak vizsgálata, megkezdve azt az egyenes vonaléval, ezután jő a fölületek s végre a térfogatok tárgyalása.

Ily értelemben a geometria végtelen nagy terjedelmü, mert minden elgondolható alakot tekintetbe kell venni, mely alakok azonban végtelen változatosságot tüntetnek föl, mint ezt a görbékre nézve már a legfölületesb vizsgálat is mutatja. A görbéket egy pont mozgása által származottaknak tekinthetjük s átalában véve annyi különböző görbe van, ahány különböző föltételnek a mozgást alávethetjük; e föltételek száma azonban végtelen. Ha pl. egy pontnak, egy álló ponttól mérve, állandó távolságban kell mozgása közben maradnia, kört ír le. Ha a mozgó pont két ponttóli távolságának összege, vagy különbsége állandó, ugy a mozgó pont ellipsisben, illetőlegesen hyperbolában mozog. Ha a pont egy körön mozog, mely kör egyenes vonalon gördül tova, cycloid származik. Ha a pont egy egyenesen mozog, bizonyos törvény szerint s ez egyenes maga is egy pontja körül forog, csigavonal (spirale) ered, melynek annyi faja van, ahány relatiót a translatió és rotatió között gondolhatni. E görbék megint más újakhoz vezetnek, mint pl. az epicycloisok, az evoluták és evolvensek, a caustikus vonalak. Még nagyobb a változatosság a kettősgörbületü görbéknél. — A fölületek még változatosabb alakuak, mert nemcsak a fölületet létrehozó görbének (generatrix) mozgási törvénye, hanem a mozgó görbe alakjának változása is tekintetbe veendő, s igy két különböző osztályu föltétel változtathatja meg a fölületek alakját, mig a vonalakét csak egy. Ennek fölvilágosítására elég a szabályzott (surface réglée) felületek tekintetbe vétele; ezek egy egyenes mozgása közben keletkeznek s magukba foglalják a hengeres, kupdad és átalán a lefejthető felületeket stb. A köbtartalomra nézve uj meggondolásra nincs szükség, mert ezek egymástól csak az őket határoló felületekre nézve különbözhetnek.

E geometriai megfigyelés befejezésére meg kell említenünk, hogy a felületek uj természetü görbék fogalmának megalkotásához vezetnek, mert minden görbét két felület átmetszésének eredménye gyanánt tekinthetünk. Így nyerettek az egyenesnek és körnek kivételével, melyeket a természet nyujtott, a görbe vonalak s azért ezeket a mathematikusok által föltaláltaknak lehet tekinteni. A másodrendü görbék közül a parabolát, hyperbolát, ellipsist is az egyenes körkupnak síkkal való átmetszése segítségével származtatták a régiek. — Az említett átalános eszközök használata az alakok végtelen számát hozhatja létre, bár a megfigyelés által nyujtott alakoknak csak igen kis számából történik is a kiindulás.

Ezen közvetetlen eszközök, melyekkel különböző alakokhoz jutunk, semmi jelentőséggel sem birnak Descartes műve óta, melynek alapgondolata az, hogy uj alak föltalálása uj egyenlet föltalálásától függ, s igy az egyenletekben előforduló függvények megváltoztatása által uj meg uj görbékhez és felületekhez jutunk. Ezen elvont eljárás termékenyebb a legerősebb képzelem által támogatott direct geometriai segédforrások összességénél. E conceptiobol egyuttal az is kitünik, hogy többféle lehet a felületek alakja, mint a sikgörbéké, mert ezeket két változós, azokat három változós függvények fejezik ki. Ezekből látható a geometriának vonalakra, felületekre és köbtartalomra vonatkozó része mily végtelen kiterjedésü a vizsgálódás tárgyát képező testek végtelen változatos alakja miatt.

A kiterjedés m é r é s e a geometria főfeladata, bár ez állitással a kutatások nagyobb része látszólag ellentétben is áll. Látszólagos ez ellentét, mert a görbék és felületek tulajdonságainak vizsgálata az eszköz, mely szükséges a czél elérésére. Ez e két tényből érthető meg: Az első tisztán tudományos s abban áll, hogy ha a geometriai alakzatokra csak a kezdetleges tulajdonságok volnának ismeretesek, lehetetlen volna legtöbb esetben az azok megmérésére vonatkozó feladat megfejtése. E czélra valóban nem is egyformán alkalmas a geometriai alakzatnak bármely definitiója. Igy a geometriai alakzat kezdetleges definitiója nem egyszer a kitüzött czélra nem lévén alkalmas, más definitiók után kell nézni, más szóval: tanulmányozni kell a lehető legbehatóbban a kérdéses alakzat tulajdonságait. Ha a körnek rectificatiójánál vagy quadraturájánál a kört teljesen definiálo ama tulajdonságból indulnánk ki, hogy az ugyanazon kerület mellett a legnagyobb felületü görbe, ugy a kerület — vagy terület — meghatározás szinte felülmulhatlan nehézségbe ütköznék; ellenben a priori látható, hogy ha a kerületnek a középponttól való egyenlő távolsága vétetik a kör definitiójának, ugy ez jobban alkalmazkodik oly természetü vizsgálatokhoz. Archimedes sem fedezte volna föl a parabola négyszögitését, ha csak annyit tudot volna róla, hogy az kúpmetszet. A tudósoknak az első definitió átalakitására vonatkozó s tisztán szemlélődő kutatásai nélkülözhetetlen előmunkálatok voltak ezen kérdés megoldásánál.

A másik nem kisebb fontosságu inditó ok az, hogy ily tanulmány nélkülözhetetlen a geometria abstract és concret részének rationalis uton való szervezésére. Mivel a geometriának minden képzelhető alakot tekintetbe kell vennie, ebből következik, hogy a természet nyujtotta alakokra vonatkozó kérdések implicite benfoglaltatnak az abstract geometriában, melyről föltesszük, hogy tökéletességre jutott. Ha azonban tényleg a concret geometriára kell áttérni, mindig nagy nehézség áll elő, mert azt kell eldönteni, hogy az abstract typusok melyikére kell vonatkoztatni elégséges közelitéssel a vizsgálandó vonalakat vagy felületeket. E relatió megalapítása az ok, mely szükségessé teszi minden geometriai alak lehetőleg sok tulajdonságának ismeretét. Érdekesen világítja meg e tárgyat az égi geometria. Ha Kepler fölismerte, hogy a bolygók ellipsisben mozognak a nap (mint focus) körül, ugy arra nem az által jutott, hogy az ellipsist kúpmetszetnek tekintette, sem pedig az által, hogy az ellipsis leghasználatosabb tulajdonságára gondolt, mely abban áll, hogy a focusokból az ellipsis egy pontjához húzott radius vectorok összege állandó; hanem azon kapcsolat kimutatása által, mely aradius vectorok hossza és iránya között fönnáll. A görög tudósoknak a kúpmetszetekre vonatkozó sokirányu tisztán speculativ munkálatai okvetetlen szükségesek voltak arra, hogy Kepler az abstractról a concretre térhessen át, azt választván a különböző fajta vizsgálatokból, melyet a bolygók pályájára legkönnyebben mutathatott ki. — Ha a gömbre nézve csak az a tulajdonság volná ismeretes, hogy fölületének minden pontja egyenlő távol van a középponttól, soha sem fedezték volna fel a föld gömb-alakját. Szükséges volt a gömb e definitiójából a felületen végezhető megfigyelések által igazolható tulajdonságokat előlegesen megalapítani, ilyen pl. a meridián irányában hátrahagyott út és a polus emelkedési szöge közti állandó viszony. Ép igy állt a dolog midőn később kimutatták, hogy a föld spheroid.

Ezekből látható már, hogy minden alakra vonatkozó tulajdonságok tágas ismerete nélkül az abstractról a concretre való átmenetel a geometriában nagyon esetleges volna.

Az említett két ok teszi szükségessé oly vizsgálatoknak a geometriába való fölvételét, mely vizsgálatok nem foglalkoznak kiterjedések mérésével, de mégis ily mérést a geometriai tudomány végczéljaként jelölnek ki. Megőrizhetjük tehát a philosophiai előnyöket, mít definitiónk világossága és precisitása nyujt és befoglalhatjuk nagyon ratíonalisan, bár indirecte az összes geometriai kutatásokat, amennyiben a terjedelem mérésére nem vonatkozó dolgokat vagy úgy tekintjük, mint a végleges kérdések előkészítését; vagy pedig ugy, mint a megnyert megoldások alkalmazását.

A geometriai kérdések két különböző módszer szerint tárgyalhatók. Az e két rész megkülönböztetésére szolgáló szokásos kifejezések: synthetikus, analytikus geometria, hibás fogalmat adnak e két részről. Jobb volna régi és modern geometriának nevezni, legajánlatosb azonban különös és általános geometria elnevezést elfogadni.

A két módszer különbözősége nem a számolás alkalmazásában gyökerezik, mint azt átalában gondolják, hanem a tekintetbe vett kérdések természetében. A geometriai tudományt rendezhetni a tanulmányozandó tárgyak szerint, vagy a megfigyelendő tünemények szerint. Az első mód természetesb, a régiek eljárása volt s abban áll, hogy mind ama kérdéseket összecsoportosítjuk, ha különböző természetüek is, melyek u. a. geometriai alakzatra vonatkoznak, és elkülönítjük a különböző testekre vonatkozókat, bármily analogia is volna köztük. — A második módszer a Descartes óta alkalmazott, ama modern fölfogáson alapul, hogy a hasonló kutatásokat u. a. szempont szerint egyesítjük, bármily különböző geometriai alakhoz tartozzanak is, és elkülönítjük egymástól az ugyanazon testnek lényegesen különböző tulajdonságaira vonatkozó kérdéseket.

A régi geometria (géométrie des anciens) speciális volt. Minden görbe, felület egyenkint tanulmány tárgyát képezte; s bármily nagy is volt a tett kérdések hasonlatossága minden esetben külön kellett ujból megtennni a vizsgálatot.

A modern geometriát ellenben az átalánosság jellemzi, mely bármely alakra kiterjed. A módszer oly értelmü abstractióban áll, hogy az ugyanazon geometriai jelenségre vonatkozó kérdést, bármely testen lép is fel e jelenség, átalános érvénnyel oldjuk meg. Az átalános elméletnek különös tüneményekre való alkalmazása alárendelt dolog, mely változatlan törvények szerint mindig biztos sikerrel végrehajtható.

Innen látható a modern geometria nagy főlénye, mert minden megoldott kérdésnél a hasonló problemák száma egyszer s mindenkorra megfogy bármily lehetséges testre vonatkozzék is az.

Ha a vonalakat és felületeket egyenkint tanulmányozza az ember, az elméleteknek alkalmazása, az alakban hasonló testekre esetleges jellemü volna, mert semmi sem biztosíthatna a felől, hogy a vizsgált alakok egyike vagy másika abstract typusul szolgálhat-e.

Igy pl. bizonyára van valami esetleges azon szerencsés kapcsolatban, mely a görög tudósoknak a kúpmetszetekre vonatkozó vizsgálata és a bolygók pályája közt létezik. A modern geometriában azonban már csak az által is, hogy bármely geometriai alakzatban közösen fellépő tünemények átalános vizsgálata a czél, az a tudat erősödik meg az emberben, hogy a külső világban megvalósúlt alakok nem vonhatják ki magukat az elmélet alól, ha az erre vonatkozó geometriai tünemény nyilvánul. A régi geometria a bölcsőjében levő tudomány benyomását teszi. Az átalános geometria mindjárt a geometria keletkezésekor nem is volt lehetséges, mert számolásra van alapítva; már pedig ismeretes, hogy a mathematikai analysis alkalmazása, e tudomány természeténél fogva, csak akkor alkalmazható, ha a tudomány, melyre az analysist alkalmazzuk, annyira ki van müvelve, hogy a megfigyelt tüneményekre nézve egyenletek állíthatók fel, melyek az analytikai müveletek kiinduló pontja lesznek. Ha ez alapegyenletek föl vannak fedezve, az analysis azokból a következmények nagy számára vezet, melyeket eleinte sejteni sem lehetett, s így az analysis a geometriát nagy mértékben tökéletesíti. Egy természeti tudomány alapismereteinek megvetésére azonban soha sem elégséges a mathematikai analysis, még ez alapismeretek uj bebizonyítására sem, ha már megvannak alapítva. E tekintetben semmi sem ment fel a tárgynak a kapcsolatok pontos ismeretéig terjedő direct tanulmányától A régi geometria ilyen formán mindig nélkülözhetetlen bevezetés lesz az átalános geometriába.

*Átalános elmélkedés a különös vagy előkészitő mértanra vonatkozólag.*

A különös mértan feladatát az egyenes vonal tanulmányozására, az egyenes vonalak által határolt síkfelületek négyszögítésére és a síkok által határolt testek köbtartalomszámítására lehetne visszavinni. E három kérdésre vonatkozó feladatok minden geometriai vizsgálatnak kiinduló pontját teszik; ezeket csak a tárgyak direct tanulmánya nyujtja. Minden más alaknak, még a körnek s a felületeknek és köbtartalmaknak teljes elmélete is már az átalános vagy analytikus geometria körébe tartozik.

Rendesen az elemi geometriát igen kiterjesztik, mert belefoglalják a kört és a gömbölyü testeket is, mit az ókor iránti különös tisztelet okoz. A kúpmetszetek átalában azonban már a modern geometriába vétettek föl. A körnek az átalános mértanban való tárgyalását hátráltatja, hogy ez által a mennyiségtani tanításban csak igen későre esnék néhány lényeges kérdésnek pl. a körívhossz, a körterület, a gömbfelület és köbtartalom kiszámítása. E szempont nem határozna azokra nézve, kik a mathematikai tudomány egészét akarják tanulmányozni; de szük időre terjedő tanulmánynál a lehető legrövidebb utat kell választani az eredményhez jutás kedveért.

Nem fogjuk itt jelezni a régi geometria módszerének gyakorlatban levő kiterjedéséből eredő előnyöket, melyek a mélyebb ismeretek és a modern módszerrel való tanulságos összehasonlítás eredményei. Oly tulajdonságok ezek, melyek vizsgálata a tudomány történeti menetéhez tartoznék; erről azonban le kell tudni mondani, midőn a dogmatikus tárgyalás szüksége áll elé. Egy tudomány minden részének a lehető legrationálisabb módon való tekintetbe vétele után nagyon üdvös tanulmányozni e tudomány történetét és következéskép összehasonlítni az emberi szellem által egymásután fölhasznált módszereket; a kutatás e két ágának azonban elkülönítve kell lennie. Az is nagyon valószinü, hogy az elemi geometriát az említett korlátok közé szorítják, mihelyt az analytikus ismeretek jobban elterjednek és mihelyt a mathesis a tudományos belátás alapjául fog tekintetni.

Történtek újabban — bár helytelenül — kisérletek az elemi geometria alaptételeinek tisztán algebrai uton való feltüntetésére, mint pl. a háromszög három szögére vonatkozó relatiók, a hasonló háromszögek tanának előállítása, a derékszög vagy a parallelepipedon megmérése; e geometriai dolgok azonban csak direct tanulmány utján nyerhetők s a számolásnak e nemü vizsgálatoknál semmi része sincs.

A számolás csak a bebizonyitás eszköze s így tévedés azt egy tudomány alapjának megvetésére fölhasználni akarni. Ilynemü eljárás a metaphysikához való visszatérést létesítne, reális ismeretek logikai abstractióknak tüntettetvén föl.

Meg van alapítva a régi geometria rendeltetése, s így az azt alkotó részeket kell fölsorolni. A mondottak alapján elég csak azon tárgyalás, mely az egyenes vonalra vonatkozik. A sokszögek quatraturája és polyederek cubaturája ugy sem vezet valami alapvető eredményhez.

Az egyenes vonal tanulmányában a czél valamely alak egyik egyenesének az abban előforduló többi alkotó elemekkel való kifejezése; ez vezet egy egyenesnek indirect ismeretéhez, bármily helyzetben is legyen a kérdéses egyenes. Ezen alapvető problema két uton oldható meg: graphikailag vagy algebrailag.

Az első eljárás abban áll, hogy az adott ábra megváltoztatott vagy változatlan méretekkel ujra megalkottatik. Ez volt a régieknek egyedüli eljárása még a legpontosabb és legfontosabb meghatározásoknál is.

Az ábrának más méretek szerinti ujra megalkotása nem nehéz, ha minden rész a síkban fekszik. Ha azonban az alkotó részek különböző síkban fekszenek, azt kell keresni, hogy lehet síkbani szerkesztésekkel téridomokat pótolni. Ily transformatio létesítésére az átalános eszközöket a descriptiv geometria adja, melyet Monge alkotott meg. — Ő egyöntetü módot mutatott arra nézve, hogy képvisel testeket két sikra való projectiójuk. Midőn Monge az előtte történt ily nemü össze nem függő eljárásokat elemezte, azt találta, hogy a kérdés kis számu változatlan elvont problemára vezethető vissza mindíg, s lényegében a felületek érintkezésére és metszésére vonatkozik.

Ily eljárás alapján a praktikus geometriai szerkesztések, milyen a rajznál a perspectiva, az erődítés, az építészet stb. egy egységes elmélet külön eseteiként tárgyalhatók. Ez alkotás megérdemli minden philosophus figyelmét, mert ez az első s mostanig az egyedüli valóban teljes lépés, mely minden művészetre rányomja a pontosság és rationalitás bélyegét, pedig ez jövő előhaladásuknak szükséges föltétele. Ez átalakulás azon iparágakban nyilvánult legelőször, melyek a legegyszerübb és legtökéletesb tudományra vonatkoznak; de egyre-másra minden gyakorlati eljárásnál érvényesülni fog. Monge bárkinél is mélyebben értvén át a müvészetek philosophiáját, megkisérlette vázolni a mechanikai ipar megfelelő tudományát.

A leíró mértannak csak mint alkalmazott tudománynak van haszna, megalapítja a geometrián alapuló művészetek elméletét. Mielőtt azonban valamely kérdés hatáskörébe esik, azt először az átalános geometriának kell megoldania. A descriptiv geometria tanulmányozásának philosophiailag fontos tulajdona van, s ez az, hogy a képzelő tehetséget (l'imagination) fejleszti, mert lényegének megfelelően a képzelt tárgyak nagy sokaságát kell az embernek elgondolnia, mintha azok szeme előtt volnának.

A descriptiv geometria megoldásai graphicusok, mint a régi geometria legtöbbje, de emellett átalánosak, mint a modern geometria megoldásai.

Ezekután az egyenes vonalra vonatkozó alapvető problemának algebrai uton való megoldására térünk át. Ugy a sík, — mint a gömbháromszögtan megalapítói a régiek, csakhogy e két tudományág, algebrai ismereteik kis köre miatt sokkal tökéletlenebb volt náluk. Itt akarjuk ezen elméletet átalános philosophiai szempontból ismertetni és méltatni.

Mivel minden sokszög háromszögekre bontható, elég egy háromszög adott elemeivel a többieket kifejezni tudni, ami által a polygonometria trigonometriára van visszavezetve.

Ilynemü kérdések megoldása végső elemzésben két egyenlet segítségével történhetik, melyek relatiót alapítnak meg a háromszög oldalai és szögei közt. Ez egyenletek a geometriai vizsgálatokat algebrai kutatásra vezetik vissza. A szögeket azonban a számolásban vagy a hozzájuk tartozó egységnyi sugaru ívvel, vagy a hibásan trigonometrikus vonalaknak (trigonometrikus függvények) nevezett segédszámokkal pótolhatnók; mint egyszerübb, az utóbbi eljárás lett elfogadva.

A segédszámok használatánál két eset lehet: 1. a szögekről át kell térni a hozzájuk tartozó trigonometrikus vonalakra és viszont 2. feladat lehet a háromszög oldalait a trigonometrikus vonalakból vagy fordítva kiszámìtni. Az első kérdés egyszer s mindenkorra meg van oldva, minden esetre nézve, a másik kérdésnél minden más-más esetre a számolást meg kell ujítani. — Ily meggondolás tehető a logarithmusok elméletére is, melyekkel való számolás szintén két részből áll. Az első rész bonyolódottabb, de előlegesen egyszer s mindenkorra elvégezhető, mert csak a tekintetbe vett számoktól, nem pedig azok összeköttetési módjától függ, s lényegében abban áll, hogy minden számot egy másik állandó szám bizonyos hatványának tekintünk. A második része e számolásnak, melyet minden uj algebrai kifejetésre ujonnan kell elvégezni, az együtthatókkal foganatosítandó egyszerübb műveleteken alapul.

Meg kell e helyen említenünk azt a jelenleg jelentéktelen, de kezdetben nagyon értékes tulajdonságot, hogy a szögeknek a trigonometrikus vonalakkal kifejezése és viszont arithmetikai megoldással létesíthető anélkül, hogy a megfelelő algebrai kérdés megoldatott volna. Ezen különösség okozta, hogy már a régiek is ismerték a trigonometriát. A régiek a hurt tekintették egyedüli trigonometrikus vonalnak, (trigonometrikus függvénynek) mely fölfogás jóval természetesebbnek is tünik fel, ha, mint Archimedesnél, a czél a kör rectificatiója, mely bizonyos hurok meghatározása által történt. Midőn aztán később Hipparchos a trigonometriát föltalálta, csak ki kellett egészítenie alkalmas közbeszurásokkal az előbb nyert eredményeket.

A trigonometria philosophiai vizsgálatát befejezendők, meg kell említenünk, hogy az íveknek vagy szögeknek egyenes vonalakkal való kifejezésére vonatkozó egyenletek egyszerüsítése kedveért több trigonometriai függvényt kell megalkotni s ily szempontból tekintve a trigonometriai függvények száma határtalan. Az arab s később a modern mathematikai vizsgálatok négy sőt hat direct trigonometriai függvényt hozott használatba, s e számot még nagyítni lehetne. Ahelyett azonban, hogy geometriai alkotásokhoz kellene fordulni, rendkivül egyszerü eljárással annyi trigonometriai vonalt alkothatunk, amennyit az analytikus transformatiók igényelnek. Ezen eljárás abban áll, hogy a bármely szöghöz tartozó trigonometrikus vonalak számának közvetetlen nagyítása helyett uj trigonometrikus vonalakat vezetünk be oly formán, hogy az említett ívet indirecte meghatározottnak tekintjük egy másik ív trigonometrikus vonalai által, mely második ív az elsőnek valamilyen egyszerü függvénye. Igy pl. hogy egy szöget könnyebben meghatározhassunk, annak sinusa helyett felének vagy kétszeresének sinusát fejezzük ki adott alkatórészekben. A trigonometrikus vonalaknak ezen indirect alkotása termékenyebb, mint bármily ily vonalakra (helyesen: *függvényekre)* vezető közvetetlen geometriai módszerek.

A trigonometrikus vonalak nagy száma a trigonometria egy harmadik kérdését szülte: mily kapcsolatban vannak e különböző vonalak egymással. E kérdés eldöntése nélkül nem lehetne értékesítni analytikus czéloknál a segédmennyiségek behozatalát.

A trigonometriának e három részét azonban ép ellenkező sorban kell tanulmányozni, mint amilyenben azokat a tárgy természetéből leszármazottaknak láttuk. A harmadik u. i. független a két előbbi résztől, a második rész pedig nem szorul az elsőre. A háromszögek tényleges megoldásának kell ilyenformán utolsó helyen előfordulnia, s ez az említett három rész természetes kapcsolatát annál fontosabbá teszi.

A gömb háromszögtant külön tárgyalni nem szükséges, mert ez csak a sik háromszögtannak alkalmazása, mely a gömbháromszögtan képleteit is szolgáltatja, ha a gömbháromszöget a neki megfelelő háromélü testszöggel pótoljuk.

Ezentul figyelmünket a valódi geometriai tudományra fordítjuk, miután a különös geometria jellemét kielégítően leírtuk.

### *Az általános vagy analytikai geometria alap gondolata.*

Az átalános geometria, geometriai gondolatoknak egyenértékü analytikai kifejezésekbe való átalakítására van alapítva. Directe és elmélyedve kell tehát Descartes gondolatát vizsgálnunk, mely egyszer s mindenkorra egyöntetüen megalapította ily viszonosság lehetőségét. Ha nem is tekintjük nagy fontosságát, amennyiben a geometriai tudományt tökéletesítette és azt rationális alapra fektette, e gondolat tanulmányozása már csak azért is igen fontos, mert teljes világításba helyezi a mathematikában az abstractnak és concretnek kapcsolatát létesítő módszert. Nincs szempont a mathematika philosophiájában, mely figyelmünket jobban megérdemlené.

A geometriai tüneményeknek analytikus kifejezésére mindenek előtt módot kell találni, melynek segítségével megadható analytikus kifejezése azon vonalnak vagy felületnek, melyekben a geometriai tünemény előfordul. Ha az idom analytikailag van megadva, világos, hogy ezentul az idomon történő változás is analytikus vizsgálat tárgya lehet. Hogy a geometriai alakokat analytikai egyenletekben kifejezhessük, egy lényeges nehézségen kell felülemelkednünk, s ezt a minőség fogalmának a mennyiség fogalmával való helyettesítése alkotja.

E tekintetben megjegyezzük, hogy az összes geometriai fogalmak három categoriába sorozhatok, e categoriák: a nagyság, az alak, a helyzet. Az első közvetetlenül a számok kérdése; a második pedig a harmadikra vezethető vissza, mert egy test alakja az azt alkotó pontok viszonos elhelyezésétől függ. A nehézség ilyenformán a helyzetnek a nagyság fogalmára való visszavezetésében összpontosul. E gondolaton alapul a Descartes megalkotta analytikus geometria általános rendszere.

Descartes philosophiai műve, egy az emberi szellem lényegéhez tartozó természetes eljárásnak általánosítása, mert minden emberben — szinte mondhatnók — akaratlanul alakul meg; mert valóban, midőn egy tárgynak helyzetét annak megmutatása nélkül akarjuk megadni, az egyedül alkalmazható és mindig elfogadott eljárás az, hogy más ismeretes tárgyakhoz viszonyítjuk, megjelölvén ezen geometriai elemek nagyságát, melyek által azt ezekhez kapcsolva gondoljuk. Ez elemeket Descartes coordinátáknak nevezte. — Egy pontra nézve a coordinaták száma kettő, ha ismeretes, mily sikban fekszik az; ellenben három coordinata szükséges, ha a tér bármely pontját meghatározni akarjuk. Ahány különböző szerkesztést elgondolhatunk helyzetének meghatározására, annyiféle rendszere van a coordinatáknak. De bármilyen is legyen az elfogadott rendszer, a helyzet fogalma mindig a nagyság fogalmára terelődik; még a pont helyzetváltozása is csak a coordinaták értékváltozásában áll. Ha a legegyszerűbb esetet, a pontnak sikon való helyzetét vizsgáljuk, úgy ez meg van határozva két egymásra merőlegesen álló egyenes vonaltól (tengelyek) számitott távolságok (orthogonális coordináták) által, vagy két ponttól való távolsága által, vagy egy ponttól való távolsága és ezen távolságnak egy fix egyenessel képezett szöge által (poláris coord. rendszer), vagy pedig azon két szög által, mit két fix pontból a kérdéses ponthoz huzott vonal a két pontot összekötő egyenessel képez stb.

Minden rendszer egy pontot két vonal átmetszése által határoz meg mely két vonal határozott föltételeknek van alávetve, mely föltételeknek csak egyike változik függetlenül. Az orthogonális rendszerben két egyenes találkozása, a poláris rendszernél egy körnek ezen kör középpontján átmenő egyenessel való átmetszése adja a kérdéses pontot. Az orthogonális coordinatáknál a pontot két egyenes átmetszése definiálja, mely egyenesek párhuzamosak fix tengelyekkel s csak ezektől való távoluk változó. A poláris rendszerben egy fix középponttal biró változó sugarú körnek az ugyanazon középponton átmenő változó irányú egyenessel való átmetszése definiálja a pontot.

A vonal, ha bizonyos tulajdonság által definálva van, egy egyenlet által helyettesíthető mely a vonalat leiró pont coordinatái közt fönnáll. Ha a pont egy sikon mozog és mozgása nincs korlátozva, ugy coordinatái független változók s a sikon bármely pontot elfoglalhat. Ha azonban egy pont egy vonalon tartozik maradni, már egy coordinata is meghatározza helyét, s igy a második coordinata az elsőnek függvénye, vagyis kell közöttük egy egyenletnek fönnállnia, mely a görbe természetének megfelel. — Viszont minden két változós függvény egy görbét képvisel s e feladat az egyenletek megoldásához vezet. Az egyenletek ilynemű rajza nagyon előmozdította az átalános analysis haladását és átalános analytikai szempontokat tárt fel, melyek elrejtettek maradtak volna ezen tárgyuk világos feltüntetésére szolgáló eszköz fölhasználása nélkül.

A görbe változása az egyenletben egy megfelelő változást idéz elő, mely vagy a helyzetre vagy az alakra vonatkozik. A transformatiok tana vezet annak megitéléséhez, vajjon két egyenlet ugyanazon görbét képviseli-e, csakhogy e görbe különböző helyzetü, vagy pedig más geometriai alakzatokra vonatkozik-e?

Minden meghatározott görbe egy tetszőleges pontjának coordinatái közt fönnálló egyenlet által kifejezhető; sőt mi több, a görbe minden meghatározása a megfelelő coordinata rendszerben fönnálló egyenletnek tekinthető.

Ez alapelv megértésére a definitiók két nemét kell megkülönböztetnünk. A jellemző (caractéristique) definitió az, mely kizárólagosan egy tárgyhoz tartozó tulajdonságot jelől, e tulajdonság azonban a tárgy keletkezési módját nem adja meg; a magyarázó (explicative) meghatározás az, mely a tárgyat keletkezésének egyik módját kifejező tulajdonság által jellemezi Igy pl. a kört az ugyanazon kerületü görbék közt a legnagyobb területünek mondhatjuk (jellemző definitió), vagy oly görbének, melynek minden pontja egy fix ponttól egyenlő távol van (magyarázó meghatározás). Az előbb mondottak csak a magyarázó definitiókra állnak.

A görbe egy jellemző tulajdonságából folyó legegyszerübb alakú egyenletének fölállítása körüli nehézség abban rejlik, hogy makacsul ragaszkodunk a föltételnek egy bizonyos rendszer coordinatáiban való kifejezéséhez ahelyett, hogy az összes lehetséges rendszerek közül a görbe keletkezési módjának megfelelőt választanók. Ha megvan az előkészitő egyenlet, mely a görbe definitiójából önként ered, úgy ezt véglegesen elfogadandó alakra hozandók, oly coordinatákat kell bevezetnünk, melyek a gőrbe keletkezési módjának legtermészetesebben megfelelnek. Átalános szabályt erre nézve adni nem lehet. Mennél mélyebben hat az ember az analytikus geometriába, annál több eszköz áll rendelkezésére a kitüzött czél megvalósítására.

Még csak a coordinata-rendszerekről átalában akarunk szólni, s e végből az analytikus geometría két szempontját kell megkülönböztetnünk: az algebra viszonyát a geometriához, mely a vonalaknak egyenletek általi kifejezésén alapúl; s viszont a geometria viszonyát az algebrához, mely az egyenletek által képviselt vonalak megrajzolását foglalja magában.

Az egyenletek megalkotására egy rendszer sem átalános előnyű, mert minden geometriai meghatározáshoz tartozik egy rendszer, melyben a görbe egyenlete közvetetlenűl kifejezhető, s e rendszer a görbének természetével változik.

A görbék megrajzolásánál egyszerűség és megbízhatóság tekintetében egyenes vonalú orthogonalis rendszer még talán a legalkalmasabb. Az átalános geometria legfontosabb vizsgálatai e rendszer segítségével történtek. Ha azonban más rendszerre kell áttérni, rendesen a poláris rendszert választják, mely oly ellentétben áll az orthogonálissal, hogy az ebben kifejezett complikált alaku egyenlet abban rendszerint egyszerűvé válik.

Descartes philosophiai alkotása azonban csak a sik görbékre vonatkozott; egy századdal később terjesztette azt ki a fölületekre és a kettős görbületű görbékre Clairant.

A pont a térben átalában három fölület átmetszése gyanánt tekinthető. A fölületet három változó függvénye adja, ezek közül az egyik a másik kettőnek függvénye. Itt is az orthogonális és poláris rendszer a legalkalmazottabb.

Minden a térben fekvő vonal analytikailag két egyenletből álló rendszer által van képviselve, ezek mindenike felületet fejez ki, együtt pedig e két felület átmetszési vonalát adják.

E geometriai felfogásnak azonban egy baja van, hogy az egyenletek az egész geometriai helyet képviselik és nem e geometriai helynek csak egy részét. Sokszor kell azonban egy nem folytonos vonalat vagy felületet pl. egy sokszög kerületét vagy egy polyeder felületét egyenletben kifejezni. E hézagot Fouriernek a nem folytonos függvényekre vonatkozó munkái kezdék kitölteni.

Megemlítendő még, hogy négy, öt stb. változós függvények geometriailag nem ábrázolhatók. Oka ennek az, hogy az analysis átalánosabb mint a geometria, mert minden tüneményre alkalmazható. Ezért nem volna elég okadatolt az analytikus törvények összegének képviseletét a geometriai tüneményekben keresni. Egy második tökéletlensége a geometriának az, hogy csak a reális megfejtésre vagyunk tekintettel, az imaginarius megoldást nem veszszük számba.

Poinsot adott ugyan egy igen egyszerű és szellemes módot az imaginarius megfejtések ábrázolására; az imaginárius gyökök azonban többnyire bonyodalmasságukkal ez eljárást nehezen alkalmazhatóvá teszik.

*A két dimensiójú geometria.*

Az átalános geometriában Descartes gondolata nem érvényesül fontosságának megfelelő mértékben. Rendesen úgy tekintik az analytikai geometriát, mint a kúpmetszetek és más görbék tanának tárgyalására szolgáló legegyszerűbb eszközt, pedig tudjuk, hogy a modern geometria főjelleme a geometriai tüneményekre vonatkozó kérdések kutatásának átalános módjában nyilvánul, midőn a geometriai vizsgálatokat analytikaiakká változtatjuk. Czélunkat itt annak megalapítása képezi, miként helyezte Descartes mély gondolata a geometriai tudomány összes rendszerét rationális és végleges érvényű alapra.

Egy görbe egyenletének ismerete után a főkérdés a meghatározására szükséges pontok számának ismerete. Itt két eset különböztethető meg aszerint, amint a görbe legátalánosb alakjában van adva, tehát egy átalános helyzetű coordinatarendszerre van viszonyítva, vagy pedig egy bizonyos különös helyzetű coordinatarendszerre van vonatkoztatva. Az a követelmény, hogy egy görbe egy bizonyos ponton átmenjen, a görbe egyenletében előforduló állandókat egy-egy algebrai föltételnek veti alá. A görbe meghatározására tehát annyi pont szükséges, ahány tetszőleges állandó van a görbe legátalánosb egyenletében. Meg kell azonban jegyezni, hogy ha az adott egyenlet tagjaiban több tetszőleges állandó van, mint amilyen a tagok száma, úgy a görbe meghatározásánál a tagok számára kell tekintettel lennünk; ez geometriailag azt jelenti, hogy az állandók bizonyos változásokon mehetnek át anélkül, hogy ez által a görbe megváltoznék. Igy van ez pl. a körnél, ha azt egy szög csúcsa mértani helyének tekintjük, mely szögnek szárai két fix ponton mennek át. Ha a görbének egy különös egyenlete (équation particuliére) lenne adott, úgy a görbének új rendszerre való vonatkoztatása által a kérdést az átalános alakra vezethetni vissza. A transformatió általi átalánosítás három állandót hoz az egyenletbe: az új rendszer kezdőpontjának coordinátáit és az új rendszer tengelyeinek a régiekhez való hajlását (itt orthogonalis coord. rendszert föltételezünk.) Igy számolás nélkül megmondhatni előre az egyenletbe belépő tetszőleges állandók számát, következőleg a görbe meghatározására szükséges pontok számát is, ha ugyan az együtthatók száma nem lehet kisebb a tetszőleges állandók számánál.

Lehet, hogy a meghatározó pontok közt különös (points singuliers) pontok vannak, pl. gyujtópontok, középpontok, csúcsok, fordulópontok (inflexiopontok) stb. Egy ily pont az egyenlet állandóit két föltételnek veti alá, tehát egy különös pont geometriailag két közönséges ponttal egyenértékű.

De bár fontos a görbét meghatározó pontok számának ismerete, ez a görbe természetére — akár geometriai akár analytikus szempontbótekintsük a dolgot — nincs döntő befolyással. Hisz a parabola, a logarithmusvonal, a cyclois, az Archimedesi csigavonal stb. négy pontot kivánnak meghatározásukra, bár analytikus vagy geometriai szempontból semmi más közös tulajdonságuk nincs.

Egy más fontos kérdés a középpont meghatározása. Ha a coordinatarendszer kezdőpontja a görbe központjában van, úgy két-két összetartozó pont lesz mindig, melyeknek egyenlő nagy, de ellenkező jelü coordinatái lesznek. Az egyenletből rögtön arra következtethetni, kezdőpont-e a középpont: elég azt vizsgálni nem változik-e az egyenlet, ha az átalános coordinaták jelét ellenkezőre változtatjuk. Egész rationalis algebrai függvényeknél szükséges, hogy a tagok mind páros vagy mind páratlan exponensüek legyenek. Ha a coordináták jelének megváltoztatása megváltoztatja az egyenletet, akkor új coordinatarendszert kell behozni; s ha ez által az említett tulajdonságu görbéhez juthatunk, úgy a görbének van középpontja, ellenkező esetben középpontnélküli.

A közönséges analysis az ugyanazon nemű görbék hasonlóságának kérdését is megoldja. E kérdés azon föltételek fölállítására vonatkozik, melyek a görbék egyenletét egy azoknak nagyságát megváltoztató állandóban módosítja. E kérdés annyival érdekesb, mert a hasonlóság nem helyzeti, hanem alakra vonatkozó tünemény, s ez az analytikai geometriának, hol directe csak a helyzetet vizsgáljuk, mindig nehézséget okoz.

A differentiális számolással a hasonlóság kérdése közvetetlenül megoldható, kibővítvén az egyenes vonalu idomok hasonlóságának elemi meghatározását a görbékre is. — Elég u. i. 1) hogy a két görbe megfelelő pontjaiban huzott érintési szögek u. a. értéküek vagy csak egy állandóban különbözők legyenek, 2) hogy a két görbe két homolog végtelen kis elemének hossza állandó arányértékkel birjon.

Közönséges analysissel való megoldásánál a hasonlóság kérdésének meg kell jegyeznünk, hogy a hasonló és hasonló fekvésü görbék megfelelő pontjait összekötő egyenesek egy közös pontban találkoznak.

Ezen u. n. hasonlósági ponttól a két homolog pontig huzott távolságok mértékszámának viszonya állandó szám. Ha tehát a kezdőpontot a hasonlósági pontba tesszük, a homolog pontok coordinátái arányosak lesznek, s a tulajdonság algebrai kimutatása elég a hasonlóság kimutatására. Ha a görbék nem hasonló fekvésüek, úgy az egyik görbe coordinátáinak transformatiója tetszőleges három állandót bocsát rendelkezésünkre; s ha ezek úgy választhatók, hogy a most említett analytikus föltételnek elég van téve, úgy a görbék hasonlók, különben nem. — Jellemző, hogyha bizonyos foku görbének legegyszerűbb alaku egyenletében csak egy állandó van, úgy ez állandó változtatása csupa hasonló görbét nemz, pl. az u. a. foku parabolák, a logarithmikus vonalak, a közönséges cycloisok, a körök stb. esetén. Ha azonban a legegyszerűbb egyenlet több állandót foglal magában, vagyis ha a görbe nagyságát több független mennyiség határozza meg, ez esetben az u. a. nemü görbék csak bizonyos föltételek mellett lehetnek hasonlók.

A fokusok és diameterek meghatározásáról nem szólunk, ezek különös fontossággal csak a másodrendű görbéknél birnak; más magasbrendű görbéknél a diameterek kevéssé ismert görbe vonalak, s tanulmányozásra nehezebb feladatot nyujtanak, mint azon görbék, melyekhez tartoznak.

A transcendous analysis egyik fontos alkalmazása a tangens általános meghatározása, melylyel kapcsolatban áll egy meghatározott pontból a görbéhez huzható tangensek kérdése, valamint egy adott vonallal párhuzamos tangensek feladata is.

A tangesek kérdése vezet az asymptoták fogalmához is, ezek közül csak az egyenes vonalu asymptoták fontosak, mert görbéik vizsgálatát egyszerüsítik. Az asymptota oly tangens, melynek érintési pontja a végtelenben van; s így meghatározására az érintési pont coordinátáit kell végtelen nagyokká tenni azon két egyenletben, melyek az érintő irányát definiáló két állandót tartalmazzák. Amint e két állandó realis vagy imaginarius, a szerint van, vagy nincs a kérdéses görbének (egyenes vonalu) asymptotája.

Az érintők elméletével összefügg a különös pontok (points singuliers) vizsgálata is. — Ily különös pont az inflexio-pont, a többszörös pont, a csúcs-pont stb. E pontok tanulmányozása a functiók maximum-minimum kérdésével függ össze.

A transcendens analysissel megoldható a Huygens által felfedezett görbület problemája is az osculáló kör segítségül vételével. A körnek van u. i. az összes görbék közt egyedül egyforma görbülete, mely görbület a sugárral visszás arányosságban áll. Bármely más görbének görbületét az osculáló körrel való összehasonlítás nyujtja; e kör a legbensőbb érintkezésben van a görbével s ez különbözteti meg a többi u. a. pontban érintő végtelen számú köröktől. A görbület megbecsülésére két egymás után következő ivelem által képezett u. n. érintkezési szög (angle de contingence) is szolgálhat, e két mérték azonban egyenértékű.

Az osculáló kört a görbe három végtelen közel eső pontja által definiáltnak tekintjük, középpontját két végtelen közel eső normális átmetszése adja. A görbületi középpontok mértani helye az evoluta (développée), a primitiv görbe pedig az evolvens (développante). Az evolutának két fősajátsága van: 1) érintői az evolvens normálisait képezik, 2) ivhossza az evolvens megfelelő két görbületi sugarának különbsége. Az evoluta egyenletének megnyerésére az evolvenst és a görbületi középpont coordinátait képviselő három egyenletből eliminálandók az érintési pont coordinátái.

Lehet a megfordított feladatot is czélul kitüzni, t. i. a görbületi sugárból a primitiv görbére következtetni, ez egy másodredű differential-egyenlet megoldását követeli.

A tudósok egy adott görbéből még másféle görbékre is jutottak, ilyenek a visszaverődés vagy a törés által keletkező gyujtó vonalak (les caustiques), eszméjük Tschirnhaustól, elméletük Bernoulli Jakabtól ered. E görbék végtelenül szomszédos fénysugarak átmetszéséből származnak, mely fénysugarakat egy primitiv görbe visszaver vagy megtör. E gondolat átalánosítása abban áll, hogy egy görbét végtelenül szomszédos görbék átmetszéséből származtatunk, mint azt Leibnitz, később Clairot, végre Lagrange tették is. Ez egymást metsző görbék rendesen csak egy állandó különböző értékére nézve különböznek. Az átmetszési pontok nyerésére differentiáljuk a görbét, a változónak tekintett állandó szerint s az igy meglevő egyenletekből, a szóban forgó állandót elimináljuk.

A görbület elméletét eddig az infinitesimális számolás szellemében adtuk. Lagrange gondolata nehezebben is alkalmazkodik, de az érintkezés átalános elméletéhez vezet s ennek az osculáló kör csak különös esete.

Az érintkezés átalános tanában, az érintkezés bensőségét a szerint itéljük meg, a mint a görbék ordinátájának egymás utáni deriváltjai között több vagy kevesebb egyenlő értékű van. Ha az első deriváltak egyenlők, az érintkezés elsőrendű; ez az az érintkezés, mely sokáig kizárólag ismeretes volt. A másodrendű érintkezés már a másodrendű deriváltak egyenlőségét is követeli stb. Elsőrendű érintkezésnél a görbéknek, az érintési pontban, közös tangensük, másodrendű érintkezésnél u. a. görbületi körük van. Az elsőrendű érintkezésen túl az érintkezést első, másod stb. rendű osculatiónak is mondják.

Az érintkezés bensősége kapcsolatban áll az érintkezésben levő görbék legátalánosb alakjában előforduló állandók számával is. A két állandót tartalmazó egyenes első, a három állandóval biró kör másodrendű, a négy állandós parabola harmadrendű érintkezésben állhat stb.

Az érintkezés rendjének jellemét feltüntetendők, meg kell gondolnunk, hogy egy egyenletben levő tetszőleges állandók, a görbe meghatározására szükséges pontok számát jelölik. Az n-ed rendű érintkezéshez szükséges, egymásután következő deriváltak egyenlősége pedig analytikailag azt fejezi ki, hogy az érintkező két görbének végtelen közel fekvő közös $n$ számú pontja van. Az érintkezést directe úgy tekintjük, mint a két görbe egymáshoz végtelen közel fekvő, több vagy kevesebb pontjára kiterjedő közösséget. A harmadrenben osculáló ellipsist pl. úgy tekintjük, mint az adott görbének öt pontján átmenő ellipsisek közül azt, melynél a mozgóknak föltételézett átmetszési pontok közül négy végtelenül közeledik az ötödik állónak gondolható átmetszési ponthoz. Igy juthatnánk a görbe görbületének behatóbb és behatóbb ismeretéhez, ha azt fokozatosan, bensőbb érintkezésre képes görbékkel hasonlítanók össze. A tudósok e speculativ tökélytől eltekintettek, az összehasonlításra fölvett görbe mint egység ismeretének egyszerüsége és világossága miatt, s görbületének egyformasága miatt a körrel hasonlitanak össze minden görbét.

Philosophiai szempontból — bár tényleg a görbületet az osculáló körrel kapcsolatosan tanulmányozzák — nem közönyös, vajjon az osculáló kört úgy fogjuk-e föl, mint az emberi szellemnek a görbék tanulmányozására vonatkozó, végső megfeszítését, mint ez Lagrange előtt volt; vagy pedig, mint egy sokkal átalánosb elmélet különös esetét, melyre ugyan rendesen szorítkozni szoktak, de tudatával birunk más, a geometriai tudományt tökéletesítő összehasonlításoknak.

Hátra vannak még, a rectificatio (görbék ivhosszának meghatározása), a quatratura (a görbék terület — meghatározása) és a cubatura (a testek köbtartalmának meghatározása); ez utóbbi behatóbban csak a forgási testekre terjed ki, mely testek egy görbének bizonyos tengely körüli forgása által keletkeznek. E kérdésekről már (az indirect functiókról átalában szólván) megemlékeztünk.

A két dimensióju geometriában lehetne tárgyalni a homogenitás föltétele mellett, az ivek és területek sulypontjának meghatározását, ha a súlypontot a távolságok középértékének definiáljuk; jobban illik azonban e kérdés a mechanikába.

Ezek után mondhatjuk, hogy a két dimensióju analytikus geometria három részből áll: az első rész a közönséges analysistől függ, a másik a differentiális, a harmadik az integralis számolással függ össze.

*A három dimensiójú átalános geometria.*

A felületeket illető kérdések is ugyan oly módon osztályozhatók, mint az előbbiekben a görbékre vonatkozók. A közönséges analysissel kapcsolatos vizsgálatokat a már tárgyaltakkal való teljes egyezésöknél fogva új megbeszélés tárgyává nem teszszük, akár a meghatározásra szükséges pontok számának meghatározását, akár az u. a. nemű felületek hasonlóságát, akár a középpontok vizsgálatát tekintsük. Az egyedüli különbség, hogy két változó helyett, háromról van szó.

Jelenleg oly kérdések tárgyalására szorítkozunk, melyek a transcendens analysissel függnek össze. Első helyen áll, ezek közt, az érintősik elmélete. Érintő sik alatt értjük azon sikot, mely az adott lappal egy pontban és az ezen pontot minden oldalról körülvevő végtelen kis területen összeesik. Ebből a meghatározásból következik, hogy a két vizszintes coordinata végtelen kis növekedése által s függélyes ordinátán történt változásnak, úgy a sikra, mint a lapra nézve, ugyan annak kell lennie. Ilyen formán az érintő sik egyenlete az adott lap egyenletének differentiálásától függ; mint az analysis közvetlenül adja:

$$z - z_1 = \frac{dz_1}{dx_1}(x - x_1) + \frac{dz_1}{dy_1}(y - y_1);$$

itt $x_1$ $y_1$ $z_1$ az érintő pont coordinatai. — Az érintő egyenletéhez juthatni két sik görbéinek érintő elmélete segitségével is. Az érintő sikot a felületnek tekintetbe vett pontján átmenő, két sikgörbe átmetszési pontjához tartozó érintői által meghatározottnak tekintjük. E gondolatmenettel jutott Monge azon fontos igazsághoz, hogy a felület egy pontjában húzható összes érintők u. azon sikban fekszenek.

Végre ugy is nyerhető az érintő sík, ha azt merőlegesnek tekintjük a megfelelő normalisra, mely alatt egy külső ponttól, a felülethez huzható maximális vagy minimális hosszaságú vonalt értjük. A maximum-minimum keresés rendes módja, a normálist képviselő két egyenlethez vezet, ha kifejezzük két pontnak távolságát, mely pontok egyike a külső, másika a felületen van. — E pontok elseje, mely annakelőtte mozgónak tekintetett, nyugvónak föltételeztetik; mig a másik, melyet eleinte nyugvónak vettünk, mozgónak tekintetik és a normálist irja le. Ha a normális egyenletei ismeretesek, az érintő síké semmi nehézséget nem okoz. Ez eljárás Mongetől ered.

A tárgyalt feladat mellékföltételekhez lehet kötve, pl. az érintő sík egy egyenesen megy át, vagy egy sikkal párhuzamos, vagy czél lehet az érintkezés átalános analytikus feltételét fölállítani az érintési pont megjelölése nélkül, mely feladattal ismét szoros kapcsolatban van három felület közös érintősikjának kérdése.

A felületek egymással való érintkezésének bensőségét hasonló módon itéljük meg, amint tettük ezt a görbéknél, csakhogy a föltételi egyenletek száma a két egymástól független növekedés miatt az $n$-ed rendű érintkezésnél $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, a görbék esetén a föltételek száma csak $(n+1)$ volt.

E lényeges különbség miatt sokkal nehezebb a fölületeknek, mint a görbéknek érintkezési elméletét kifejteni. Az első rendű érintkezésnél az egyezés teljes, mert ehhez három föltétel szükséges, melyek fölállítását a sík átalános egyenletének három tetszőleges állandója teszi lehetségessé; ebből foly mint különös eset az érintő sík egyenlete, mely a fölületek alakjának vizsgálatánál nagy fontossággal bir. A másodrendű érintkezésre nézve már egészen máskép alakulnak a viszonyok. Legtermészetesbnek látszanék minden fölületet az egyenlő görbületű gömbbel összehasonlítani, mint a görbéket a körhöz mérjük. De két másodrendű felület érintkezése hat föltételt igényel, mig a gömb legátalánosb egyenlete csak négy tetszőleges állandót tartalmaz, s igy a felület bármely pontjára nézve nem létezik osculáló, vagyis olyan gömb, mely egy adott pontban és az e körül körös-körül számba vett végtelen kis területen egybeesnék a görbe lap felületével. — A felület görbületének gömbbel való mérése tehát lehetetlen; s ép ezért a tudósok a felület görbületét az adott ponthoz tartozó normálison keresztül fektetett sikok metszésgörbéinek görbületére vezetik vissza, vagyis a bizonyos irányban érintkező gömb vizsgálatára.

A felületek görbületének elméletét Eulernek köszönjük. Ő mutatta ki, hogy a felület bármely pontjában, egymásra merőleges sikban fekvő, két érintő kör egyikének maximális, másikának minimális görbülete van. E két görbület sugarával, bármely más irányú sikmetszés görbéjének a kérdéses pontban való görbülete kifejezhető. Ha $r_1$ és $r_2$ az u. a. ponton átmenő normálmetszések maximális illetőlegesen minimális görbületsugarai és r oly normalmetszés görbületsugara, mely $r_2$ sikjával $\varphi$ szöget képez, úgy:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\varphi}{r_2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_1}$$

Ebből az olvasható, hogy ha egy tangentiális síkon oly ellipsist rajzolunk, melynek középpontja az érintési pont és melynek főtengelyei a maximális és minimális görbületet föltételező normalmetszések irányába esnek, és e főtengelyek hossza az éppen említett két görbület sugarából vont négyzetgyökkel egyenlő: úgy az említett pontban való görbülete bármely normálmetszésnek, mely az ellipsist egy átmérőben metszi, ez átmérő felének négyzetével egyenlő. Ez ellipsis hyperbolává lehet, ha a két főmetszés ellenkező irány felé domborodik; sőt parábolává is válhatik, ha a felületet egyenes vonal mozgásából származtathatjuk, vagy pedig ha a tekintetbe vett pont, inflexio-pont. — Euler művének teljességet Meunier tétele ad, amennyiben kapcsolatot alapít meg az egy ponton át menő összes görbéknek ezen pontban való görbülete közt. E tétel a következő: bármely ferde metszés görbületi sugara egyenlő az ugyanazon tangensen átmenő normálmetszés görbületi sugarának a ferde metszés sikjára való projectiójával. E két tétel együttvéve elégséges arra, hogy ugyanazon ponton át bármely irányban húzott sik görbéjének görbületét kifejezhessük a két fő-normálmetszés görbületével, vagyis lehetségessé teszi a felületet bármely pontjában a görbületi viszonyok vizsgálatát. — Ezzel kapcsolatos a felület görbületi vonalainak (lignes de courbure), vagyis azon vonalaknak tanulmányozása, melyek egyikének egymásután következő pontjaiban az érintő sikokra huzott normálisok u. a. síkban fekszenek. A felület minden pontjára nézve, átalában, két ily irány van, ezek a fő normál-metszetekkel összeesnek s igy egymásra merőlegesek. Könnyen megtalálhatók e görbületi vonalak a henger- és kúpfelületeknél. — E kérdéssel áll szerves kapcsolatban a görbületi felületek (surfaces de courbure) vizsgálata, melyek alatt a főmetszetek görbületi középpontjainak mértani helye értendő.

Befejezésül a kettős görbületű görbéket (courbes à double courbure) kell fölemlíteni. A kettős görbületű görbének egy pontbani érintője úgy tekinthető, mint azon két érintő sik átmetszése, melyeket az érintési pontban huzunk a két felülethez, melyek átmetszéséből a kettős görbületű görbe származik. Ha a görbe egyenlete két sikra való projectiója által van megadva, úgy az egymást metsző felületek hengeralakuak.

Az e fajta görbék vizsgálata más ismerethez is vezet. Mivel az egymásra következő elemek nem fekszenek egy síkban, definiálni kell, mit értünk a görbe síkja alatt. A görbe síkja három egymáshoz végtelen közel, a görbén fekvő pont által definiált sík, melyet osculáló síknak is neveznek. Az első görbületet az ezen síkban fekvő, görkületi kör sugara definiálja. A második görbületet két egymás után következő osculáló sík hajlásszöge határozza meg. A második görbület megitélésére vezethet ama gömbnek sugara is, mely a görbe négy végtelen közel eső pontja által van meghatározva; a görbület u. i. e gömb sugarának reciproque értéke.

Az integrális számolással kapcsolatos kérdések két nemét különböztethetni meg: a felületek quadraturáját és cubaturáját.

A felületek quadraturájánál, az átalános differentiális egyenlet fölállítására, a fölületet síkrészekre kell fölosztva gondolnunk, oly végtelen közel álló négy sik által, melyek ketteje az $xz$, ketteje az $yz$ coordinatasikkal párhuzamos. A felületből kimetszett ily elemi résznek, mely egész terjedelmében az érintő sikban fekvőnek gondolható, horizontalis projectiója $dxdy$; ezt csak az érintősík és az $xy$ coordinatasík hajlásszögének cosinusával

$$\left(\sqrt{\frac{dz^2}{dx^2}+\frac{dz^2}{dy^2}+1}\right)$$

kell megszorozni s a fölület elemet kapjuk:

$$d^2S = dx\, dy \sqrt{\frac{dz^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dy^2} + 1}$$

Amennyiben az integratió megengedi, ezen differentiális egyenletből számitható ki bármely lapnak felülete, az integrálas határaira azonban különös gondot kell fordítani.

A görbe felületek által határolt köbtartalmak cubaturája úgy történik, hogy a köbtartalmat oly (egyszerűség kedvéért) egyenes parallebpipedonokból összetettnek gondolhatni, melynek alapja dxdy, magassága pedig, a kérdéses ponthoz tartozó verticalis ordinata. — Az elemi geometria egy legelemibb tétele nyujtja ilyen formán ezen átalános egyenletet:

$$d^2V = z dx\, dy,$$

melynek kettős integratiója, a határok figyelembe vételével a köbtartalom ismeretéhez vezet.

A három dimensios geometria philosophiai vizsgálatánál a felületeknek, azok természetén alapuló felosztásáról kell még megemlékeznünk, mely gondolat Monge-tól ered, s a geometriában Descartes és Leibnitz óta a legjelentősebb haladást jelzi.

A felületeknek felosztását a tudósok analog módon kisérlették meg, mint ez a görbe vonalaknál van. Newton azonban, a 3. fokú görbe vonal fajait keresvén, azokat 74-nek találta, melyek olyan különbözők, mint a másodfokú görbe három fajtája. Már a két változós negyedfokú átalános egyenletet nem is vizsgálták ily átalánosságban, melyben még lényegesen több fajta görbe foglaltatik. A három változós egyenletek fajtáinak száma természetesen még nagyobb, és még rohamosabban nő e szám a rendszám nagyobbodtával. Ez az oka, hogy a rendszám szerint való elemzést csak az első- és másodfokú felületeknél alkalmazzák.

A felületek jellemző tulajdonsága, származási módjukban áll. Ha ily értelemben a fölületek osztályozva vannak, a feladat oly analytikus relatiót fölfedezni, mely ezen abstract jellemvonást concrete magyarázza: ezt Monge megtette. Ő u. i. azt találta, hogy az u. a. származási mód által keletkező felületek jellemezvék, az érintő síknak, bármely pontban azonos tulajdonsága által. Ezen tulajdonságot analytikailag kifejezvén, a felület érintő síkjának átalános egyenlete szerint, oly partialis differentialis egyenlethez jutunk, mely az egy fajta felületek egész seregét magában foglalja. Igy pl. a henger felületek azon exclusiv jellemvonással birnak, hogy bármely pontjuk érintősikja párhuzamos a generatrix irányával. Ha a generatrix egyenletei: $z = \frac{x}{a} = \frac{y}{b}$, úgy az érintő sík föntebbi egyenletének tekintetbe vételével, (meggondolva, hogy *a*, *b* és $\frac{dz}{dx}$ $\frac{dz}{dy}$ a directrixhez illetőlegesen az érintősík normálisához tartozó irányszögek cosinusaival arányosak) az összes hengerfelületeket képviselő differentialis egyenlet:

$$a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} = 1$$

A kúpfelületeket az jellemzi, hogy minden érintősík a csúcson megy át. Ha a csúcs coordinátái *a*, *b*, *c*, úgy az összes képfelületeket képviselő differentiális egyenlet lesz:

$$(x - a) \frac{dz}{dx} + (y - b) \frac{dz}{dy} = z - c$$

A forgási felületeknél az érintő sík mindig merőleges a meridiansíkra. Ha tengelyűl a *z*-t választjuk, úgy az e fajta felületekhez

$$y \frac{dz}{dx}\ x \frac{dz}{dy} = 0$$

egyenlet tartozik.

Az említett kutatás, sok tekintetben fontosb eredményekhez vezetett, mint az annak előtte gondolható volt. Igy kitünt, hogy minden 3 változós homogen függvény, kúpfelületet képvisel, vagy meg lehet határozni a lefejthető felületen két pont közötti, legrövidebb vonalat a felületnek részletes meghatározása nélkül stb.

Mivel a különböző fajta görbe vonalak változatossága végtelenűl kisebb a felületekénél, az ily munka kevésbé fontos, de egyúttal sokkal nehezebb is, mert a felosztás alapjául szolgáló görbék fajai nincsenek alkalmas jellemvonásokkal megkülönböztetve. Ez az oka, hogy az emberi szellem először a felületeket osztályozta ily szempontból. Remélhető, hogy a görbékre is ki fog terjedni e beosztás, mint bizonyos parabola- és hyperbola- fajoknál máris láthatni; de mostanig még semmi átalános érvényű gondolat nincs, ily beosztás keresztülvitelére nézve.

**Ormay Lajos.**