Végh László

Frege és a Julius Caesar-probléma

„Hétezertizenhárom helyett például azt mondta, hogy *Máximo Pérez*; hétezertizennégy helyett azt, hogy *A vasút*; más számok helyett, hogy *Luis Melián Lafinur, Olimar, kén, treff, a bálna, a gáz, a kávéskanna, Napóleon, Augustín de Veida*. Ötszáz helyett azt mondta: *kilenc*.”[1]

1. Bevezetés

„Tudományos szerzővel aligha történhet kellemetlenebb dolog, mint az, hogy éppen befejezett munkája egyik alapját megrendítik.”[2] E szavakkal kezdi Frege a *Grundgesetze* II. kötetének előszavát, melyet a már nyomdában lévő műhöz fűzött hozzá utólag, miután megkapta Russell levelét. A *Grundgesetze* célkitűzése az aritmetika teljes logikai megalapozása. Az első kötet előszavában szilárdnak látszanak a logikai alapok, az egyetlen szépséghiba – melyet Frege ki is emel – az V. axióma. Ennek legfontosabb következménye: ha adott egy fogalmunk, akkor azt tárgyiasíthatjuk: e fogalom terjedelme objektumként kezelhető – tulajdonságokkal rendelkezhet, és változók kvantifikációs tartományába eshet.[3]

Russell levele egy ebből fakadó ellentmondásra világít rá. Tekintsük a következő fogalmat: „olyan tulajdonság, melyet nem állíthatunk a saját terjedelméről”, s legyen e fogalom terjedelme K – ez az V. axióma szerint létezik. Ha K a saját terjedelmébe tartozna, akkor ellentmondáshoz jutnánk, hiszen épp azok tartoznak ide, amelyek nem tartoznak önmagukhoz. Megfordítva, az is ellentmondásra vezetne, ha nem tartozna önmaga terjedelmébe.

Nem lehet tehát büntetlenül tárgyiasítani a fogalmak terjedelmét. *Solacium miseris, socios habuisse malorum*[4] – a matematika addigi megalapozására tett összes kísérlet implicit vagy explicit formában tartalmazta ezt az axiómát. Ezen ellentmondás Frege rendszerében kijavíthatatlannak bizonyul, s így végül le is mond fő céljáról: az aritmetika tisztán logikai alapokra való helyezéséről. A legfontosabb eszköz helytelennek bizonyult: miért vonta azonban maga után az eredeti cél lehetetlenségét?

[1] Borges, Jorge Luis: Funes, az emlékező. In uő: A *titokban végbement csoda.* Kriterion, Bukarest, 1978, 47–54. 52.
[2] Frege, Gottlob: *Logikai vizsgálódások.* Osiris, Budapest, 2000, 179.
[3] Az V. axióma valójában függvények értékmenetének azonosságáról szól. Ez a fogalom terjedelménél általánosabb kategória: a terjedelem a fogalom karakterisztikus függvényének értékmenetével lesz azonosítva. A dolgozatban lényegében csak a terjedelmek speciális esetét fogjuk vizsgálni: már ezek is magukban hordozzák az általános eset összes problémáját.
[4] I. m. 180.

Az aritmetika logikai megalapozásának alapvető gondolatait Frege a *Grundlagen*ben fejti ki, ezeket most nagyon vázlatosan összefoglaljuk. Világosan elhatárolódik a pszichologizmustól és minden olyan megközelítéstől, mely a számokat valamilyen szubjektív léttel ruházza fel. A számformulák kapcsán elveti, hogy azok valamilyen induktív, empirikus állítások lennének, ahogyan azt is, hogy nem igényelnek bizonyítást, hanem közvetlen szemléleti evidenciával rendelkeznek. A számosság nem az egyes tárgyak tulajdonsága, hanem fogalmakról állítható. „Hogyan lehet hát adott számunkra egy szám, ha se képzetünk, se szemléletünk nem lehet róla?”[5] Meg kell határozni azon mondatok értelmét, melyekben a szám előfordul. Ehhez először is meg kell adni az újrafelismerést kifejező mondatokat: hogyan tudjuk eldönteni, hogy két leírás ugyanazt a számot adja-e meg? Frege ehhez az általa Hume-elvnek nevezett kritériumot használja fel: az *F* fogalomhoz tartozó szám akkor ugyanaz, mint a *G* fogalomhoz tartozó szám, ha e két fogalom terjedelme között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés tehető.

Elégséges-e ez a meghatározás? A *Grundlagen* szerint nem: ennek alapján nem kapunk választ arra a kérdésre, hogy valamely *F* fogalomhoz tartozó szám azonos-e Julius Caesarral. A példa első látásra képtelenségnek tűnik, és szándékosan az is: tudjuk, hogy Julius Caesarnak nincsen rákövetkezője, ahogy egyetlen szám sem lépte át a Rubicont. Miben áll azonban ez a tudásunk? Frege célja éppen az, hogy a matematikát egy minden tapasztalatot megelőző, teljesen logikai alapra építse. Feltételezhetjük tehát, hogy valamilyen módon ismert számunkra a *Julius Caesar* szó jelentése, nem élhetünk azonban ilyen feltevéssel a számokról: a logikai megalapozás egy világos és körülhatárolt definíciót kíván. Felróható hát egy definíciónak minden olyan kérdés, amit nem tisztáz – s a Hume-elv alapján nem tudjuk eldönteni a fenti kérdést. A meghatározás nem rossz, hanem hiányos: van egy olyan többlet, amit ezen felül tudunk a számokról, amely azonban a Hume-elvből nem vezethető le. Ez készteti Fregét a számok explicit meghatározására, melyben az *F* fogalomhoz tartozó szám az „*F* fogalommal azonos számosságúnak lenni” fogalom terjedelmével lesz azonosítva. Ez alapján az egyes számok tisztán logikai alapon definiálhatók: a 0 az „önmagával nem azonos” fogalom terjedelmével azonos szám, az 1 az „$x = 0$” fogalomhoz tartozó szám, az 1 tehát az összes egyelemű halmaz összessége. „Feltételezem annak ismeretét, hogy mi egy fogalom terjedelme” – írja lábjegyzetben Frege. A *Grundgesetze* V. axiómája pontosan megadja nekünk, amire itt Frege csupán utal. Ennek alapján már szilárd alapra helyezte a számok fogalmát – e szilárdság azonban csak látszólagos, a Russell-paradoxon hatására összeomlik.

Ki lehetett volna kerülni valahogyan a túl erős és következményei miatt tarthatatlan V. axiómát? Egy számfogalomtól azt várjuk el, hogy alkalmas legyen a számlálásra, és az aritmetika alapvető törvényei levezethetőek legyenek róla. Amint Boolos kimutatta,[6] a *Grundlagen*ben szereplő levezetésekből a terjedel-

[5] Frege, Gottlob: *Az aritmetika alapjai*. Áron Kiadó, Budapest, 1999, 85.

[6] Boolos, George: The Consistency of Frege’s Foundations of Arithmetic. In J. J. Thomson (ed.): *On Being and Saying: Essays for Richard Cartwright*. MIT Press, Cambridge, Mass., 1987, 3–20.

mek használata kiküszöbölhető, és helyettesíthető a Hume-elvre való hivatkozással. Frege egy Russellhez írt levelében meg is fogalmazódik a gondolat, hogy az V. axióma helyett a Hume-elvet fogadja el, azonban, mint írja, ekkor ugyanolyan nehézségek merülnének fel, mint az V. axiómával kapcsolatban.[7]

E nehézségek megértéséhez először azt kell áttekintenünk, hogy Frege számára mit jelentett a definíció, és mi a viszonya az axiómákhoz – szembeállítva Hilbert és a formalizmus elképzeléseivel. A Julius Caesar-probléma bizonyos definíciófajták általános problémájaként jelenik meg.[8] Látni fogjuk, hogy ez a probléma valójában az V. axióma kapcsán is felmerül, és ezt a *Grundgesetze*-ben sem sikerül kielégítően megoldani. Továbbmenve, áttekintjük a szakirodalomban felmerült megoldási kísérleteket a Julius Caesar-problémára, és látni fogjuk, hogy a fregei elvárásoknak megfelelően valójában nem oldható meg. Nem egy technikai nehézséggel állunk szemben: úgy tűnik, hogy valójában a Hume-elv minden, amit a számokról tudhatunk, s ezt a határt nem lehet átlépni.

2. Definíciók

Mint a *Grundgesetze* I. kötetének előszava írja, a definíciónak semmiképpen sem szabad teremtő erőt tulajdonítani. Amikor definiálunk, nem egy új dolgot hozunk ezáltal létre, hanem nevet adunk valaminek. A definiálás, meghatározás szavak eredeti értelmében: határokat húzunk. Frege a definiálási tevékenységet a geográfuséhoz hasonlítja, aki a térképen határokat rajzol, és ezzel kijelöli azt, amit ezentúl Sárga-tengernek fog nevezni. A matematikai tevékenység eszerint a felfedezéshez hasonlatos – kérdés csupán az, hol van az a tenger, amelyen belül a matematikus részeket határolhat el. Miért nem inkább a feltalálóhoz hasonlíthatjuk a tevékenységét, mint Bolyai János írja édesapjának nem-euklidészi geometriája megalkotásáról: „a semmiből egy ujj más világot teremtettem” *(sic!)*.

Frege igen határozottan érvel az utóbbi hozzáállással szemben. A *Grundlagen* befejezése szerint a természetes számok logikai definiálásával még csak elkezdődött egy folyamat, amelynek majd az egész matematikára ki kell terjednie. Vegyük most adottnak és tisztázottnak a természetes számok fogalmát – mit mondhatunk például a negatív, illetve a komplex számokról? A természetes számokon a kivonás művelete nem mindenütt értelmezhető, mint *2 - 3* esetén, ezért számfogalmunkat kiterjesztjük az egész számokra. Ugyanígy, a valós számokon nem lehet négyzetgyököt vonni a negatív számokból, ezért bevezetjük a komplex számokat. Milyen alapon vezetjük be ezeket az új számokat, milyen garancia adható arra, hogy ez lehetséges?

Nem megoldás arra hivatkozni, hogy valamilyen új szimbólumokat vezetünk be, és azokkal végzünk formális műveleteket úgy, hogy megfeleljünk a

[7] Idézi Heck, Richard G. Jr.: *Julius Caesar and Basic Law V.* http://emerson.fas.harvard.edu/heck/pdf/JuliusCaesarAndHP.pdf, 2.

[8] A szakirodalomban valójában mást hívnak Julius Caesar-problémának, mint ahogyan ezt Frege eredetileg használja a *Grundlagen*ben. Julius Caesarról az 56. §-ban esik szó, a számosság-predikátumok definiálásakor; mégis, a problémát a kontextuális definíciók kapcsán szokták tárgyalni.

követelményeknek. Ennyi erővel azt is mondhatnánk: a valós számokon nem oldhatóak meg egyszerre az $x + 1 = 2$ és $x + 2 = 1$ egyenletek, de semmi akadálya annak, hogy kiterjesszük úgy a számfogalmat, hogy legyen egy közös megoldásuk. Persze ha ezt tennénk, nagyon rövid úton ellentmondáshoz jutnánk – ez a követelmény tehát kielégíthetelen. Honnan tudjuk azonban, hogy az egész, illetve komplex számok bevezetése nem fog végül szintén ellentmondáshoz vezetni?

Frege szerint a definíciók egy egyenlethez hasonlíthatók: akkor jó a definíció, ha egyértelmű megoldása van. Tekintsük most az alábbi három egyenletet: $x + 1 = 4$, $x + 4 = 1$ és $x^2 = 4$. Ha ismertek a természetes számok, az első egyenlet egyértelműen meghatározza a 3-at. A másodikkal már nehezebb helyzetben vagyunk: az egész számok körében ez jó meghatározás a –3-ra, de amíg nincsenek valami módon adva az egész számok, addig nem tudjuk, hogy ennek létezik-e megoldása, illetve egyértelmű-e. A –3-ról tehát kell valami előzetes tudásunk legyen, hogy ezzel az egyenlettel be tudjuk azonosítani. Ha csupán a természetes számok körében mozgunk, a harmadik egyenlet egyetlen megoldása a 2, de az egész számok körében már a –2-vel is számolnunk kell. Egy egyenlet megoldhatóságáról és egyértelműségéről tehát akkor beszélhetünk, ha már ismert az a tartomány, ahonnan a megoldást választani szeretnénk. Ugyanezt az elvárást állítja Frege a definíciók iránt is: valamilyen már adott tartomány egy elemét lehet velük kijelölni. A negatív és a komplex számok bevezetésével ez a baj – s mint látni fogjuk, a természetes számok formalista meghatározásával is.

2.1. Konzisztencia versus egzisztencia

A geometria hagyományos euklidészi felépítésében a definíciók lényegében olyan szerepet töltenek be, mint Fregénél: adottak a geometria alapfogalmai és axiómái. Ezek felhasználásával tudjuk definiálni a háromszög fogalmát vagy a szögfelezőét, a definíció ténylegesen egy névadási aktus. Mindez azon alapul, hogy már adott számunkra a tér, amelynek bizonyos alapvető tulajdonságait fejezik ki az axiómák. A geometria tárgya, a tér Kantnál szemléletünk egyik tiszta formája. A geometria tehát *a priori* szintetikus ismeret: minden tapasztalattól függetlenül létezik, igazságainak belátásához azonban a logika mellett még a tiszta térszemléletet is igénybe kell venni. Az euklidészi axiómákat nem tetszőlegesen választjuk, hanem legegyszerűbb, tovább már nem elemezhető szemléleti ismereteinket fogalmazzák meg.

A 19. században a nem-euklidészi geometriák megjelenése igen komoly következményekkel járt erre a koncepcióra nézve. A párhuzamossági axióma kicserélésével meg tudtak adni ugyanis olyan más rendszereket, amelyek szintén joggal tarthattak igényt a geometria elnevezésre, noha nem voltak az euklidészihez hasonlóan a szemléletre alapozva.

Ennek hatására az axiómák fogalma is megváltozott: kezdtek úgy tekinteni rájuk, mint amelyek nem alapvető igazságokat fogalmaznak meg, hanem egy struktúra leírását adják. Sokkal inkább definícióként foghatók fel, de nem a hagyományos értelemben: nem a már meglévő létezőkhöz való viszonylatban rögzítjük egy új fogalom jelentését, hanem egyszerre sok új objektumot vezetünk be, amelyeknek az egymáshoz való kapcsolatait rögzítjük. Egy hasonlattal élve: a hagyományos definíció olyan, mint amikor meg akarunk jelölni egy beszélgetés során egy személyt, és úgy hivatkozunk rá, mint egy bizonyos barátunkra. A másikfajta definíció egy regényhez hasonlítható, ami által egy, a mienktől független világba nyerünk betekintést. Ismerjük a szereplők egymáshoz való viszonyait, leírásokat kapunk a személyekről és történésekről. Többet tudhatunk meg ezáltal valakiről, mint beszélgetőpartnerünk ismeretlen barátjáról. Mégis, a regény alapján gyakran nem tudjuk eldönteni, hogy fikcióval van-e dolgunk, vagy pedig tényleges személyek és történések leírásával.

A hasonlat félrevezető: míg az emberek kapcsán feltehető a kérdés, hogy ténylegesen léteznek-e a világban vagy a képzelet szüleményei, matematikai objektumok esetében ez a kérdésfeltevés igen problémás. Van azonban egy formai kritérium, amelyet regényeken vizsgálhatunk: mennyire valószerű, vagyis elképzelhető lenne egy olyan világ, ahol mindez megtörténhet? Axiómarendszerek kapcsán ez a kérdés úgy fogalmazódik meg, hogy logikailag konzisztens-e a rendszer: levezethető-e benne ellentmondás.

Hilbert számára a matematikai létezés éppen ezt jelenti: ha adott egy axiómarendszer, annak konzisztenciája elégséges alap arra, hogy az általa leírt létezőket legitimnek fogadjuk el. A geometriai axiómarendszerek konzisztenciáját Hilbert úgy bizonyítja, hogy visszavezeti őket a valós számok elméletére: a pontokat descartes-i koordinátáikkal, az egyeneseket és síkokat egyenletekkel adja meg, és bebizonyítja, hogy ez a rendszer konzisztens. Feltéve persze, hogy tudjuk a valós számok elméletének konzisztenciáját.

Frege szerint a geometria konzisztenciáját bizonyítani teljesen fölösleges. Ennek kapcsán egyértelműen Kant követője: a geometria szintetikus a priori tudomány, forrása a tér szemlélete. Kitüntetett szerepe van tehát a nem-euklidészi geometriákhoz képest: ez utóbbiak konzisztenciájára rákérdezhetünk, s az bizonyítható is, méghozzá úgy, hogy a hagyományos euklidészi geometriában modellezhető.

Shapiro kifejezésével élve, Frege számára az igazi axiómarendszerek asszertorikusak, létezők egy adott tartományát írják le, Hilbert axiómarendszereit pedig algebraiaknak nevezi.[9] Elnevezésének motiválására tartsuk szem előtt az olyan algebrai struktúrákat, mint a csoportok. A csoportaxiómák egy bizonyos típusú művelettel ellátott struktúrák. Ezeket számos, lényegesen különböző szerkezetű struktúra is kielégíti, mint az egész számok az összeadásra vagy a véges csoportok. Az axiómák tehát nem bizonyos létezők alapvető tulajdonságait gyűjtik össze, hanem egy olyan feltételrendszert képeznek, melynek kielégíthetősége és egyértelműsége kérdéses lehet.

Az aritmetika ilyen értelemben vett algebrai leírását a Peano-axiómák adják, amelyek Dedekind *Was sind und was sollen die Zahlen?* című írására vezethetők vissza.[10] Természetes számok alatt egy N halmazt kell értenünk, melynek van egy kitüntetett eleme, a 0, és definiálva van a rákövetkezés művelete, melynek jele $'$. Ezekre az alábbi Peano-axiómáknak kell teljesülniük, mai megfogalmazásban:

[9] Shapiro, Stewart: Categories, Structures, and the Frege-Hilbert Contorversy: The Status of Meta-Mathematics. *Philosophia Mathematica,* 2005/13, 51–77.
[10] Dedekind, R.: *Was sind un was sollen die Zahlen?* VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1967.

$0 \in N$
minden $x \in N$-re $x' \in N$
nincsen olyan $x \in N$, melyre $x'=0$
ha $x'=y'$, akkor $x=y$
(teljes indukció) minden jól formált φ formulára ha $\varphi(0)$ és $\forall x(\varphi(x) \rightarrow \varphi(x+1))$, akkor $\forall x \varphi(x)$[11]

2.2. A priori szintetikus tudomány-e az aritmetika?

Frege számára egy ilyen meghatározás elfogadhatatlan, mivel megalapozatlan. Honnan tudjuk, hogy létezik valami, ami kielégíti ezt az axiómarendszert? Kant nyomdokain haladva kézenfekvő lehetőség, hogy az algebrát a geometriához hasonlóan mentsük meg. Kant számára mindkettő az *a priori* szemléletek tiszta tudománya: a geometria a téré, az aritmetika pedig az időé. Frege itt lényegesen mást gondol: számára az aritmetika analitikus ismeretekből áll, a logika része.

Kant szerinte két dologban téved, melyeket most csak a felszínen érintünk. Egyrészt, az ítélet analitikussága nem a magától értetődőség szinonimája, mint abban az esetben, hogy „Minden test kiterjedt".[12] A következtetés logikai szükségszerűsége nem a triviális következményekre korlátozódik, sőt, az érdekes esetekben nem is az: „ilyenkor egyszerűen nem azt húzzuk elő a dobozból, amit beledugtunk".[13] Másrészt, az aritmetika nem származtatható az idő szemléletéből, ami ellen Frege legfontosabb érve, hogy magasabb szükségszerűséggel bír. Még ha egészen más szemléleti feltételek között élnénk, például időn kívül, pusztán a teret szemlélve, akkor is értelmes és szükségszerűen igaz lenne az az állítás, hogy a háromszög oldalainak száma három.

Frege gondolkodásában a nem-euklidészi geometriák arra mutatnak rá, hogy a geometria valóban szintetikus ismereteket tartalmaz, amelyekről logikailag elképzelhető, hogy máshogy is lehetnének – csak éppen a mi tapasztalatunk lehetőségfeltételei között ezek igazak. Számára ez a lényegi különbség a geometria és az aritmetika között.

2.3. A konzisztencia bizonyíthatósága

Egy axiómarendszer konzisztenciáját természetesen bizonyítja, ha meg tudunk adni egy őt kielégítő modellt. Ez a modell azonban ismét valamilyen matematikai struktúrába lesz ágyazva,[14] s így ezzel csupán relatív konzisztem-

[11] Az utolsó axióma csak másodrendű nyelven fogalmazható meg, mivel formulák fölött kvantifikálunk. A szokásos algebrai műveleteket, az összeadást, szorzást a másodrendű nyelvben definiálni tudjuk. Elsőrendű nyelv használata esetén ezt egy végtelen sok axiómát megadó axiómaséma helyettesíti, és további axiómákkal kell az összeadást és a szorzást bevezetni.
[12] Kant, Immanuel: *A tiszta ész kritikája*. Ford. Kis János. Atlantisz Kiadó, Budapest, 2004, 59.
[13] Frege: *Az aritmetika alapjai*. Id. kiad. 111.
[14] Nem mindig. A számok mint „végtelen progresszió" definíciójához Dedekind egy nem matematikai, hanem pszichológiai példát hoz fel, rámutatva arra, hogy létezik

ciát tudunk igazolni: feltéve, hogy az egyik rendszer konzisztens, belátjuk, hogy a másik is az.

A formalizmus szigorúbb megalapozásához viszont abszolút konzisztencia bizonyítására volna szükségünk: valami olyan módon igazolni egy rendszer ellentmondásmentességét, ami már önmagában nem szorul további megalapozásra. Ehhez a bizonyíthatóság fogalmának a matematizálhatóságára van szükség. Egy olyan, tisztán logikai rendszert kellene adni, amelyben formálisan megfogalmazható, mit jelent adott axiómák következményének lenni, s amelyben e fogalmat elemezve bizonyítható, hogy a rendszer ellentmondásmentes. Ez tehát olyan arkhimédészi pontja lenne a matematikának, melyre az egész szilárdan felépíthető. Hilbert kései gondolkodásában ez mint finit bizonyításelmélet jelenik meg,[15] kivételezett meta-matematikai területként: nem egy algebrai értelemben vett axiómarendszer a sok között, hanem asszertorikus, valódi tartalommal rendelkezik. A meta-matematika tételei nem olyan szerkezetűek, mint „minden háromszög szögeinek összege 2π", hanem „ha ezeket az axiómákat tesszük fel, akkor ez a tétel következik belőlük"; egy ilyen állítás valamilyen abszolút értelemben vett igazságra tart igényt.[16]

A 20. század legfontosabb logikai eredménye éppen ennek az elvárásnak az ellenkezője: nem egy ilyen vonatkoztatási pontot sikerült megadni, hanem éppen fordítva: az bizonyítható, hogy ilyen vonatkoztatási pont nem is létezhet. Vegyünk ugyanis egy olyan rendszert, amelyben a következtetés formalizálható. Lényegében a természetes számok fogalmára van szükség ahhoz, hogy a rendszerben levezethetők legyenek a Peano-axiómák. Tegyük fel, hogy van egy ilyen „abszolút értelemben vett" matematikai tudásunk. Gödel II. nemteljességi tétele éppen azt mondja ki, hogy ez nem írható le axiomatikusan: „Lehetetlen, hogy valaki axiómák és tételek egy jól definiált rendszerére rámutatva a következőt állítsa: mindezen axiómákat és szabályokat (matematikai bizonyossággal) helyesnek tartom, s meggyőződésem szerint az egész matematikát magukban foglalják. Ha valaki ezt állítja, saját magának mond ellent."[17] Ugyanis a rendszer konzisztenciáját kimondó állítás a rendszeren belül nem bizonyítható. Ha tehát valaki az összes axiómát igaznak tartja, akkor valamilyen módon meg kell legyen győződve a konzisztenciájukról – ekkor azonban a megadott rendszer nem meríti ki teljes matematikai tudását.

Pusztán formális alapokon tehát soha nem leszünk képesek abszolút értelemben igazolni a természetes számok rendszerének konzisztenciáját, ami a for-

az axiómákat kielégítő rendszer. Induljunk ki önmagunkból („*mein eigenes Ich*"), és x rákövetkezője legyen az a gondolat hogy x a gondolkodásom tárgya lehet. Frege számára egy ilyen pszichológiai közelítés elfogadhatatlan.

[15] Ezekről bővebben lásd Csaba Ferenc bevezetőjét *A matematika filozófiája a 21. század küszöbén* című kötethez (Osiris, Budapest, 2003), illetve Shapiro már idézett tanulmányát.

[16] Gödel *Néhány tétel a matematika megalapozásáról és ezek következményei* című tanulmányában ugyanezt fogalmazza meg. Lásd Gödel, Kurt: Néhány tétel a matematika megalapozásáról és ezek következményei. Ford. Csaba Ferenc. In Csaba Ferenc (szerk.): *A matematika filozófiája a 21. század küszöbén*. Id. kiad. 61–88.

[17] Gödel: i. m. 67.

malista értelemben a létezésükkel ekvivalens. Mindez Frege definíciós elvárásaira nézve is súlyos következményekkel jár. Ő a Peano-axiómák kielégíthetőségét nem konzisztencia-bizonyítás által, hanem a számok konkrét logikai objektumokként való megadásával akarta bizonyítani. Ezek a tisztán logikai objektumok azonban szükségszerűen a matematika területén belül maradnak – Fregénél ráadásul az V. axiómára épülő naiv, inkonzisztens halmazelméletben. Választhatnánk azt, hogy a halmazelmélet mai felépítését fogadjuk el megalapozásként. Milyen alapunk lehetne erre? Frege számára saját axiómái logikai evidenciáknak tűntek – amint bebizonyosodott, nem voltak azok. A naiv halmazelmélet kudarca után adott felépítések közös vonása, hogy nem lehet egyszerre az összes halmazt megadni: bizonyos konstrukciós lépésekkel nyerhetünk meglevő halmazokból továbbiakat. Egyes axiómák – mint a kiválasztási axióma – erősen megosztották a matematikus-közösséget, és voltak, akik számára nem is volt elfogadható. Egy ilyen halmazelméletet alapvető logikai rendszerként elismerni tehát sokkal problematikusabbnak tűnik, mint ha az aritmetika megalapozását célként kitűzve már a Peano-axiómáknál megállnánk.

3. Kontextuális definíciók

Az előző részben láttuk, miért nem fogadható el Frege számára egy olyan megközelítés, ahol a természetes számokat mint az aritmetika axiómáit kielégítő struktúrát határozzák meg. A definíciók iránt állított igen szigorú fregei követelményekkel erősen szembenállni látszik a *Grundlagen*-ben szereplő kontextuális definíciótípus. A motiváció az absztrakt objektumok meghatározása. Ezeket nem tudjuk a mondatokból kiragadva önmagukban meghatározni, ezért azon újrafelismerési tételeket adjuk meg, amelyek alapján ugyanazt a tárgyat más módon megadva azonosíthatjuk. Absztrakt objektumaink bizonyos tárgyakhoz vagy fogalmakhoz lesznek rendelve, *a*-hoz D(*a*). A kontextuális definícióhoz adott egy R(*a*,*b*) reláció, amelynek fennállását közvetlenül ellenőrizni tudjuk. A definíció általános formája:

$D(a)= D(b) \leftrightarrow R(a,b)$

Azt állítom, hogy a kontextuális definíciókkal kapcsolatban ugyanazok a problémák fogalmazhatók meg, mint amelyeket Frege a kreatív definíciók ellen felhoz.[18]

Nézzünk először példákat! A bevezetésben láttuk, hogy a Hume-elv a számosságokat milyen módon rendeli a fogalmakhoz, ahol az R reláció akkor áll fenn, ha kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés adható a két fogalom alá tartozó tárgyak között. A 64. §-ban rögtön látunk egy másik példát is: az irány definícióját. Azt mondjuk, hogy az *a* egyenes iránya azonos a *b* egyenes irányával, ha *a* és *b* párhuzamosak. A geometria tárgyai szemléletileg megjeleníthetők – mint

[18] Ingadozunk a „kreatív definíció”, „implicit definíció” és „algebrai axiómarendszer” elnevezések között; ezek lényegében mind ugyanazt fejezik ki.

láttuk, Frege számára a geometria szintetikus *a priori* tudomány. Adott számunkra, hogy mi egy egyenes, arról azonban nincsen szemléletünk, hogy önmagában mi egy irány.

A kreatív definíciókkal kapcsolatban az egyik fontos probléma az volt, hogy nem feltétlenül van valami, ami kielégítené őket. Ugyanez egy tetszőleges kontextuális definícióval is megeshetne. Ha például az egyenesek irányának definiálásakor R(*a*,*b*) a párhuzamosság helyett a merőlegességet jelentené, akkor azt kapnánk, hogy egy egyenes iránya nem azonos önmagával, hiszen egy egyenes nem merőleges önmagára. Legalábbis annak teljesülnie kell, hogy R(*a*,*b*) egy ekvivalencia-reláció. Ez a párhuzamosságra igaz is, az egyenesek egyes ekvivalencia-osztályaihoz rendelünk valamit, és ezt hívjuk iránynak. A feltétel eléggé természetesen elégségesnek is tűnik – ám látni fogjuk, valójában nem az.

Egyenesek esetén ilyen hozzárendelés megadható, problémát jelent viszont, hogy a hozzárendelés nem egyértelmű. Jó reprezentánsok lennének az origón áthaladó egyenesek, csakúgy, mint az egységgömb pontjai, vagy esetleg valami egészen más jellegű objektumok. Ezen a ponton lép elő a Julius Caesar-probléma: nem tudjuk eldönteni, hogy a Föld tengelyének iránya ugyanaz-e, mint Anglia.

Az egyik lehetőségünk az, amit Frege a 67. §-ban elvet: az irányt csak abban az értelemben használjuk, amire ebben a definícióban bevezettük. Vagyis irányról csak olyan értelemben beszélhetünk, ha az „*a* egyenes iránya azonos a *b* egyenes irányával" mondatban szerepel, ezt helyettesítjük azzal, hogy „*a* párhuzamos *b*-vel".

Túlzó lenne ilyen korlátozást szabni a definíciók használatának. Ekkor az egyenlőség annyit jelenthetne, hogy ami ugyanúgy van adva, arról felismerjük, hogy ugyanaz. A 4-et definiálhatnánk úgy is, hogy „1 + 1 + 1 + 1", illetve úgy, hogy „2 + 2". Amennyiben a definiálás módja a 4-nek tulajdonsága lenne, e két módon két különböző számhoz jutnánk. Ezáltal éppen azt ragadnánk meg, amit Kant ért analitikus ítélet alatt: olyan valamit állítunk az alanyról, ami a fogalmában eleve bennefoglaltatik. A definíció azonban nem lehet tulajdonsága a tárgynak: csupán egy jel jelentését rögzíti; egy olyan ítélet a tárgyról, amely egyértelműen kiválasztja azt a többi tárgy közül.[19]

Elvileg tehát jogosultnak kell lennie annak a kérdésnek, hogy az *a* egyenes iránya azonos-e valamely *q* tárggyal. Feltéve persze, hogy az irányokra tárgyként gondolunk. Elképzelhető lenne ugyanis, hogy az összes olyan mondatot, amelyben az „irány" szó szerepel, át tudjuk alakítani olyan mondatokká, amelyekben csupán párhuzamosságokról szóló állítások szerepelnek. Az irányokat puszta nyelvi látszat tüntetné fel tárgyakként. Problémát jelentenének ekkor például az égtájak nevei: az Észak saját tulajdonnévvel rendelkező irány. Számosságok esetén pedig sokkal komolyabb nehézségekbe ütköznénk, mint majd látni fogjuk.

Ha tárgyként akarjuk meghatározni az irányokat, meg kell mondani, pontosan mely tárgyakra gondolunk. Az egyik lehetőség, hogy kiválasztunk egy-egy tetszőleges reprezentánst a párhuzamosság minden ekvivalencia-osztályának: például egy bizonyos ponton átmenő egyenesek. Néhány egyenesre tehát igaz volna, hogy azonosak saját irányukkal, néhányra pedig nem. Felvetődhet viszont a kér-

[19] Frege: *Az aritmetika alapjai.* Id. kiad. 90.

dés, miért éppen azokat a reprezentánsokat választottuk ki, és nem valami mást. A strukturalista válasz[20] szerint ez mindegy, mivel releváns tulajdonságaik ugyanazok – értelmetlen az irányokról mint teljesen meghatározott tárgyakról beszélni, csupán bizonyos tulajdonságok hordozóiként hivatkozhatunk rájuk. A Frege által javasolt megoldás ezt az önkényt küszöböli ki: az *a* egyenes iránya legyen a „párhuzamos az *a* egyenessel" fogalom terjedelmével azonosítva, vagyis az ekvivalencia-osztály egészével. Ekkor az irányok egymással párhuzamos egyenesek halmazai lesznek. E megoldás a geometriában alkalmazható, a számokra azonban nem – az összes 3 elemű halmaz halmaza nem értelmezhető.

A Julius Caesar-probléma tehát azt fejezi ki, hogy a kontextuális definícióval még nem rögzítettük elégségesen a definiált tárgyak jelöletét. Mégis, a számosságok esetében a kontextuális definíció központi jelentőségű: mint a bevezetésben írtuk, az algebra alaptételei a Hume-elvből levezethetőek; lényegében mindazt, amit a számokról tudunk, a Hume-elvből tudjuk. Amikor tehát további definíciót keresünk, akkor azt nem a kontextuális helyett, hanem annak alátámasztása érdekében tesszük. A terjedelmeken alapuló számdefiníció megadásakor azonban Frege egy másik kontextuális definícióra hivatkozik, s ily módon csak görgeti maga előtt a problémát.

3.1. A Julius Caesar-probléma az V. axióma kapcsán

Az V. axióma formailag szintén egy kontextuális definíció. Nem fogalmak terjedelmét, hanem általánosabban, függvények értékmenetét határozza meg, ami a függvény tárgyiasítása. A fogalmak olyan speciális függvényként vannak értelmezve, melyek egy individuum-változóhoz egy igazságértéket rendelnek, s ennek értékmenete a fogalom terjedelmének felel meg. Általánosabban, többváltozós függvények esetén az értékmenet a hozzárendelési szabályt testesíti meg. Egy *F* függvény értékmenetét $\hat{x}Fx$ jelöli, s két függvény értékmenete akkor azonos az V. axióma szerint, ha minden behelyettesítésre azonos értéket adnak:

$$\hat{x}Fx = \hat{x}Gx \leftrightarrow \forall x\ F(x)=G(x)$$

Láttuk, hogy a kontextuális definícióban szereplő relációnak szükségképpen ekvivalencia-relációnak kell lennie. Ez a követelmény már elégségesnek tűnhet: minden ekvivalencia-osztályra válasszunk ki egy tetszőleges elemet, és legyen az osztály minden *a* elemére D(*a*) ezzel a kitüntetett elemmel azonos. Eszerint tehát az értékmenetek is definiálhatók lennének, a gond csak abból fakadhatna, hogy a definíció nem egyértelmű. A gondolatmenet hibás volta abból következik, hogy nem tiltottuk meg, hogy a definícióban szereplő *a* definiálása során felhasználjuk D(*a*)-t. Emiatt a hozzárendelés még úgy sem létezik feltétlenül, ha ekvivalencia-relációnk volt, mivel D(*a*)-t önmaga felhasználásával definiáltuk.

Esetünkben D(*A*) az *A* fogalom terjedelmét jelöli. A Russell-paradoxonban az a *K* szerepel, amely azon D(*A*) tárgyak tulajdonsága, melyekre *A* nem igaz D(*A*)-ra. A definícióban azonban *A* helyére *K*-t is helyettesíthetnénk. Russellnél

[20] Részletesebben lásd az 5. részben.

a „*vicious circle principle*" éppen az ebből fakadó ellentmondásokat hivatott kiküszöbölni. Impredikatívnak nevez egy olyan definíciót, amely egy őt magát is elemként tartalmazó tartomány fölött definiál. Russell típuselméletének fő célja az ilyen definíciók kiküszöbölése, amiről a 2. alrészben ejtünk néhány szót.

Visszatérve Fregéhez, a Julius Caesar-probléma az V. axióma kapcsán is felvethető. Frege ezt a *Grundgesetze* I. kötetének 10. §-ában vizsgálja is, valódi megoldást azonban nem sikerül adnia.[21] Kérdés, hogy miként tudjuk megkülönböztetni az értékmeneteket más tárgyaktól. A Frege által vizsgált konkrét kérdés: a két igazságérték, az „igaz" és a „hamis" kitüntetett objektumokként szerepelnek a rendszerben – hogyan tudjuk eldönteni, hogy ők értékmenetek vagy sem?

Frege megoldási stratégiájának lényege: a különbségtételt kerüljük ki azáltal, hogy mindent értékmenetként kezelünk. Az V. axiómával összhangban megengedhető, hogy az „igaz" és a „hamis" tetszőleges függvény értékmenetével azonosítva legyenek. A legtermészetesebb megoldás, ha az igazat azon függvény értékmenetével azonosítjuk, mely egy állításhoz az igazságértékét rendeli hozzá; a hamisat pedig azzal, mely a tagadását.

Ezzel a konkrét esetet megoldottuk. Mit mondhatunk általában? Célszerű lenne minden objektumot értékmenetként kezelni: minden tárgy legyen azon fogalom terjedelmével azonosítva, amely alá ő és csak ő esik. Ez egyedi tárgyaknál gond nélkül megtehető – fogalmak esetén azonban nem végezhető el. Eszerint az „ember" fogalom terjedelmét azonosítani kellene „az ember fogalom terjedelmével azonosnak lenni" fogalom terjedelmével – ez azonban képtelenség. Hiszen az „ember" fogalom terjedelmébe rengetegen tartoznak, míg az utóbbi terjedelem egyetlen objektumot foglal magába.

Azt kellene tehát gondolnunk, hogy azon objektumokat, amelyek nem eleve értékmenetként adottak, azonosítsuk az őket leíró fogalom értékmenetével. Ez azonban Frege rendszerében nem kivitelezhető: ekkor a definiálás módját a dolog egy tulajdonságának tekintenénk. Mint fentebb említettük, ez lehetetlen: a definíció pusztán egy jel jelöletét rögzítheti.

Felmerül természetesen a kérdés, hogy amennyiben az V. axióma éppen olyan fogyatékosságokkal rendelkező definíció, mint a Hume-elv – ráadásul rossz definíció –, akkor mégis mi szükség volt rá? Miért nem maradt meg Frege a Hume-elvnél? Ennek oka az, hogy Frege az V. axiómát nem kontextuális definíciónak tekintette – hanem alapvető logikai igazságnak. Valódi axiómának, olyan értelemben, mint a geometria euklidészi axiómái. A fogalmak és értékmenetek adottak számunkra: az axióma ezeknek rögzíti egy egyszerű tulajdonságát. Ahogy a *Grundgesetze* I. kötetének bevezetőjében fogalmaz: „[...] mivel ezt így talán még nem fogalmazták meg a logikusok, noha mikor pl. a fogalmak terjedelméről beszélnek, eszerint gondolkodnak. Én ezt tiszta logikai törvénynek tartom. Mindenesetre ez az a hely, ahol dönteni kell."[22]

21 Az itt következő elemzés Heck idézett tanulmányának nyomdokain halad.

22 Frege: *Logikai vizsgálódások*. Id. kiad. 149.

3.2. Az V. axióma után

Az ellentmondások kikerülésének érdekében Russell és Whitehead a *Principia Mathematicá*ban a „*vicious circle principle*" szellemében eljárva megtiltják a korlátlan hatókörű kvantifikációt. Ennek eszköze egy típuselmélet bevezetése, ahol az objektumok hierarchikus struktúrába vannak rendezve. Az alapvető objektumokból kiindulva, a soron következő típus fogalmai az alatta levők segítségével definiálhatók, és csak az alacsonyabb szintek felett tudunk kvantifikálni. Ily módon kikerülhető, hogy fogalmak önmagukra hivatkozva legyenek meghatározva. Ez a megközelítés sem tudta kielégíteni a logicizmus eredeti elvárásait, olyan, logikán kívüli előfeltevései miatt, mint a végtelenségi és a reducibilitási axióma.

A Zermelo- és Fraenkel-féle halmazelmélet a Russell-paradoxon okozta ellentmondást azzal küszöböli ki, hogy nem lehet minden terjedelmet individualizálni. Az individualizált terjedelmek lesznek a halmazok. Az axiómák bizonyos konstrukciós lépések és műveletek, melyek segítségével meglévő halmazokból állíthatunk elő újakat. Lesznek azonban olyan fogalmak, melyeknek nem feleltethető meg halmaz, az ilyeneket valódi osztályoknak hívjuk, ilyen például az összes halmaz osztálya. Halmazok lehetnek más halmazok és osztályok elemei, a valódi osztályok esetében azonban ez nem lehetséges.

Fontos kiemelnünk, hogy a számosságok a halmazelméletben is a Hume-elvvel vannak jellemezve. Valójában nem is használunk fel belőlük többet, mint amit a Hume-elv mond: további definícióra – Frege gondolkodásához hasonlóan – csupán a kontextuális definíció megalapozása miatt van szükség. Egyenesek irányának definiálásához lehetséges volt egy kitüntetett ponton áthaladó egyeneseket választani. Neumann János nyomdokain haladva a halmazelmélet számosság-definíciója is ilyen: minden ekvivalencia-osztályból kiválasztunk egy konkrét halmazt, és az lesz az osztály elemeinek számosságával azonosítva. Ekkor a természetes számok a

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\}\},\ \ldots$$

halmazok lesznek. Az ezzel kapcsolatban felmerülő problémákat az 5. részben tárgyaljuk.

4. Megoldási kísérletek a Julius Caesar-problémára

A következőkben azokat a megoldási kísérleteket vesszük sorra, amelyek szerint Fregének meg kellett és lehetett volna állnia a Hume-elvnél, méghozzá úgy, hogy a Julius Caesar-probléma sem okozott volna neki gondot. Pusztán a Hume-elv felhasználásával próbálják tehát a számokat világosan elhatárolni az összes többi objektumtól. Ez alatt azt értjük, hogy valamilyen megfogható és ellenőrizhető kritériumunk van arra, mi számít számnak, és mi nem.

A hétköznapi nyelvhasználatban többféle értelemben találkozhatunk a számokkal. Vannak egyrészt olyan állításaink, hogy „$2 + 2 = 4$", másrészt olyanok, hogy „Az asztalon két kavics van". Az előbbi az aritmetikai állításokat jelenti, az utóbbi pedig a számok számlálásra való alkalmazhatóságát. Mint láttuk, számosságot nem egyes tárgyakhoz, hanem fogalmak terjedelméhez rendeltünk, a második példamondatot tehát így kellene precízen mondani: „»az asztalon lévő kavics« predikátum két tárgyra igaz”, vagy „»az asztalon lévő kavics« predikátumhoz hozzátartozik a 2 szám”.

Lényeges különbség áll fenn az aritmetikai állítások és a számosságokra vonatkozó állítások nyelvtani szerkezete között. A második példamondatban valamiről azt állítjuk, hogy „a 2 szám tartozik hozzá”, az elsőben pedig a 2 mint tárgy jelenik meg. Melyiket kell mármost az elsődleges használatnak tartanunk?

Gondolhatjuk egyrészt azt, hogy a 2 egy tárgy, és a második mondat egy fogalom és e tárgy közötti relációt fejez ki. Másrészt elképzelhető, hogy a 2 valójában „a 2 szám tartozik hozzá” másodrendű predikátum rövidítése, és „2 + 2 = 4” az alábbi, igen körülményes mondat helyett áll: „ha az *F* fogalomhoz és a *G* fogalomhoz is a 2 szám tartozik, és semmilyen *x*-re nem teljesülhet egyszerre *F* és *G*, akkor az $F \vee G$ fogalomhoz a 4 szám tartozik”. Ez esetben a számok csak látszólag lennének tárgyak, de minden ilyen előfordulásuk kiküszöbölhető.

4.1. A számok, ha predikátumok

Vizsgáljuk meg először azt a kérdést, értelmezhetők-e a számok egyszerűen másodrendű predikátumokként. A *Grundlagen* 55. §-ában, a számok első definiálási kísérletében Frege a számokat látszólag ilyen értelemben próbálja bevezetni.

Egy *F* fogalomhoz akkor tartozik a 0 szám, ha semmilyen *a*-ra nem igaz *Fa*. Az 1 akkor tartozik *F*-hez, ha létezik olyan *a*, melyre *Fa*, és amennyiben az *a* és *b* tárgyakra mind *Fa*, mind *Fb* teljesül; így *a* és *b* azonosak. Ezután kézenfekvőnek tűnik az alábbi definíció: *F*-hez az n + 1 szám tartozik, ha van olyan *a*, melyre *Fa*, és az „*F* alá esik, de nem *a*” fogalomhoz az *n* szám tartozik.

Mégis, noha „ezek a megoldások olyan magától értődőnek tűnnek eddigi eredményeink alapján”,[23] az 56. §-ban számos, első látásra homályos probléma merül fel.

> „[...] szigorúan véve az »az *F* fogalomhoz az n szám tartozik« kifejezés értelme éppúgy ismeretlen számunkra, mint azé, hogy »az *F* fogalomhoz az n + 1 szám tartozik«. Azt ugyan ennek és az utolsó definíciónak segítségével meg tudjuk mondani, mint jelent
> »az *F* fogalomhoz az 1 + 1 szám tartozik«,
> azután, ezt felhasználva, meg tudjuk adni annak a kifejezésnek az értelmét, hogy
> »az *F* fogalomhoz az 1 + 1 + 1 szám tartozik«
> stb.; de – hogy kirívó példát adjunk – azt definíciók alapján soha nem fogjuk tudni eldönteni, hogy egy fogalomhoz a *Julius Caesar* szám tartozik-e, hogy Galliának ez az ismert hódítója szám-e, avagy nem. Meghatározási kísérletünk alapján azt sem tudjuk bizonyítani, hogy ha az *F* fogalomhoz az *a* szám tartozik, és ugyancsak hozzá tartozik a *b* szám, akkor fenn kell álljon *a* = *b*. Ezért nem volna igazolható az a kifejezés, hogy »*azon* szám, mely az *F* fogalomhoz

[23] Frege: *Az aritmetika alapjai.* Id. kiad. 81.

tartozik«, következtetésképp általában lehetetlen volna igazolni a számok közötti egyenlőséget, mivel egyáltalán nem tudnánk megragadni egy meghatározott számot. Csupán látszat, hogy amit meghatároztunk, az a 0 és az 1; valójában csak a
»hozzá tartozik a 0 szám«
»hozzá tartozik az 1 szám«
szófordulatok értelmét adtuk meg; de az nem megengedett, hogy ezeken belül a 0-t és az 1-et mint önálló, újra felismerhető tárgyat különböztessük meg."[24]

Dummett értelmezése[25] szerint itt egy bűvészmutatvánnyal állunk szemben. Frege a számokat mint másodrendű predikátumokat definiálja, majd arra a konklúzióra jut, hogy ez kivitelezhetetlen: a számoknak objektumoknak kell lenniük. E következtetés azonban teljességgel megalapozatlan: a Frege által felhozott érvek könnyen kiküszöbölhetők, illetve értelmetlenek. A legtöbb, ami szerinte az 55–61. §-ban történik, hogy megcáfolja a leggyakoribb ellenérveket a számok objektum-voltát illetően: nem hordoz ellentmondást az, hogy a számokról nincsen semmilyen (képszerű) képzetünk vagy szemléletünk, illetve hogy nincsenek sehol.

Ezzel szemben Dummett kimutatja, hogy harmadrendű nyelvet használva igenis adható egy konzisztens értelmezése a szám-predikátumoknak. Az n + 1 definiálását tehát a következő módon kell értenünk: a harmadrendű nyelven megfogalmazható, hogy egy másodrendű *P* predikátum rákövetkezője P^+, ami akkor igaz egy *F* fogalomra, ha van olyan *a*, melyre *Fa*, és *P* igaz az „*F* alá esik, de nem *a*" fogalomra. A Hume-elvet szintén érthetjük úgy, hogy csak számosság-predikátumok azonossági kritériumát rögzíti. Ezt használva már azt is el tudjuk dönteni, hogy egy másodrendű *P* predikátum mikor számosság. Akkor, ha van olyan *F* fogalom, amelyre *P* azonos terjedelmű az „*F*-fel azonos számosságú" predikátummal.

A problémát Dummett abban látja, hogy ha Frege ezt az utat választotta volna, akkor az aritmetika megalapozásához empirikus tudást kellett volna vegyítenie. Mi a helyzet ugyanis akkor, ha összesen 100 tárgy van a világon? A „hozzátartozik a 100 szám" másodrendű predikátum arra a predikátumra lesz igaz, melynek terjedelme a teljes univerzum. Ennek azonban nem volna rákövetkezője, mivel a „hozzátartozik a 101 szám" terjedelme üres. Itt Dummett téved, noha tévedése nem lényeges: attól még, hogy a terjedelme üres, ez egy jól definiált predikátum marad. A probléma abban áll – amint Heck rámutat –, hogy mind a „hozzátartozik a 101 szám", mind a „hozzátartozik a 102 szám" üres, tehát azonos terjedelmű predikátum.[26] Így a 100-nak és a 101-nek ugyanaz a rákövetkezője, ami ellentmondás. Nem tudjuk tehát tisztán logikai úton bizonyítani, hogy végtelen sok különböző számosság-predikátum lenne, ehhez egy végtelenségi axiómára lenne szükségünk, amely Russellnél is található.

[24] Uo.

[25] Dummett, Michael: *Frege: Philosophy of Mathematics*. Duckworth, London, 1992. Lásd a 9. fejezetet.

[26] Itt hallgatólagosan kihasználjuk az V. axiómát: két predikátum terjedelme azonos, ha ugyanazokban az esetekben igazak.

Dummett felépít tehát egy szép konstrukciót, amit rekonstrukcióként állít be, és utána rögvest le is rombolja azt. Fregénél azonban valójában fel sem merül, hogy a számoknak másodrendű predikátumoknak kellene lenniük. Frege nem bűvészkedik, hanem eleve azzal az előfeltevéssel fog a számok meghatározásába, hogy objektumok. Objektum alatt Fregénél elsősorban nyelvtani szerepre kell gondolni: amikor úgy beszélünk róla, hogy „az 1", máris objektumként tételezzük. Még ha a „$2 + 2 = 4$" állítást fel is tudtuk írni predikátumokkal, nehéz ugyanezt elképzelni arra, hogy „$2\times2=4$", vagy hogy „$2:2=1$". A legkomolyabb problémát azonban az olyan mondatok jelentik, mint „a 4-nél kisebb számok száma 4". Ha ugyanis a számosság másodrendű predikátum, akkor „a 4-nél kisebb számok" egy fogalom, amely alá objektumok tartoznak. Magukat a számokat is számláljuk, és enélkül nemcsak hogy nem tudnánk a számsor végtelenségét biztosítani, de a matematika mellett hétköznapi beszédünk is ellehetetlenedne. Amikor ugyanis úgy számoljuk meg az előttünk lévő tárgyakat, hogy „egy, kettő, három, négy", akkor egy kölcsönösen egyértelmű hozzárendelést teremtünk a tárgyak és az $\{1, 2, 3, 4\}$ halmaz között.

Ha az „*F*-hez az *n* szám tartozik" mint másodrendű predikátum megbonthatatlan egységet alkotna, akkor a Julius Caesar-probléma nem merülhetne fel, és joggal intézhetné el Dummett azzal, hogy „*notoriously inept words*"[27] az előtte szereplő érv ismétlésére, emellett a számegyenlőségre vonatkozó kérdés is értelmetlen volna.

Azonban „abban a mondatban, hogy »az *F* fogalomhoz a 0 szám tartozik«, a 0 csak egy része az állítmánynak".[28] Vagyis az „*F*-hez az *n* szám tartozik" egy relációt fejez ki az *F* fogalom és az *n* tárgy között, jelöljük $\rho(F,n)$-nel. Megtudjuk, hogy mely fogalmak állnak ρ relációban a 0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, ... nevű tárgyakkal. Ezáltal azonban nem adtuk meg ρ teljes leírását: nem tudtuk meg, hogy mely tárgyak állhatnak egyáltalán ilyen relációban, továbbá azt sem, hogy mi a helyzet Julius Caesarral. Nem zártuk ki azt, hogy Galliának ez az ismert hódítója azonos legyen például az „1 + 1 + 1" számmal. De még ha nem azonos is, akkor is lehet, hogy valamely *F* fogalomra $\rho(F,1+1+1)$ és $\rho(F,\text{Julius Caesar})$ egyaránt teljesül.

4.2. Azonosság-kritériumok

Ha a számokat objektumokként is értelmezzük, kézenfekvő feltevés, hogy az objektumok különböző, egymástól elhatárolható osztályokba tartoznak. Amennyiben a 0 szám és Julius Caesar különböző típusú objektum, értelmetlen az azonosságukra rákérdezni, s ezáltal a probléma megoldottnak tekinthető. A metafizikai kijelentések értelmetlenségét alátámasztandó Carnap ismert példáját idézzük: „Caesar egy prímszám".[29] Elemzése szerint ez a kijelentés ugyan

27 Dummett: i. m. 101.

28 Frege: *Az aritmetika alapjai*. Id. kiad. 82.

29 Lásd Carnap, Rudolf: A metafizika kiküszöbölése a nyelv logikai elemzésén keresztül. In Forrai Gábor – Szegedi Péter (szerk.): *Tudományfilozófia szöveggyűjtemény*. Áron Kiadó, Budapest, 1999, 9–25.

nyelvtani formáját tekintve helyes, mégis értelmetlen látszatállítás: a prímszámság olyan tulajdonság, amelyet nem állíthatunk emberekről. Carnap szerint egy helyesen felépített nyelvnek a látszatállításokat már a nyelvtan szintjén ki kellene küszöbölnie: külön szintaktikai kategóriában volnának a „tárgyak, a tárgyak tulajdonságai, a tárgyak viszonyai, számok, számok tulajdonságai, a számok viszonyai, és hasonlók".

Benacerraf szerint[30] $x = y$ megkérdezésének csak akkor van értelme, ha van valamilyen közös kontextusa e két objektumnak: létezik egy olyan C típus vagy kategória, amelybe mindketten beletartoznak, s így mint ugyanazokat a C-ket azonosíthatjuk őket. Így ha x és y mindketten emberek, megkérdezhetjük, hogy ugyanazok az emberek-e; ha x és y mindketten számok, akkor felvethető, hogy azonos számok-e. Egy osztály esetén rendelkezünk az azonosság felismerése által igényelt megfelelő kritériumokkal, emberek esetében ezek bizonyos tulajdonságok, számok esetében pedig a számelméleti jellemzők. Ha azonban arra kérdezünk rá, hogy x és y ugyanazok az entitások-e, nem tudunk olyan kritériumokat megadni, amelyek az azonosság kérdésében döntenének. Tudjuk, hogy $0 \neq 3$, mivel vannak kritériumaink annak eldöntésére, hogy ezek különböző számok. Tudjuk, hogy *Augustus* ≠ *Julius Caesar*, mivel meg tudjuk indokolni, miért különböző emberek. De mit érthetünk az alatt a kérdés alatt, hogy 0 = *Julius Caesar*? Nem tudunk olyan feltételeket meghatározni, amelyek kielégítése mellett ezt igaznak, illetve hamisnak fogadhatnánk el. Sőt, ha meg is tudnánk válaszolni a kérdést, nem jutnánk általa új ismeretek birtokába, sem a számokat, sem a római történelemet illetően.

Természetesen ezzel az állásponttal szemben ugyanúgy felvethető a Julius Caesar-probléma. A kérdés ekkor nem az, hogy a 0 = *Julius Caesar* állítás igaz-e, hanem az, hogy értelmes-e. Ha tehát az azonosság kérdése csak bizonyos kategóriákon belül fogalmazható meg, miként tudjuk eldönteni, hogy két dolog azonos kategóriába[31] tartozik-e? Az univerzálisan értelmezhető azonosság-relációt tehát elvetettük, helyébe azonban egy másik, hasonlóan általános reláció lépett. Egy adott x objektum és C kategória esetén el kell tudnunk dönteni, hogy x a C kategóriába tartozik-e, illetve azt, hogy tetszőleges x és y esetén van-e olyan kategória, mely mindkettőjüket tartalmazza. A Hume-elv akkor lenne jó definíciója a számoknak, ha le tudnánk vezetni belőle a 0 = *Julius Caesar* kérdés értelmetlenségét.

Egy ilyen levezetésre tett kísérletet Wright és Hale,[32] akik a számokat a Hume-elv alapján vezetik be, és a fenti gondolatmenet olyan rekonstrukcióját próbálják adni, amelyben a Julius Caesar-probléma megoldható. Ezt követően Stirton[33] nyomán a rekonstrukció tarthatatlanságára mutatunk rá.

[30] Lásd Benacerraf, Paul: Amik a számok nem lehetnek. Ford. Farkas György. In Csaba Ferenc (szerk.): *A matematika filozófiája a 21. század küszöbén*. Id. kiad. 165–197.

[31] A kategóriát itt természetesen a szó „hétköznapi", nem pedig kategóriaelméleti értelmében használjuk.

[32] Hale, R. L. V. – Wright, C. J. G.: Implicit definition and the a priori. In Borghossian, P. – Peackocke, C. (eds.): *New Essays On the A Priori*. Clarendon, Oxford, 2000, 286–319.

[33] Stirton, William: Caesar Invictus. *Philosophia Mathematica,* 2003/11, 285–303.

Vannak a létezők bizonyos osztályai, s mindegyik osztályhoz tartozik egy azonosság-kritérium. Ha x és y a C osztályba tartoznak, akkor

$$x = y \leftrightarrow x \ \mathrm{eq}_C \ y$$

ahol eq_C a C osztályhoz tartozó azonosság-kritérium. Két ember esetén eq_{Pers} valamilyen, csak az emberekre jellemző kritérium, például ujjlenyomat vagy bármi más.

Számok esetén a Hume-elv segítségével határozzuk meg az azonosság-kritériumot: $Fx \approx Gx$ jelölje azt, hogy az Fx és Gx fogalmak terjedelme kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe állítható. Legyen $Nx{:}Fx$ az Fx fogalomhoz tartozó számosság. Ekkor, ha a és b mindketten számok, úgy $a \ \mathrm{eq}_{Num} \ b$ legyen a következő:

(1) $\forall F \forall G((a{=}Nx{:}Fx \wedge b{=}Nx{:}Gx) \rightarrow Fx \approx Gx)$

vagyis tetszőleges F és G fogalmakra, ha a az F-hez tartozó és b a G-hez tartozó számosság, akkor F-hez és G-hez ugyanaz a számosság tartozik.

Ezen azonosság-kritérium alapján szeretnék a számok N kategóriáját definiálni. A számok azon objektumok, amelyek közül bármely kettő pontosan akkor egyenlő, ha eq_{Num} szerint egyenlők, vagyis:

(2) $\forall a \forall b((a \in N \wedge b \in N) \leftrightarrow (a{=}b \Leftrightarrow a \ \mathrm{eq}_{Num} \ b)$

Ugyanez igaz a többi kategóriára is: azon objektumokból állnak, amelyek azonossága ekvivalens azzal, hogy teljesül rájuk az illető kategóriához tartozó azonosság-kritérium.

0 = *Julius Caesar* akkor lehetséges, ha van olyan közös kategória, amelybe a számok és az emberek is beletartoznak.[34] Ekkor levezethető lenne az, hogy

$$(a \ \mathrm{eq}_{Pers} \ b) \leftrightarrow (a \ \mathrm{eq}_{Num} \ b)$$

ami ellentmondást jelent: nem gondolható, hogy az emberek azonosságának és a számosságok azonosságának éppen ugyanaz lehetne a kritériuma.

Stirton azonban megmutatja, hogy a levezetés hibás. A hiba forrása a (2)-ben szereplő $\Leftrightarrow$. Milyen ekvivalenciát fejezhet ez ki? Nem lehet egyszerű materiális bikondicionális: tekintsünk olyan a-t, ami biztosan nem egy szám. Ekkor (2)-ben $a = a$ teljesül. Teljesül viszont $a \ \mathrm{eq}_{Num} \ a$ is az (1) definíció alapján. Minthogy a nem számosság, ezért minden F és G fogalom esetén $a = Nx{:}Fx \wedge a = Nx{:}Gx$ hamis, és hamis feltétel esetén igaz a kondicionális. Tehát (2)-ben a bal oldal igaz a-ra, s így a jobb oldalnak is igaznak kell lennie: $a \in N$, ami ellentmond a feltevésünknek.

$\Leftrightarrow$ tehát nem értelmezhető pusztán a változók jelölete alapján: figyelembe kell venni a jelentéseket is. A modális logikai értelemben vett szigorú kondicionális sem elég azonban: $a = a$ szükségszerűen igaz, és ha a nem szám, akkor $a \ \mathrm{eq}_{Num} \ a$ is szükségszerű igazságnak tekinthető. Ehhez hasoló módon kellene

34 Wright és Hale itt egy olyan feltevést használ, mely szerint a kategóriák nem metszhetik egymást: vagy diszjunktak, vagy az egyik tartalmazza a másikat. Feltevésük valójában kicsit bonyolultabb: vannak a dolgoknak fajtái (*Sort*), s léteznek egyértelmű maximális kategóriák, amelyeknek a fajták alá vannak rendelve. Fogadjuk el ezt az előfeltevést – látni fogjuk, hogy nem ezen fordul meg az érvelés.

próbálkozni: „$P \Leftrightarrow Q$ jelentse azt, hogy P-nek és Q-nak szükségszerűen azonos az igazságértéke, és ha P igaz, akkor közvetlenül Q igazsága révén igaz". Azon túl, hogy az itt szereplő fogalmak alapos tisztázásra szorulnak, Stirton kimutatja, hogy az ilyen jellegű meghatározások nem működhetnek: lehet olyan példákat konstruálni, amelyekben a változók jelölete azonos, jelentésük azonban különböző, s ennek következtében az egyik változópár helyettesítésekor $a \in N$ jönne, míg az azonos jelöletű c esetén $c \notin N$ adódna.

Stirton ennek kikerülésére azt javasolja, hogy módosítsuk a számosság-azonosság (1) definícióját úgy, hogy csak olyan a-kra és b-kre legyen azonos a számosság, amelyek valamely fogalom számosságaként állnak elő:

$$\exists F\ (a{=}Nx{:}Fx) \wedge \exists G\ (b{=}Nx{:}Gx)$$
$$\wedge\ \forall F \forall G((a{=}Nx{:}Fx \wedge b{=}Nx{:}Gx) \rightarrow Fx{\approx}Gx)$$

Ha most (2)-ben (1) helyett ezt a definíciót használjuk, a fenti ellenvetések kikerülhetők. Szembe kell nézni azonban egy sokkal komolyabb problémával: ez a definíció, mely kiindulópontul szolgálna a Julius Caesar-probléma megoldásához, már eleve feltételezi a probléma megoldását! Hiszen számok alatt éppen azokat az a-kat értettük, amelyekre $\exists F\ (a = Nx{:}Fx)$. Ahhoz tehát, hogy meg tudjuk határozni $a\ \mathrm{eq}_{\mathrm{Num}}\ b$ igazságát, már eleve feltéteznünk kell, hogy tudjuk, a és b számok-e.

Ezek és a hasonló gondolatmenetek mind körben forognak: voltaképpen mindig feltételeznek egy előzetes tudást arról, hogy mik a számok, és ezt a tudást próbálják elleplezni valamilyen más fogalmak mögé.

4.3. A számok önálló kategóriája

A Hume-elv alapján nem sikerült elhatárolni a számok kategóriáját a többitől. Az sem nyilvánvaló azonban, hogy egyáltalán megtehető-e egy ilyen elhatárolás. A számok ugyanis átlépnek a kategóriák határain: ugyanúgy tudunk dolgokat, tulajdonságokat, számokat, viszonyokat *és hasonlókat* számolni. A nehézségek itt is – csakúgy, mint a számok predikátumként való értelmezésekor – abból származnak, hogy magukat a számokat is meg akarjuk számolni. Az alábbiakban megvizsgálunk egy megoldási kísérletet erre a problémára, majd amellett érvelünk, hogy Frege számára egy ilyen típusú megoldás elfogadhatatlan.

Heck[35] nyomán induljunk ki az „egyszerű" objektumokból, mint az emberek, fák, kövek és folyók. Vegyük a Hume-elv alapján hozzájuk tartozó számokat. Kérdés, hogy mit teszünk, amikor ezeket megszámoljuk. Heck első javaslata szerint ezekre is értelmezve kell hogy legyen a Hume-elv egy változata (két számokon értelmezett predikátum azonos számosságú, ha kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés tehető az alájuk tartozó számok között). A számok számaira azonban már második szintű számokat kell bevezetnünk, amelyekre ismét érvényes kell hogy legyen egy Hume-elv, és így tovább, végtelen sok különböző szinten

[35] Heck, Richard G. Jr.: The Julius Caesar Objection. In R. Heck (ed.): *Language, Thought, and Logic: Essays in Honour of Michael Dummett*. Oxford UP, New York – Oxford, 1997, 273–308.

lesznek a számaink. Ekkor persze nem írhatjuk egyszerűen azt, hogy 9, hanem jelölnünk kell, melyik szinten áll számunk: 9_n, és ugyanígy a számosság és a számosság-egyenlőség fogalmait is indexekkel kell ellátnunk.

Ekkor ez a mondat: „Az 5-nél nagyobb, de 15-nél kisebb számok száma 9" helyesen így írható fel: „Az 5_n-nél nagyobb, de 15_n-nél kisebb számok száma 9_{n+1}" valamilyen *n* esetén. Az aritmetikai állításoknak tehát egy jó része átírható ilyen formába, még ha ez elég körülményes is. Nem tudjuk azonban leírni, mi a kapcsolat 9_n és 9_{n+1} között. Ebből következően lesznek olyan esetek, ahol az átírás nem végezhető el: „A {3, 4, 5} halmaz számossága a halmaz egyik elemével egyenlő". Ez egy értelmes és igaz állítás, ezen a nyelven mégsem formalizálható: a halmaz számosságaként fellépő 3 eggyel magasabb szinten szerepel, mint a halmaz elemeként szereplő 3.

Lehetetlen továbbá a tárgyak megszámlálása is a hétköznapi értelemben, mivel nem jól formált az a mondat, hogy „Neróig a római császárok száma ugyanannyi, mint a 6-nál kisebb számok száma". E problémák megoldására vezeti be Heck új rendszerét, amit *két osztályú fregei aritmetikának* (2FA) nevez el. Ebben csupán két osztály van: az egyszerű objektumoké és a számoké. A számok számai ugyanabba az osztályba tartoznak, mint maguk a számok. Ebben a nyelvben három változata van a Hume-elvnek: először is a szokásos, amely két, egyszerű objektumokon értelmezett predikátum számosságának azonosságát rögzíti. Van továbbá az, amely két, számosságokon értelmezett predikátum számosságának azonosságáról szól, s végül amely egy számosságokon és egy egyszerű objektumokon értelmezett predikátum számosságának egyenlőségét rögzíti. Értelemszerűen mindegyik a kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést használja. Ebben a rendszerben megoldódnak a fenti problémák, és az aritmetika szokásos axiómái levezethetők lesznek.

E gondolatmenetet továbbvivendő, Heck kiterjeszti azt tetszőleges dolgok számlálására. Javaslata szerint semmi akadálya annak, hogy fogalmakat vagy relációkat is számolni tudjunk. A Hume-elv további változatait kell felhasználnunk, amelyekkel bármely két különböző típusú dolog fölötti predikátum számosságának azonossága leírható (pl. függvények és számok számának azonossága). A Hume-elv egy általános séma lenne, melynek alapján ilyen szabályokat képezhetünk.

Carnap számára egy ilyen meghatározás valószínűleg kielégítő lett volna: megoldja azt a problémát, hogy a számolás kategóriákon átívelő módon alkalmazható. Frege szempontjából azonban Heck utóbbi kitétele feleslegesnek tűnik, s ez egy lényeges pontra mutat rá. Az V. axióma ugyanis éppen arról szól, hogy a fogalmak és a relációk is tárgyként kezelhetők, és ekkor a leírt 2FA rendszerben már meg tudjuk számolni őket. Félrevezető tehát az a kép, amelyet Heck próbál adni az egyszerű objektumokról, miszerint ezek valamilyen konkrét, tapasztalatban adott tárgyak lennének. Nemcsak egyes emberek szerepelnek ugyanis közöttük, hanem az „*x* ember" fogalomterjedelme is, az igaz és hamis igazságértékek, és még megszámlálhatatlan sok minden.

A Russell-paradoxon miatt természetesen nem tartható konzisztensen az az álláspont, hogy minden fogalom tárgyiasítható. Így nem is számolhatunk meg minden fogalmat tárgyként; de ha Frege naiv halmazelmélete helyett pl. a

Zermelo–Fraenkel-féle halmazelméletet fogadjuk el, akkor mondhatjuk azt, hogy minden „értelmes" fogalom tárgyiasítható, csak az olyanok nem, mint hogy „$x \notin x$". Tehát ha megmaradunk az egyszerű tárgyak és számok számlálásánál, akkor nem veszíthetünk semmi lényegeset, ezért elegendő az „egyszerű" objektumok és a számok két osztályát megtartani.

Következésképpen, ha olyan szűk értelemben gondolunk az „egyszerű" objektumokra, ahogyan Heck, mint térben és időben megjelenő individuális dolgokra, akkor talán nem jelent nagy gondot a számok és a dolgok egymástól való elhatárolása. Ekkor azonban adósok maradunk egy teljes típuselmélet kidolgozásával, amely megmagyarázza, mik azok az első-, másod-, sokadrendű fogalmak, relációk, mi ezek viszonya egymáshoz, és amely mindegyiken külön értelmezi a számolás fogalmát. Ez leginkább a Russell- és Whitehead-féle típuselméletnek lenne egy olyan módosítása, ahol a számok egy önálló típust alkotnak. Egy ilyen megközelítés előnye lenne, hogy nem kell feltennünk a tárgyak végtelen számáról szóló axiómát, mint Russelléknek kellett, ugyanis maguk a számok is számlálhatóak lesznek.

Akár alkalmazható ez a szemlélet a típuselméletre, akár nem, semmiképpen sem tekinthető fregeánus megoldásnak. Frege számára az objektumok között *minden* szerepel, a szó lehető legtágabb értelmében – sőt, kifejezetten túl tág értelmében. Nevezhetjük mindezeket „egyszerű" objektumoknak – ekkor azonban a számok valahogyan az egész világon kívül álló dolgok lesznek: nem definiálhatók valamilyen fogalom terjedelmeként.

Heck azáltal, hogy a létezők egy új osztályát definiálja, fregei értelemben kreatív definíciót ad. Mint megjegyzi, ha a 2FA rendszerből egyszerűen kihagynánk az egyszerű objektumokra való hivatkozásokat, akkor a számok osztályát kapnánk, a hozzá tartozó, számokon értelmezett fogalmak terjedelmének azonos számosságát leíró Hume-elvvel. Ebből le tudjuk vezetni az aritmetika összes axiómáját. Mégis, fregei értelemben egy ilyen feltevés éppen olyan megalapozott, mint ha magukat a Peano-axiómákat tételeznénk fel. Nem a megengedett, névadásos értelemben vett definíció ez, hanem bizonyos követelmények felállítása, melyek kielégíthetőségére éppúgy nincs garanciánk, mint a Peano-axiómák esetén.

Végül, ha valaki Heck nyomdokain mégis egy típuselméleti felépítés mellett döntene, marad legalább egy olyan kérdés, amely valószínűleg igen komoly nehézséget okozna rendszere kidolgozása során. Mit jelent pontosan a 2 szám a 2FA-ban, abban az állításban, hogy „az alapvető objektumok és a számok *két* különböző osztályba tartoznak"? Ezt nem tudjuk megmagyarázni sem mint egyszerű objektumok számát, sem mint számok számát, sem mint valamilyen egyszerű fogalom terjedelmét.

5. Strukturalista válasz

Amint a 2. részben láttuk, a számok matematikai meghatározása az, hogy bizonyos halmazokkal azonosítjuk őket. Úgy tűnhet azonban, hogy ezzel a meghatározással túllőttünk a célon: olyan speciális tulajdonságokat aggatunk a számokra, amelyek számfogalmunkból nem következnek.

Benacerraf ennek illusztrálására az alábbi mesét hozza.[36] Képzeljük el, hogy két kisgyerek, Ernie és Johnny felvilágosult szellemű apjuktól halmazelméleti alapokra építve sajátítják el a természetes számok fogalmát. Ernie úgy, ahogyan a neumanni definícióban, Johnny viszont[37] az alábbi halmazsorozatot azonosítja a 0, 1, 2, 3, ... számokkal:

$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{\{\emptyset\}\}\}, \ldots$

Mindkét rendszer kielégíti a Peano-axiómákat, s a Hume-elv segítségével alkalmasak a számlálásra. Teljes egyetértésben tudják hát művelni az aritmetikát, mígnem összevesznek azon a kérdésen, hogy a 3 eleme-e a 17-nek. Ernie rendszerében ez igaz, hiszen minden szám a nála kisebbek halmaza, Johnny rendszerében azonban minden szám a nála eggyel kisebbből álló egyelemű halmaz, tehát a 17 egyetlen eleme a 16.

Azért érezzük ezt problémásnak, mert nem „bizonyos axiómákat kielégítő objektumokról", hanem kifejezetten *a számokról* szeretnénk beszélni. A hibát Benacerraf szerint ott követjük el, hogy többet várunk el a számoktól, mint amennyi elvárható. Olyan kérdéseket tehetünk fel velük kapcsolatban, amelyek rákövetkezéssel, összeadással és szorzással kapcsolatosak, mert egy olyan struktúrában értelmeztük őket, ahol ezek a műveletek értelmesek. Durva hasonlattal élve, azt megkérdezni, hogy „$3 \in 17$?", ahhoz hasonló, mint ha arra lennénk kíváncsiak, hogy az egyenes kék-e vagy fekete, mivel láttunk már kék, illetve fekete tollal húzott egyenest is. Az, hogy a számok valamilyen objektumok, nem jelenti azt, hogy bizonyos konkrét halmazoknak kellene lenniük, hanem csupán annyit, hogy bizonyos tulajdonságokat várunk el tőlük – és számfogalomnak azt nevezzük, ami mindezekben közös. Ha csupán olyan kérdéseket teszünk fel, amelyek az aritmetika nyelvén vannak megfogalmazva, úgy mindkét kisgyerek ugyanazokat a válaszokat fogja adni. A két modell ugyanis izomorf: elemeik között tudunk olyan kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést teremteni, melyben x rákövetkezőjének képe az x képének rákövetkezője. A két modellben emiatt ugyanazok az állítások lesznek igazak.

McLarty[38] arra mutat rá, hogy a számok struktúraként való értelmezéséhez van a halmazelméletnél szerencsésebb keret is: a kategóriaelmélet. A kategóriaelmélet nyelvén úgy adható meg a számfogalom, hogy még csak nem is eshetünk abba a kísértésbe, hogy feltegyük a „$3 \in 17$?" kérdést. Ezt még csak megfogalmazni sem lehet: a kategóriaelméletben két, azonos tulajdonságokkal rendelkező struktúrát elvileg sem tudunk megkülönböztetni. Egyértelműen létezik tehát egy struktúra, amit természetes számoknak nevezhetünk.

Mindez a Julius Caesar-problémára a következő választ adja: a 0 azonos is lehet Caesarral, de nem is, illetve vehetjük úgy is, hogy a kérdés értelmetlen. Bármilyen objektumokat nevezhetünk számoknak, amennyiben kielégítik az aritmetika axiómáit. Dönthetünk úgy, hogy van valamilyen kitüntetett interp-

[36] Lásd Benacerraf: i. m.

[37] Ernst Zermelo nyomán.

[38] Lásd McLarty, Colin: Miért ne lehetnének a számok azok, amiknek lenniük kell? In Csaba Ferenc (szerk.): *A matematika filozófiája a 21. század küszöbén*. Id. kiad. 197–218.

retációnk, s úgy is, hogy nincsen. Összesen annyit kell szem előtt tartanunk, hogy csak olyan tulajdonságairól beszéljünk a számoknak, amelyek aritmetikailag relevánsak – és ne tulajdonítsunk jelentőséget annak a kérdésnek, hogy 0 és Julius Caesar különböznek-e.

Dummett erős ellenérzéssel viseltetik a strukturalizmussal szemben. Mint írja, hamis elképzelés, hogy a számoknak csak a strukturális tulajdonságai számítanának.[39] A 3 számra nézve szerinte nem az a meghatározó, hogy miként viszonyul a többi számhoz, hanem valami ennél sokkal alapvetőbb: méghozzá az, hogy számosságként gondolunk rá – a három elemű halmazoknak éppen 3 eleme van. Dummett ezzel amellett érvel, hogy a számokat számosságként, a Hume-elvből kiindulva kellene bevezetni.

Dummett ellenvetése Benacerraf nézőpontjából irreleváns. Ernie és Johnny ugyanis megtanulták azt is, hogy a számok miként alkalmazhatók a számlálásra, méghozzá a Hume-elv alapján: úgy állapítjuk meg, hogy egy halmaz *k* elemű, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésbe állítható a 0, 1, 2, ..., *k*–1 számokkal. Mindez a konkrét definíciótól függetlenül, már a strukturális tulajdonságokból következik.

A Hume-elvnek ugyanakkor valóban prioritása van az aritmetikai axiómákkal szemben. Ez utóbbiak levezethetőek belőle; ugyanakkor segítségével a számosságok azonosságát közvetlenül, a számok ismerete nélkül is megragadhatjuk. Ernie és Johnny azt, hogy ugyanannyi ló és lovas van egy felvonuláson, úgy tudja megállapítani, hogy egyenként megszámolja a lovakat, majd a lovasokat, és megállapítja, hogy e két szám egyenlő. A Hume-elv alapján ezt már onnan is megállapíthatják, hogy minden lovon egy lovas ül.

Ez azonban nem érinti a strukturalizmus gondolatmenetének lényegét. Ha az aritmetika axiómái helyett a Hume-elvet tekintjük kiindulópontnak, akkor is érvényes marad ugyanaz a gondolatmenet: eszerint olyan tetszőleges struktúrát vehetünk számoknak, amely kielégíti a Hume-elvet; és minden olyan kérdést értelmetlennek tekintünk, amely a számoknak a Hume-elvből nem levezethető tulajdonságaira kérdez rá. Frege számára természetesen ez a megoldás elfogadhatatlan lett volna: mégiscsak zavaró, hogy „az 1" helyébe egy meghatározatlan, lerögzítetlen struktúraelem kerül, ami lehet akár Augustín de Veida vagy a kén.

6. Néhány szó a szemléletről

Logicista programjának kudarca után, élete utolsó éveiben Frege visszatér ahhoz az elképzeléshez, amelyet a *Grundlagen*-ben elvetett: az aritmetikának valamilyen módon a szemléletre kell alapozódnia.[40] Kant és Husserl nyomdokain a matematika szemléletre való alapozását rengeteg irányból közelítették; az ehhez kapcsolódó alapgondolatok, fogalmak, problémák bemutatását és elemzését

[39] Dummett: i. m. 53.

[40] Kicsit bővebben tárgyalva lásd Frege: *Logikai vizsgálódások*. Id. kiad. 189. Frege itt a geometriai szemléletre gondol, elképzeléseit nem fejti ki részletesen, és ebben

ebben a dolgozatban még csak vázlatosan sem kíséreljük meg. Egyetlen gondolat erejéig, az aritmetikára való vonatkozásában szeretnénk érinteni ezt a kérdéskört.

Kant transzcendentális idealizmusának alapgondolata, hogy a fizikai tárgyak nem közvetlenül, hanem az érzéki szemléletben adottak számunkra. Nem lehet tudásunk arról, milyenek ők valójában, sőt, létezésükről sincs kielégítő bizonyítékunk.[41] Amikor az ész a lehetséges tapasztalat határait átlépve a magukban való dolgokról próbál tudást nyerni, óhatatlanul ellentmondásba kerül önmagával. Az ész használatát éppen ezért a lehetséges tapasztalat határai közé kell szorítani, ezen túllépő fogalmai üresek.

Hogyan lehetnek számunkra adottak olyan absztrakt objektumok, mint a számok? Frege azt a választ szeretné adni, hogy a lehetséges tapasztalattól függetlenül: azonban nem túllépve rajta, hanem megelőzve azt – tisztán logikai objektumokként. Frege kudarca arra mutat rá, hogy ez nem tehető meg. A legvégső pont, ameddig a számok elemzése során jutottunk, a Hume-elv volt. A Julius Caesar-probléma arra sarkallt minket, hogy közelebbi tudást szerezzünk a számokról. Az ilyen kísérletek azonban rendre kudarcba fulladtak – nem arra utal-e ez vajon, hogy a kérdés teljesen értelmetlen?

Ha nem tudjuk a számokat valamilyen közvetlen módon megragadni, akkor valamilyen szemléletben kell hogy adottak legyenek. Nem kívánunk állást foglalni abban a kérdésben, hogy ez a szemlélet valamelyik kanti tiszta érzéki szemlélet lenne-e, vagy pedig absztrakt természetű. Csupán egy fontos vonását szeretnénk kiemelni: e szemléletnek a Hume-elv alapvető tulajdonsága kell hogy legyen.[42] Csak azt és annyiban tudhatjuk a számokról, ami a Hume-elvből adódik – úgy áll tehát köztünk és a számok között a Hume-elv, ahogy a magánvaló dolog között és köztünk az érzéki szemlélet. Ezen túlmenően nem lehet róluk semmi tudásunk – Gödel nemteljességi tétele szerint még a létezésük sem bizonyítható logikai alapon. A számok strukturalista értelmezésének ilyen transzcendentális idealista felfogásában a Julius Caesar-probléma a legfőbb antinómia szerepét töltené be.[43]

nincsenek is követői. Minket azonban most általában fog érdekelni a számok és a szemlélet viszonya.

41 *A tiszta ész kritikája* hoz ilyen bizonyítékot „Az idealizmus cáfolata" című részben; e bizonyítás azonban legalábbis problematikus.

42 Miért éppen a Hume-elv, s miért nem inkább a Peano-axiómák? Erre az előző rész végén próbáltunk választ adni: a Peano-axiómák levezethetők a Hume-elvre támaszkodva, ugyanakkor, ha a Peano-axiómákkal bevezetett számokkal számlálni szeretnénk, szükség van a Hume-elvre is.

43 Szeretnék köszönetet mondani Csaba Ferencnek, aki ötleteivel és észrevételeivel segítette e dolgozat elkészülését.