

Mezei Balázs

ARISZTOTELÉSZ ÉS CANTOR A VÉGTELENRŐL

A görög *apeiron* szó, melyet közkeletűen végtelennek fordítunk, eredetileg olyan „határtalanságot” jelent, melyet a tapasztalás során megvalósuló *meghatározottság hiánya* jellemez. Mivel a *perasz*, „határ” szó a *peirao*, „tapasztal” igével függ össze¹, az *apeiron* nem egyszerűen a statikus értelemben vett „határ nélküliséget” fejezi ki, hanem azt, aminek a határához nem lehet elérni, vagy amit mint valamit, határolt dolgot, nem lehet megtapasztalni.² Ez magyarázza, hogy Arisztotelész megközelítésében az *apeiron* elsődleges jelentése az, „amin nem lehet végigmenni”.³ Továbbá ez a magyarázata annak is, hogy az *apeiron* valaminő – nehezen meghatározható – értelemben már a legkorábbi időszaktól kezdve teológiai kifejezés. Mint Arisztotelész írja, az *apeiron* a természetfilozófusok „azonosítják az istenivel” (*to theion*).⁴ A keresztény teológiafejlődés, melynek során az *apeiron* egyértelműen isteni attribútumként szerepel, e korábbi felfogásra támaszkodott.⁵ Maga Arisztotelész, úgy tűnik több értelemben is kritikusan kezeli a kifejezést, noha ennek pontos tartalma nem mindig világos. A neki tulajdonított különbségtétel „aktuális” (*entelekheía*) és „potenciális” (*dünamei*) végtelen között magukban a szövegekben sokkal bonyolultabb. A *Metafizika* vonatkozó helyén⁶ a következő végtelenfajtákat sorolja fel:

(1) A végtelen először is az, ami meghaladhatatlan, „amin lehetetlen végigmenni”, mivel „természete”, jellege nem olyan, hogy ezt lehetővé tenné. Illusztrációként szerepel, mint más szövegrészekben is, hogy a *hang sem látható*; a látás számára a hang „végtelen”, vagyis tapasztalhatatlan, felfoghatatlan.

(2) Másodszor a végtelen az, amin nem vagy csak ritkán lehet végigmenni (tapasztalni, felfogni).

(3) Harmadszor az, amin természete szerint végig lehetne menni, de ténylegesen ez mégsem történik meg.

(4) Negyedszer valami lehet végtelen a hozzáadás, a kivonás, avagy mindkettő tekintetében.

Az 1. típusú végtelent nevezhetjük mindenoldalú, azaz *abszolút végtelennek* – megegyezően a „láthatatlan hang” illusztrációjának a tartalmával. A végtelen második fogalma a közkeletűen *aktuálisnak nevezett végtelen*, melynek létét Arisztotelész nem tagadja teljes mértékben.⁷ A 3. és a 4. végtelenfogalom – a *potenciális végtelen* – más szövegrészekben szorosan összekapcsolódik. Így a *Fizikában* csak az első három végtelenfogalom szerepel. Az, hogy a *Metafizikában* negyedikként felsorolt típus valójában a harmadikhoz tartozik, világosan megfogalmazódik a *Fizika* egyik állításában, melyben Arisztotelész kijelenti:

¹ Vö. pl. a latin „peritus” (tapasztalt, jártas) s a német „Erfahrung” (tapasztalat) kifejezésekkel.

² Az *apeirosz* – alakilag az *apeiron* hímnemű alakjával megegyező kifejezés – „tapasztalat nélkülit”, „tapasztalatlant” jelent.

³ Az *apeiron* PER gyöke ugyanazt fejezi ki, mint az azonos alakú latin praefixum: a valamin keresztül vezető mozgást.

⁴ *Fizika*, 203b.

⁵ Nem helyes tehát az a megállapítás, mely szerint csak a patrisztikus kor vezette volna be az *apeiron* pozitív isteni attribútumként. Nazianzosi Gergely az *Eunomiosz ellen* írt értekezésében valóban ekként alkalmazza az *apeiron* kifejezést Istenre; de a kontextus világossá teszi, hogy az író fő célja Eunomiosz gnóosztikus állításának a cáfolata. Eunomiosz ugyanis lehetségesnek tartotta a teljes, kimerítő istenismeretet. Ezzel szemben hangoztatja Gergely a határtalanság, végtelen attribútumát; ám ez, Arisztotelészt olvasván világos, nem jelent lényegi újdonságot. A valószínű újdonság nem az *apeirosz* teisztikus alkalmazásában, hanem a kinyilatkoztatás teológiai megalapozásában keresendő. Ez ugyanis Isten önközléséről szól, s ennyiben a klasszikus *apiron* fogalmát meghaladja, átalakítja.

⁶ 1066a-b.

⁷ A csak „ritkán” meghaladható végtelen fogalma feltehetően kozmológiai tartalmú: csak az egyes világciklusok végén megvalósuló átalakulásban történik meg az, hogy ez a „végtelen” végéhez ér.

Beszédünk nem fosztja meg a matematikusokat elméletüktől (*theoría*), amikor kimutatjuk, hogy a végtelen nem létezik ténylegesen (*energeia*) a növekmény értelmében; aszerint, amin nem lehet túllépni (*adiexitéon*). Valójában nekik nincs szükségük a végtelenre és nem is használják azt.⁸

„A növekmény értelmében” kitétel alapján elfogadhatjuk, hogy a matematikai végtelen az, ami e szerint nem létezik ténylegesen. Így a matematikai végtelen potenciális, ami megfelel a fenti (3) és (4) definíciónak. Másfelől az a végtelen, „amin nem lehet túllépni”, az idézetben – feltevésünk szerint – már nem a matematikai végtelenre utal, hanem *szövegtorlódás következtében* az abszolút végtelenre; arra, amit a matematikusok „nem használnak”.⁹ Mindent összevéve jól látható, hogy a filozófus felfogásában létezik egy végtelen, mely felfoghatatlan, „meghaladhatatlan”, mondhatjuk: abszolút végtelen (fentebb: 1.). Ezzel szemben az aktuális végtelen fogalma „az, amin nem, vagy csak ritkán lehet végigmenni”. Arisztotelész tehát megengedi az aktuális végtelen fogalmát. De ennek beláthatóságát megszorításokkal kezeli („ritkán”). Potenciális végtelennek a matematikait, abszolútnak a *to theion* értelmében vett végtelent tartja. Erre más helyek is utalnak, például:

A végtelen tehát nem létezik másként, hanem ekként létezik, lehetőségileg és fogyatkozásban. Ténylegesen pedig úgy létezik, ahogyan azt mondjuk, hogy „nappal” és „játékok”.¹⁰

A lehetőségi (potenciális, *dünamei*) végtelen, mely itt „csak fogyatkozásban” szerepel, azonosnak mondható a matematikusok által „használt” végtelennel, mely vagy növekszik, vagy csökken, szemponttól függően. Ez a potenciális végtelen arisztotelészi fogalmának felel meg. A tényleges (aktuális, *entelekeheia*, *energeia*) végtelen a fenti idézetben, kifejtetlenül, hasonlat formájában jelenik meg. E hasonlat – a „nappal” és a „játékok” – jelentése a ciklikusságra utal: ahogyan a nappal visszatér, ahogyan az olümposzi játékok ismétlődnek, úgy értendő az aktuális (tényleges) végtelen fogalma: mint visszatérőn ismétlődő mozgás.¹¹ Az aktuális végtelen e ciklikus felfogása azonban árnyalható. A „nappal” talán nem csupán azt jelenti, amit az egyszerű – kronológiai – ciklikusság szerint tulajdonítanánk neki, hanem tágabb értelemben vonatkozik arra a ciklikusságra is, melyről az egyik platóni kozmológiai mítosz számol be. Eszerint a valóságfolyamat bizonyos ciklikusságban valósul meg, melynek kezdőpontja az istenek világindító tevékenysége, kibontakozása az emberi autonómizálódás folyamata, végpontja pedig az „istenek visszatérte”.¹² E ciklikusság bizonyos értelemben

⁸ Uo. 207b. Vö. még „Bizonyos módon a hozzáadás szerint vett végtelen ugyanaz, mint az osztás szerinti.”, Uo. 206b.

⁹ A szöveg nehezen értelmezhető voltát jelzi, hogy egyes kéziratokban a „nem létezik ténylegesen” helyett a „ténylegesen létezik” szerepel. A zavart az okozza, hogy nem teljesen világos, mire vonatkozik „a végtelen nem létezik ténylegesen”. Álláspontom szerint a „létezik” vagy „nem létezik” kérdése végeredményben erre vonatkozik: létezik-e az abszolút végtelen ténylegesen, avagy nem. A válasz Arisztotelész alapján inkább igen, mint nem. A matematikai végtelen nem létezik ténylegesen, de az aktuális végtelen igen. Az a kérdés, hogy az abszolút végtelen aktuális-e, nehéz; úgy tűnik, hogy amikor Arisztotelész a végtelentől elvitatja a létet (*ouszia*), akkor az abszolút végtelenre vonatkozóan teszi ezt, vö. a „platonistákon” gyakorolt kritikáját, *Fizika* 203a. Különös, hogy éppen a platonistáknak tulajdonít ilyen nézetet, amikor másutt épp Platónót vádolja azzal, hogy nem tekinti létnek azt, ami „túl van a léten”, vö. fentebb 13. §. A szövegtorlódás egyébként, mint másutt is, talán szándékos; azt szolgálja, hogy csak gondos olvasás által lehessen elkülöníteni az egyes fogalmak körét.

¹⁰ Uo. 206b.

¹¹ Ez is megerősíti az aktuális végtelen kozmológiai jelentését.

¹² „S ekkor az isten... ismét elfoglalja helyét a kormányrúd mellett és ellenkező irányba fordít mindent...” (*Politikosz*, 273e). Külön megválaszolandó kérdés, hogy a platóni „kozmológiai mítoszok” mennyiben kozmológiaiak; s mennyiben antropológiaiak. Ezzel vö. az *Állam* ismert helyét: „Értem: arra az államra gondolsz, amelyet most alapítottunk, amely csak gondolatban létezik, mert ilyen a világon nincs... De az égben alighanem van egy minta annak a szemee előtt, aki ezt meg akarja látni, s a maga bensejét a látottak szerint megszervezni. Az mellékes, hogy van-e valahol, vagy lesz-e: mindenesetre csak ennek az államnak az ügyeit intézheti, másét semmi esetre sem.” (592b, Szabó M. fordítása).

vett végrehajtása a platonikus filozófia voltaképpeni célja, ti. „a lélek átvezetése (*periagóge*) az éjsötét nappalból az igaziba, a létezőhöz felvezető útra.”¹³ A „nappal” ezen elérése talán összefügg azzal a nappalal, amire Arisztotelész utal; amiképpen az „olümposzi játékok” ciklikussága sem egyszerűen kronológiai visszatérést, hanem a világrend bizonyos, jelképesen felmutatott, de valóságosan bekövetkező megújulását fejezte ki.

Arisztotelész nagy valószínűséggel ehhez kapcsolódó gondolatokra utal, amikor kijelenti, hogy „a végtelen éppen ellentétesnek bizonyul azzal, aminek állítják”.¹⁴ Az ellentétesesség e gondolata – ami más vonatkozásban a bölcsesség megszerzésével kapcsolatban ugyancsak elhangzik – arra utal, hogy az abszolút végtelen mind az aktuális, mind a potenciális végtelen „végtelen” *ellentéte*.¹⁵ Ez az a végtelen, melyre áll, hogy „a végtelen mint végtelen ismeretlen” (*agnóosztón*);¹⁶ ez a végtelen az, ami „nem állhat arányban a végessel”;¹⁷ s az, amire az arisztotelészi *végtelentézisek* vonatkoznak. Ezen, a *de caeló*ban olvasható tézisek szerint

1. véges nem hathat végtelenre;
2. végtelen nem hathat végesre;
3. végtelenek nem hathatnak egymásra.¹⁸

A szövegrész, melyben Arisztotelész meghatározza ezeket a tételeket, annak cáfolatával foglalkozik, hogy létezne „végtelen test”. Ez a probléma másutt is foglalkoztatja a szerzőt¹⁹, s valójában csodálható, hogy efféle kérdés ily elmélyült figyelemben részesül. A tézisek megfogalmazása során kiderül, a fő kérdés az, hogy a világmindenség mozgatója test-e. Ennek cáfolataként fejt ki a téziseket a szerző; s e cáfolat summája abban foglalható össze, hogy a végtelen *testként* nem mozgatható.²⁰

A végtelennek mint testnek a cáfolata összefügg annak tagadásával, hogy a végtelen „különálló létező” lenne (*afóriszmenon*).²¹ Az *afóriszmenon* jelentése ebben az esetben *határolt egység*; s e cáfolat a fentiekből, illetve a végtelen test tagadásából érhetően következik. Amiről itt szó van, az ismét az abszolút végtelennek mint *afóriszmenon*nak a *lehetetlensége*. Az abszolút végtelen tehát nem létezhet sem elkülönítve a végestől, sem azzal úgy összekapcsolva, ahogyan két testi létező egymáshoz kapcsolódik. Ha mégis van kapcsolat véges és végtelen, illetve az abszolút végtelen és az aktuális végtelen között, azt nem a *peperanthai*, a „határolni” ige fejezi ki megfelelően, hanem a *hapteszthai*, az, ami „érint”. Ez utóbbiban az érintő reálisan nem érint, csupán végtelenül közelítve.²² S ha mindez nem lenne elég világos az abszolút végtelen mivoltára vonatkozólag, úgy a befejező gondolatmenet egyértelmű meghatározását adja a gondolkodás korlátosságának. Eszerint „a gondolkodásban hinni igencsak szokatlan; mert nem a dologban van a túlzás vagy a hiány, hanem a gondolkodásban... A gondolkodás ugyanis járulékos (*szünbebéken*).”²³ Ez megerősíti

Világosság
2002/4–5–6–7

Mezei Balázs:
Arisztotelész
és Cantor
a végtelenről

¹³ *Állam* 521c.

¹⁴ *Fizika*, 207a.

¹⁵ „Ha tehát ezt a tudományt megszereztük, épp az ellenkező állapotba kell bennünket juttatnia, mint amelyben a kutatás kezdődni szokott.” *Metafizika*, 983a.

¹⁶ *Fizika*, 187b.

¹⁷ *De caelo*, 274a.

¹⁸ Uo. 275 a-b. Érdemes felfigyelni arra, hogy Arisztotelész többes számban beszél a végtelenekről (*apeiroi*). Az a kérdés, hogy e kijelentésnek van-e matematikai értelme, nem felesleges, hiszen a rákövetkező fejtegetések ezzel foglalkoznak. A szerző azonban éppen azt mutatja ki, hogy a végtelenek kölcsönös operabilitása nem fogadható el.

¹⁹ *Fizika*, 206.

²⁰ Amiben burkoltan benne rejtőzik a *Metafizika* egyik nevezetes konklúziója, mely szerint a mozgatás „mintegy a szeretet által” történik.

²¹ *Fizika*, 208a.

²² „Más ugyanis a határolás és az érintés”, uo.

²³ Uo. Ez azt is jelenti, hogy az abszolút végtelen nem gondolható el. Nemcsak azért nem, mert a véges nem hathat a végtelenre, hanem azért sem, mert a gondolkodás „nem marad meg a létezésben” (*oukh hüpomēnontos tou lambanomenou*, *Fizika*, 208a 20.). Mindig a létet feltételezve halad a nem-létezés felé; míg az, ami a létet létesíti (mozgatja) nem „ebben az irányban” található.

tehát, hogy az arisztotelészi felfogás legvilágosabban a *Metafizika* némileg egyszerűsített listája alapján adható vissza. S ebben döntő szerep jut annak a megkülönböztetésnek, ami az abszolút és az aktuális végtelen között áll fenn.

Az *afóriszmenon* érelmében vett végtelen az újkori gondolkodás során ismét fontos szerepet játszik, mégpedig Georg Cantor műveiben. Cantor munkásságának jelentősége közismert a halmazelmélet, ezen belül is a transzfinit – „végtelenül nagy” – számok felfedezésében, meghatározásában és alkalmazásában. A matematika egyik legfontosabb alakjáról van szó, aki méltatója szerint hozzátartozott „az aktuális végtelen tudományos meghódításához”.²⁴ Cantor matematikai tevékenysége eladdig ismeretlen területeket nyitott meg; miként az is, hogy saját felfogásában eredményei a *végtelenproblematika filozófiai áttértelemezését* alkották. Néhány gondolatát, melyek szempontunkból jelentősek, az arisztotelészi *afóriszmenon* fogalmához kapcsolhatjuk. Cantor szerint ugyanis Arisztotelész téved, amikor a végtelennek mind *afóriszmenon*nak a létét tagadja. Ezzel szemben a matematikus szerint a transzfinit számok meghatározásuk szerint „az aktuális végtelen határozottan elhatárolt alakzatai vagy módosulásai (*afóriszmena*)”.²⁵

Cantor tehát a transzfinit számokat az „aktuális végtelen” és a véges közé helyezi. Az „aktuális végtelen” oly módon alkotja a transzfinit számokat, hogy ez utóbbiak az előbbi modifikációjaként határozhatók meg. E gondolatban az rejlik, hogy az „aktuális végtelen” cantori fogalma maradéktalanul felfoghatatlan. Egyik méltatójának találó összefoglalása szerint a cantori transzfinit számok két feltevésen nyugszanak: (1) van Ω abszolút végtelen; (2) Ω felfoghatatlan.²⁶ E feltevések Cantor vonatkozó dolgozataiban azonban csak fokozatosan fogalmazódnak meg; s ennek során többször is félrevezető a matematikus szóhasználata. Rekonstruálható, hogy Cantor az „abszolút végtelen” fogalmát mindvégig azonosítja az „aktuális végtelen” fogalmával, s amikor Arisztotelészre hivatkozik, nem látja meg a fentebb tisztázott különbséget az „abszolút végtelen” és az „aktuális végtelen” között. A *végtelenproblematika filozófiai tisztázása* során – ami még matematikája mellett is jelentős vállalkozásnak tekinthető²⁷ – Cantor komoly erőfeszítést tesz annak érdekében, hogy fogalmait világosan elkülönítse egymástól. Felosztása szerint háromféle végtelent különböztethetünk meg:

(1) Abszolút végtelenről beszélünk, amennyiben „a világon túli, örök és mindenható Istenben áll fenn, s amit *natura naturans-nak* mondunk”.²⁸

(2) Transzfinitumról (transzfinit végtelenről) beszélünk, amennyiben konkrét és a *natura naturata* körében áll fenn.²⁹

(3) Végül beszélhetünk aktuális végtelenről, mely esetben absztrakt – matematikai – értelemben beszélünk róla.

A cantori matematika főképpen a (2) és a (3) típus végtelenek egymáshoz való viszonyáról szól, noha teoretikusan az (1) típus is jelentős szerepet játszik. Cantor az absztrakt-matematikai végtelent másutt nem sajátos értelemben vett végtelennek (*uneigentlich Unendliches*) mondja; míg a transzfinitum ezzel szemben sajátos értelemben vett végtelen (*eigentlich Unendliches*).³⁰ Az alábbi táblázat azt mutatja meg, hogy ezeket az elnevezéseket hogyan csoportosíthatjuk:

²⁴ Fraenkel utószava, in: Cantor, Georg, *Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Hildesheim: Georg Olms, 1966. 483. o.

²⁵ Cantor, *Abhandlungen*, 396. o.

²⁶ Rucker, Rudy, *Infinity and the Mind: The Science and the Philosophy of the Infinite*, Princeton: Princeton University Press 1995. 80. o.

²⁷ Megfigyelhető, hogy életművének matematikai tárgyalásai egyáltalán nem látják át Cantor filozófiai-teológiai meg-alapozásának jelentőségét, mélységét és eredményességét. Erre példa Rudolf Taschner *Das Unendliche* c. könyve Springer, Berlin, 1995. Ellenpéldaképpen, mások mellett, Rucker idézett, sok szempontból kiváló könyve szolgál.

²⁸ „Teremtő természet”, Cantor, i. m. 372. o. skk.

²⁹ „Teremtett természet”, uo.

³⁰ Uo., 391. o.

3. típusú végtelen vagy <i>apeiron</i>	potenciális végtelen	végtelenül változtatható <i>végtesség</i>	syncategorematicen ifinitum	nem sajátos értelemben vett végtelen	
2. típusú végtelen vagy <i>afóriszmenon</i>	aktuális végtelen	végtelenül változtatható <i>végtelen</i>	categorematicen ifinitum	sajátos értelemben vett végtelen	transzfinitum vagy suprafinitum
1. típusú végtelen vagy <i>abszolútum</i>	abszolút-aktuális végtelen	végtelenül változtathatatlan végtelen	ifinitum simplex	Ω -végtelen.	

Cantor elnevezései némi történeti értelemben vett önkényt mutatnak, amennyiben az *apeiron* elkülöníti az *afóriszmenontól*. Míg az utóbbinak a végtelen „sajátos” fogalmát tulajdonítja, az előbbi a potenciális végtelen körébe számúzi. Mint fentebb láttuk, a kifejezések ezen alkalmazása nem felel meg az arisztotelészi felfogásnak. Viszont jól megérthető akkor, ha az „aktuális végtelen” és az „abszolút végtelen” fogalmait egymásba csúsztatjuk, s nem válik világossá kategorikus különbségük. A „categorematic” és „syncategorematic” végtelen különbsége azt jelenti, hogy az utóbbit csak más állításokkal együtt, jelzőként használhatjuk; vagyis nem sajátos értelemben. A „categorematic” végtelen viszont az, mely már sajátos; noha mégsem fokozhatatlan értelemben. Ezt mutatja az 1. típusú végtelen, az abszolút végtelen síkja, melyet Cantor csak hosszú évek munkájával volt képes világosan elkülöníteni a transzfinit végtelentől. Az *ifinitum simplex* Aquinói Tamás kifejezése az abszolút, jelzőtlen végtelenre. Cantor törekvése az volt, hogy a sajátosan, categorematicen vett végtelen körében kimutassa olyan számok létét, melyeket a matematikai gondolkodás korábban nem ismert: ezek a transzfinit, végtelenül nagy számok.

A transzfinitum körében Cantor többféle meghatározott, matematikailag konkrét végtelenfogalmat különböztet meg. Már az első, e tárgyban jelentékeny dolgozatában „abszolút végtelen” számokról beszél, amikor a transzfinitum első osztályát határozza meg. Szavai szerint a véges egész valós számok képzése azon az elven nyugszik, hogy egy már képzett n számhoz bizonyos egységet adunk. Az így képzett szám számossága *végtelen*, amit Cantor az azóta a matematikában már bevett – és a ∞ jeltől tudatosan megkülönböztetett – ω jellel látta el. Az ω a véges egész számnak mint halmaznak a határa (*Grenze*). Az ω az első olyan egész szám, mely n -re következik, amely tehát nagyobb, mint n . De ω is növelhető, ha nem is $\omega+1$... módján, de a $\omega + \omega$ ($= 2\omega$) módján. Ebből adódik, hogy van olyan végtelen szám, amely valamennyi ω számhoz képest a következő legnagyobb szám, s ez ω^ω . Mint Cantor, kijelenti, „az új számok képzésének láthatóan nincs vége”.³¹ Ez mutatkozik meg abban, hogy Cantor hamarosan újabb transzfinitumot vezet be: az \aleph számokat. A véges tőszámok halmazát ekkor „véges halmaznak” nevezi; minden mást azonban „transzfinit halmaznak”; s az erre következő tőszámokat „transzfinit tőszámoknak”. Ezek közül a legkisebb tőszám az „alef-null” (\aleph_0).³² Valamennyi \aleph tőszám rendszerét Cantor – a héber ábécé utolsó betűjével – *Tav*nak nevezi. A végtelen tőszámok, valamennyit összevéve, a Cantor által Ω -rendszernek nevezett *legvégső összefüggés* számai. Az Ω az a végső határ, amint már nem lehet túllépni; ami már maga is felfoghatatlan. Noha Cantor hosszú időn át úgy látta, hogy az Ω -rendszer valamilyen értelemben – végtelen – egység, élete vége felé ráébredt arra, hogy ez nem lehetséges.³³ Az Ω -rendszer, mint ekkoriban megállapítja, „inkonzisztens”: ezt a sokaságot

Világosság
2002/4–5–6–7

Mezei Balázs:
Arisztotelész
és Cantor
a végtelenről

³¹ Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, uo., 195–196. o.

³² Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, uo., 292 o. skk.

³³ 1897. során fedezte fel ezt a nehézséget és a „transzfinitum paradoxonának” nevezte el. Mivel felfedezését le-
velben közölte Hilberttel, tudjuk, hogy meglátása nem Burali-Forti tanulmányából fakad, mely ugyanezen évben
jelent meg és rámutatott erre a nehézségre. E probléma logikailag megegyezik azzal, amit Gödel a nem teljességi
tételeiben 1930-ban matematikailag is kimutatott és bebizonyított.

lehetetlen egységként, valamilyen „kész dologként” felfogni.³⁴ Ha ugyanis Ω konzisztens (egységként felfogható) volna, akkor, mint jólrendezett halmazhoz, olyan d szám tartozna hozzá, mely nagyobb volna, mint Ω -rendszer valamennyi száma együttvéve. Ámde mivel Ω minden számot magába foglal, d is beletartozik; ezért ha Ω konzisztens volna, d nagyobb lenne, mint d , ami ellentmondás. Ezért tehát, mint megállapítja, „minden szám Ω -rendszere inkonzisztens, abszolút végtelen sokaság.”³⁵

Ezzel visszaértünk ahhoz a megállapításához, mely szerint a cantori felfogás két alapfeltevése az, hogy (1) van Ω abszolút végtelen; (2) Ω felfoghatatlan. A kérdés mármost az, hogy a végtelenproblematika e matematikája hogyan kapcsolható írásunk adott problémaköréhez. Induljunk ki abból, hogy a cantori felfogás második feltevése formális és tartalmi (szintaktikai és szemantikai) ellentmondást hordoz. Felmerül ugyanis a kérdés: ha az abszolút végtelen felfoghatatlan, hogyan van róla tudomásunk? A fentiek során már olvashattuk, hogy Cantor felfogásában a transzfinitum az „aktuális végtelen” modifikációja (*afóriszmenon*). Ez bizonyos értelemben éppen erre a kérdésre kínál választ; ha ugyanis Ω megismerésünk tárgya, nem önmagában az – mivel önmagában inkonzisztens –, hanem mint önmaga modifikációja. Ezt Cantor úgy fejezi ki, hogy az Ω -rendszer természetes nagyságrendje szerint bizonyos sorozatot alkot, mivel Ω bármely része *tartalmaz egy legkisebb számot*. Az Ω -rendszer sorozata Ω' . Ebben ($0, 1, 2, 3, \dots, \omega_0, \omega_0+1, \dots, g, \dots$) minden egyes Ω' -t megelőző szám valamennyi azt megelőző szám *típusa*. A megelőző számok tulajdonságai Ω -re nézve ω_0+1 -ben jelölhetők meg. Ha Ω tulajdonságai nem lennének hozzáférhetők az Ω' sorozat adott típusaiban, akkor például P tulajdonság csak Ω -ra lenne jellemző, s ezzel Ω mégis felfogható lenne – ez azonban ellentmondásos. Mivel tehát Ω felfoghatatlan, P tulajdonsága az Ω' sorozatban *reprezentált*. Másképpen fogalmazva: elgondolhatom azt, hogy Ω bizonyos tulajdonsággal rendelkezik, de ezt a tulajdonságot nem Ω -ban konstátálom, hanem Ω' sorozatának adott típusában, tehát egy felfogható típusban.³⁶

Az abszolút végtelen és az aktuális végtelen elválasztását Cantor csak hosszú évek alatt tette meg. Jól mutatja ezt, hogy első halmazelméleti dolgozatában a transzfinit számokat „abszolút-végtelen” számoknak mondja.³⁷ A fentebb közölt hármass felosztás (abszolút-transzfinit-potenciális végtelen) már egy tisztázódási folyamat eredménye, melynek során Cantor a legmélyrehatóbban feldolgozta a filozófiai végtelenfogalmak egész történetét.³⁸ Meglepő ugyanakkor, hogy ezenközben nem figyelt fel az arisztotelési különbségtételre az önmagában vett *apeiron* és az aktuális végtelen között. Vegyük például megállapítását, mely szerint

„A végtelentől való félelem oly rövidlátásra vall, mely megakadályoz bennünket abban, hogy meglássuk az aktuális végtelent, noha ez, a maga legmagasabb formájában, teremtett és fenntart bennünket, s másodlagos, transzfinit formájában gyakran előfordul körülöttünk és értelmünket is áthatja.”³⁹

Ebben az idézetben az abszolút és az aktuális végtelen egyazon „aktuális végtelen” két különböző szintje vagy formája, megfelelően a fentiekben bemutatott álláspontnak, miszerint a transzfinit az abszolút végtelen *modifikációja*. Amennyiben Cantor ezt a modifikációt tartja azonosnak az arisztotelési *afóriszmenonnal*, úgy állítása az, hogy az *afóriszmenon* Arisztotelésznél az abszolút végtelen „modifikációja”. Ez azonban így bizonyosan nem állja meg a helyét. Arisztotelész, mint a

³⁴ Levele Dedekindhez, i. m., 443. o.

³⁵ Uo., 445. o.

³⁶ Ezt nevezik másképpen reflexiós elvnek, vö. Rucker, i. m. 50. o.

³⁷ Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten, uo., 195. o.

³⁸ Cantor tökéletesen olvasott szanszkritul, ógörögül, héberül és természetesen latinul is. Elemzései hatalmas filozófiatörténeti ismeretről tanúskodnak, valamint a kortárs szakirodalom beható tanulmányozásáról is.

³⁹ Idézi Rucker, i. m. 43. o.

végtelentézisek ismertetésekor láttuk, visszatérően *paradoxizálja* az abszolút végtelennel kapcsolatos gondolatmenetet; aminek jól meghatározható oka van. További tényező Cantor félreértésében az, hogy az „aktuális végtelen” és a „potenciális végtelen” a középkori gondolkodástól kezdve – és a 19. századi matematikátörténetet is meghatározva – lényegében az „isteni” és a „világi” dualizmusát fejezte ki. Ezért a teológusok, majd egyes matematikusok is vehemensen tiltakoztak az ellen, hogy az aktuális végtelen felfogható lenne. Más oldalról az „aktuális végtelen” tagadása, elvetése a teológiai dimenzió elutasítását fejezte ki.

Az aktuális és potenciális végtelen dualizmusa, mint láttuk, e redukált formában nem Arisztotelésztől ered. Aquinói Tamás azonban világosan e nézet egyik forrása, noha felfogásában a leegyszerűsítés még egyáltalán nem ment végbe; pusztán az történt, hogy az „aktuális végtelen” arisztotelészi fogalmát az isteni végtelenségnek tulajdonította. Amikor Tamás kifejti, hogy „a szám egyik faja sem végtelen”, illetve hogy „az aktuálisan végtelen sokaság lehetetlen”,⁴⁰ a „végtelen” és az „aktuális végtelen” kifejezései szigorúan teisztikus tartalmúak: Isten az, aki szoros értelemben végtelen, aktuálisan végtelen. Tamás továbbá különbséget tesz *a természettől fogva aktuálisan végtelen*, illetve *az esetleges aktuálisan végtelen sokaság* között. Az elsőt világos logikával utasítja vissza: természetesen aktuális végtelen sokaság nem létezhet, mivel fennállásához végtelen sok tényező lenne szükséges, aminek következtében soha nem jönne létre. Az *esetleges aktuális végtelen sokaságot* Tamás a szám mivoltára hivatkozva veti el. Megállapítása szerint *quilibet numerus est multitudo mensurata per unum*, bármely szám egységgel mért sokaság. Ezért egyik fajtája sem lehet „aktuálisan végtelen”.⁴¹

Cantor éppen ezt az állítást vonja kétségbe; s ezzel mások is egyetértenek.⁴² Itt azonban bizonyos félreértés húzódik meg. Amikor Tamás tagadja, hogy a szám „aktuálisan végtelen” lenne, az *abszolút végtelenre* gondol és nem a potenciálisra. A potenciális végtelen „a nagyság felosztása”, tehát olyan, ami hozzáadással, illetve elvétellel jár. Márpedig Cantor maga is állítja, hogy a transzfinit számok „többszörözhető” (*noch vermehrbares*).⁴³ Ezáltal azonban a tamási felfogás szerint a *potenciális szám* körébe esnek. Továbbá Tamás meghatározása a számra vonatkozólag – egységgel mért sokaság – világosan érvényes a transzfinit számokra is, amennyiben azok „végtelen *halmazok*”. Halmazok annyiban, hogy bizonyos „egység által mért sokaságok”, ti. transzfinit egységek által mért „végtelen” sokaságok. Éppen a fent jelzett Ω -*inkonzisztencia* mutatja meg, hogy az, ami abszolút értelemben vett végtelen, nem eshet egység alá. Ami azonban nem ebben az értelemben végtelen, egységgel mért, lett legyen ez finit vagy transzfinit. Tehát amikor Tamás elveti az „aktuálisan végtelen sokaság” lehetőségét, elvileg egyaránt gondolhatott volna egyrészt a véges, másrészt a transzfinit sokaságok halmazaira is. Az „aktuális végtelen” tagadása a számra vonatkozólag úgy fordítható le cantoriánus terminusokra, hogy azt mondjuk:

bármely véges vagy transzfinit szám egység által mért sokaság, mely meghatározása szerint nem lehet Ω -végtelen.

Mindemögött az a probléma húzódik meg, melyet Cantornak még akkor sem sikerült kiküszöbölnie elméletéből, amikor már élesen megkülönböztette a „teremtetlen természet” abszolút, és a „teremtett természet” transzfinit végtelenjét. Itt ugyanis az a kérdés merül fel, hogy az Ω szám megismerhetetlensége valóban biztosított-e a fentebb említett sorozatiság bevezetésével, vagyis a reflexiós

⁴⁰ STh, I, 7, 4.

⁴¹ Uo.

⁴² Vö. Rucker, i. m. 49. o.

⁴³ Cantor, I. m. 376. o.

elvvel. Erre azt válaszolhatjuk, hogy tagadó értelemben biztosítottnak tűnik, de állító értelemben nem. Vizsgáljuk meg ezt az állítást a reflexiós elv egy leírása alapján!

Rucker szerint

Az értelemben létező valamennyi S gondolatra érvényes, hogy az ‘S lehetséges gondolat’ ugyan-csak megvan az értelemben. A reflexiós elv szerint kell lennie egy olyan V gondolatnak, mely szerint minden V-ben létező S-re érvényes, hogy az ‘S lehetséges gondolat’ megvan V-ben is... De vegyük észre, hogy V szükségképpen végtelen. Van tehát végtelen gondolat.⁴⁴

A ‘V végtelen’ itt transzfinit végtelent jelent – az értelem köréhez képest vett *meghaladó* (transzcendentális) végtelent. A reflexiós elvre való hivatkozás azt jelenti, hogy eleve abból indulunk ki: az, ami valamiben létezik vagy érvényes, valami másban is létezik vagy érvényes. Mivel az értelem körét végesként határozzuk meg, V köre, mint láttuk, transzfinit.

Ez a gondolatmenet azonban mégsem válaszol arra az alapvető kérdésre, hogy az, ami mindenoldalúan, abszolút értelemben végtelen – Ω – miképpen válik hozzáférhetővé; például miképpen válik itt és most gondolatunk tárgyává. A reflexiós elvet az abszolút végtelen fogalmából vezetjük le, mint olyan elvet, mely éppen ennek az abszolút jellegnek *a biztosítéka*. Ezzel azonban, ismételjük, csak negatív értelemben véve szavatoljuk Ω hozzáférhetőségét: abból kiindulva, hogy minden más megoldás az abszolút jelleg sérelmét jelentené. Abból indulunk ki, hogy *mivel* valami van, *ezért* van magyarázata is. Ezzel már posztuláljuk, hogy Ω ténylegesen el van érve. A kérdés azonban nem az, hogy amennyiben valaminek rendelkezünk a fogalmával, milyen módon vesszük fel egy argumentum tényezői közé; hanem arról, hogy miképpen lehetséges akár posztulálni, akár szupponálni, akár bármilyen más módon felvenni e tényezők körébe.

Egyes javaslatok szerint különbséget kell tennünk „racionális” és „intuitív” ismereti mód között; s ami racionálisan nem érhető el, az intuitíve elérhető. Ez a megoldás különösen népszerű platonizáló matematikusok, illetve filozófólok fizikusok között.⁴⁵ Ezen a ponton általában a szokásos javaslatok következnek arra nézve, hogy a megvilágosodás, a misztikus elmélyedés, a *satori* és hasonlóképpen biztosítják azt, amit a matematikai racionalitás már nem képes nyújtani. Valamennyi ilyen és ehhez hasonló kísérletről elmondhatjuk, hogy elvétik a kérdés lényegi nehézségét. A nehézség nem az, hogy milyen *módon* lehet elérni az Ω -t, hanem az, hogy *egyáltalán* miképpen lehetséges ez. Ha ez biztosított, nyugodtan tárgyalható a *modus* kérdése; ha azonban ez nem biztosított, nincs értelme módozatokról beszélni.

Cantor ezen a ponton is mélyebbre hatol értelmezőinél. Fentebb már utaltunk arra, hogy számára az *afóriszmenon* az abszolút végtelen modifikációja. Ezt a gondolatot kétféleképpen lehet felfogni. Egyrészt „spinoziánus” értelemben, s ekkor egyfajta szükségszerűségről beszélhetünk a modifikálódás folyamatát, valamint az abszolútum és annak modalitásai összefonódását illetően. Maga Cantor is pontosan látja, hogy a végtelen efféle redukciója – pontosabban: az abszolút és az aktuális végtelen „felcserélése” – fatális gondolati következményekhez vezet, ti. a végtelen valós fogalmának elvesztéséhez.⁴⁶ Másrészt felfoghatjuk úgy is, hogy az Ω -abszolútum „teljes

⁴⁴ Rucker, i. m. 50. o.

⁴⁵ Lásd Rucker, i. m. Paul Davies igen gyakran nyilatkozik így, pl. *Isten gondolatai*, Kulturtrade, Budapest, 1995. 226. o. skk. Davies különösen jó példáját nyújtja annak a tudósnak, aki a maga szakterületén megbízható ismeretekkel rendelkezik, amit azután íráskészsége révén retorikailag jól megformált könyvekben dolgoz fel, mely könyvek másfelől, a szakterületén kívül eső gondolatmenetekben primitív hibákat mutatnak. Ilyen hiba az idézett könyvben például az, hogy Plótinosz „keresztény gondolkodó”.

⁴⁶ „Die meisten verwechseln sogar das Transfinitum mit dem seiner Natur nach unterschiedslos höchsten Einen, mit dem Absolutem, dem absolutem Maximum, welches natürlich keiner Determination zugänglich und daher der Mathematik nicht unterworfen ist.” I. m., 391. o.

szabadságában” nyilvánítja ki önmagát. Cantor erre utal, amikor arról szól, hogy „Isten jósága és dicsősége” nem csupán egy *finitum ordinatumot*, hanem egy *transzfinitum ordinatumot* is létrehozott, oly módon, hogy ez számunkra, a mi szempontunkból szükségszerűnek tűnik, noha önmagában nem az.⁴⁷ Más szóval Cantor fölismeri, hogy az, amit a transzfinitum matematikájával megkísérelt, végeredményben filozófiai-teológiai megalapozásra szorul, mégpedig nem annyira annak tudományos-szisztematikai, mint inkább tartalmi értelmében.⁴⁸ Cantor élete végén teljes erejével arra törekedett, hogy a transzfinitum matematikájának kereteit egy helyesen értett teisztikus felfogás szerkezetébe helyezze el. E kérdéskörrel mélyreható levelezésben állt korának néhány vezető teológusával, így Franzelin bíborossal.⁴⁹ A levelek tartalmából világossá válik Cantor törekvésének értelme és elmélyültsége. Értelme ugyanis — egyes matematikatörténetesek szkeptikus megjegyzései ellenére⁵⁰ — éppen az volt, hogy felismerte: a transzfinit matematikája nem egyszerűen egy elszigetelt, matematikai kérdéskör, hanem a nyugati gondolkodás egyik alapkérdéséhez, a végtelenproblematikához tartozik. Mélyreható megoldása tehát, a technikai részleteken túl, csak ebben a kontextusban várható. Cantor levelei másrészt elmélyültek, mivel hatalmas anyagismeretén túl világosan mutatják a gondolkodó bölcséleti fejlődését. E fejlődés csúcspontja abban foglalható össze, hogy az abszolút végtelen csak mint *Herrlichkeit*, „Isten dicsősége” ismerhető meg aszerint, ahogyan az megismerteti önmagát.

Világosság
2002/4–5–6–7

Mezei Balázs:
Arisztotelész
és Cantor
a végtelenről

⁴⁷ I. m. 400. o.

⁴⁸ Erre utal Rucker is, amikor azt írja, hogy a „halmazelméletet még akár egyfajta exakt teológiként is vehetjük”, i. m. 81. old. Nem vehetjük ekként, amennyiben a teológia nem csak formális, hanem tartalmi tudomány is. A halmazelmélet azonban tisztán formális marad.

⁴⁹ Leveleiből részlet in: Cantor, i. m. 399. o. ssk.

⁵⁰ Vö. Taschner, i. m.