Tudományközi beszélgetések: matematika

Az MTA Filozófiai Kutatóintézet *A 21. század tudományrendszere* című nagyprojektjének keretében indított tudományközi beszélgetéssorozat negyedik részében a matematikáról volt szó. A 2003. december 17-i találkozón T. Sós Vera, Laczkovich Miklós, Simonovits Miklós, Tusnády Gábor és Juhász István matematikusok beszélgettek filozófusokkal és más tudományágak kutatóival.

Tusnády Gábor azzal kezdte a beszélgetést, hogy a Könyvfakasztó Kiadó 2003-ban megjelentette Feldmár András 1992-ben, Debrecenben tartott előadásait *Beszélgetések Feldmár Andrással* címmel. A könyv utószavában Karátson Gábor az ősi kínaiakról írván bemutat hat ábrát:

1	2	3	4	5	6
———	— —	— —	———		———
———	— —	———	— —		— —
———	— —	— —	———		———
———	— —	———	— —	— —	
———	— —	— —	———	———	
———	— —	———	— —	— —	

A fenti táblázatban bitek láthatók: 1-ek meg 0-k. Az 1 egy hosszú vízszintes vonal, a 0 – a kínaiakra jellemző módon – két rövid vonal egy kihagyással. Itt tehát a nulla is valami, ami már önmagában fontos.

A változások könyve, a *Ji Csing* a *k'ien* (1) és *k'un* (2) hexagramokkal, Éggel és Földdel, az Atyával és az Anyával kezdődik. Ezek szent hexagramok: öt első vonaluk ezé is, azé is, alulról fölfelé haladva, mind tökéletes. Legfelső vonalaikban azonban valami félelmetesbe fordulnak át. A két legfelső vonal egymásnak esik, igazi világháború tör ki: Ég és Föld vére ömlik. A *k'ien* és *k'un* még egyértelmű: az első hexagram csupa (megszakítatlan) jang-vonal, a második csupa (megszakított) jin-vonal. A kezdeti katasztrófa után – matematikailag más nem is képzelhető el – ez az egyértelműség lebomlik, átalakul a jin- és jang-vonalak kombinációjává, a hátralévő 62 hexagrammá. Ezek feladata tulajdonképpen az egyensúly helyreállítása volna, másfelől viszont ők maguk az élet, a jelentésekkel teli hexagramsor, amely a kezdeti katasztrófa nélkül nem jöhetett volna létre. A nagy átkelés képe ez a hexagramsor, Ég és Föld hatalmas története, Ég és Föld igazi arculatának keresése, amelyben azonban *k'ien* és *k'un,* Ég és Föld eredeti arculata soha többé nem jelenik meg; ha megjelennének, akkor sem ugyanazt jelentenék már, amint az a hexagramsor bizonyos pontjain értésünkre van adva. A hexagramsor utolsó előtti, Átkelés utáni *(ki ci)* nevű hexagramjában (3) minden vonal a maga helyére kerül (a jang-vonalak páratlan helyen, a jin-vonalak páros helyen állnak). Az áhított cél elérése, sajnos, egyúttal minden mozgás megállását is jelenti, az Út elvesztését, a statikus halált, valami teljesen mozdulatlant, egészen mást, mint az első két hexagram döbbenetes szimmetriája volt.

Midőn már azt hinnénk, minden elveszett, mind a hat vonal az ellenkezőjére változik, és előttünk áll az utolsó hexagram, a *wei ci,* Átkelés előtt (4). A teljes káosz képe, ha tetszik, amelyben egyetlen vonal sincs a helyén! De amelyből minden lehet (számtalan lehetőséget rejt magában), talán valami más is, mint az eddigi hatvanhárom hexagram volt? A víz (5) fölött a tűz (6); talán ez is a villám? Mibe tekintünk itt bele? Mit jelent az „Átkelés előtt"? Szó, ami szó, vonalkombináció nincs több. Arról van szó csupán, hogy a történetek sohasem érnek véget? Vagy kilépünk az eddigi világból? Ilyesmiről a kínaiak persze nem szerettek beszélni; ez már Apokalipszis volna, a Jelenések könyve – de nekünk, képek között állva, egész jól összeáll a dolog.

Tusnádyt Karátson szövege kapcsán érdekelni kezdte, milyen módon lehetne a hatelemű bitsorokat úgy nyakláncra fűzni, hogy a szomszédosak távolságösszege minimális legyen. Számítógépes számításainak eredménye először 148 volt a hatelemű bitsorokra, de ezt az eredményt nem tartotta hihetőnek. A genetikai optimalizálás megolajozása után, máris 86-nál kötött ki, és végül eljutott 64-ig. A különböző eredményekben a különböző bitek száma persze változó. Egy másik felismerés, hogy az eredmény nem lehet páratlan. Az alábbi ábra gyönyörködtet, úgy tűnik, valami rejtett harmónia, valami tökéletesség született meg:

1000011110001110011111100111111110000000000000111100
11110011000000111111000111111111110010001100111110
01000000000000110100000000011110010001110000001111100
001110011100111000111111100001100000000111111000000
000111001100111111111110000001111100101111100000000
0001111111000010000110000110000000111111111111110011
110000000111100000011111110000000011111111000000000
0000000001111111111111000111100001

Tusnády Gábor azért a régi kínaiakat választotta előadásának témájául, mivel véleménye szerint a matematika az egyik legősibb szakma. Éppen olyan ősi, mint az a vágy, hogy az ember egyszerűsítse az őt körülvevő bonyolult és összetett dolgokat, néhány egyszerű szabály segítségével, megpróbálja megkeresni mindazt a matematika pici világán belül, amit a nagy világban nem látott.

A MATEMATIKA ÉS A TÖBBI TUDOMÁNYÁG KAPCSOLATA, INTERDISZCIPLINARITÁS

Laczkovich Miklós kérdéssel kezdte előadását: Fontos-e az interdiszciplinaritás, létezik-e egyáltalán? Laczkovich felidézte filozófiatanára, Márkus György 1962-es kijelentését, miszerint az ember eredetileg semmit nem tudott a világról, egyetlen tudomány létezett, a filozófia. Később egyre több tudás gyűlt össze, és a tudomány lassan kiszorította a filozófiát klasszikus helyéről. Az egyre szűkebb térbe szorult, és az eredetitől mindinkább eltérő problémákkal kezdett el foglalkozni. Hiszen azokat a kérdéseket, amelyeket eredetileg a filozófusok tettek fel önmaguknak, egyre inkább képes volt megválaszolni a tudomány.

Eredetileg egy tudomány létezett. Az újkor hajnalán az arabokon keresztül visszajött Európába a matematika. Fejlődni kezdett, sőt együtt fejlődött a fizikával. Newtonnál még nem válnak szét a dolgok, ugyanazok a matematikusok is, mint a fizikusok. Gauss például geofizikai mérésekkel is foglalkozott. Aztán elkezdett osztódni a tudomány, lassanként új ágak jelentek meg. Már létezett külön biológia és külön kémia, amikor megjelentek olyan problémák, amelyeket a biológiában kémiai módszerek alkalmazásával kellett megoldani – ez a biokémia –, ami jelenthet például valamiféle interdiszciplinaritást. De a biokémia ma már különálló tudományág. Az interdiszciplinaritás egy stádiumot jelent: valami megszületik, aztán hirtelen felnő. Az interdiszciplinaritás azt jelenti, hogy van két éppen gyorsan fejlődő tudomány, és létrehoznak valami újat, hatnak egymásra. A hatás egyébként sokszor egyirányú. Laczkovich szerint eredetileg problémák léteznek, amelyek megoldásra várnak, sokszor ezekhez kell párosítani különböző tudományágakat. Az interdiszciplinaritás gyakran felületességhez is vezethet, de szerencsére hosszú távon minden kihullik, ami felesleges, a tudomány állandóan tisztul.

A matematika a legkorábbi és egyben a legabsztraktabb tudomány. Newton munkássága – legyen az matematika vagy fizika – háromszáz éves késéssel érvényesült. Laczkovich ismét Márkust idézve elmondta, hogy az analízist kétszáz évente felfedezték, de mivel nem volt rá szükség, el is felejtették. Megijedtek attól, hogy a végtelen fogalmával milyen zűrök keletkezhetnek. De Newton korában már nem lehetett nélkülözni az analízist, ezért – bár sokan meglehetősen vitathatónak tartották (Lehet-e 0x0 egyszer 0, egyszer nem 0?) – fennmaradt. A valószínűségszámítás is nagyon sok gondot okozott megszületése idejében, talán csak 1963-ban jött létre igazán.

Később a fizika és a matematika szétvált egy ponton, de most ismét konvergálnak. Ez a viszony egy érdekes filozófiai kérdést vet fel. Az okság és az okozat megkérdőjelezése pozitivizmushoz vagy posztmodernizmushoz vezet, ami azt jelenti, hogy az emberek nem szeretnek a dolgok okáról beszélni, hanem azt mondják: ha ezt látom, akkor ez történik, ha azt látom, akkor az történik. Az okot mint olyat, a modern fizika szeretné kiküszöbölni. Ez azt is jelenti, hogy a fizikai cikkek jelentős része úgy néz ki, mint a matematikai cikkek, a matematikai cikkek jelentős része pedig fizikus lapokban jelenik meg. De nem mindig világos, hogy a két tudományág esetében pozitív konvergenciáról van-e szó. Sokszor előfordul, hogy a fizikusok kiderítenek valamit, amiről a matematikusok harminc évvel később úgy gondolják, hogy nem elég precíz, és elkezdenek intenzíven dolgozni a problémán. Viszont a fizikusokat ez nem érdekli, mivel ők már úgyis tudják.

A matematika már korábban is behatolt az élet legkülönbözőbb területeire. A hajóutak biztosítása kapcsán például előtérbe került a statisztika. Van statisztika a közgazdaságban, a biológiában stb. Világos, hogy a matematika gyorsan hatol be a mindennapi alkalmazásokba. A behatolás sebességét nehéz megbecsülni, de mindenképpen gyorsulás érzékelhető.

A kis Fermat-tétel a világ legkevésbé felhasználható tételének tűnt, most a titkosítás legalapvetőbb eszköze, jegyezte meg Laczkovich Miklós. Nagyon nehéz megjósolni a matematikában, hogy mi, mikor lesz használható.

Juhász István halmazelmélész a matematika alapjaival, a matematika világban elfoglalt helyével kapcsolatos gondolatairól beszélt. Véleménye szerint a matematika és a nyelv között speciális viszony áll fenn, ami esetleg arra vezethető vissza, hogy a matematika elvben teljesen formalizálható. Mégis tévedésnek tartja azt az elképzelést, hogy a matematika a természet nyelve volna. A matematika alkalmazásának és más tudományágakban való felbukkanásának alapja a matematikai modellek készítése. Mindig egy hétköznapi vagy természettudományos probléma jelenti a kiindulópontot, ám látni kell az eredeti probléma és a modell különbözőségét.

Nagyon alapvető kérdés a matematika és az igazság kapcsolata. A matematikus állításokat fogalmaz meg azon a bizonyos formális nyelven, és be akarja bizonyítani, hogy ezek az állítások igazak. Ez az *igazság* filozófiai problémáját veti fel. Juhász két alapvető megközelítést említett. Az egyik a platonista, amelyik úgy gondolja, hogy a matematikus felfedezi a dolgokat, a létező objektív dolgok között fennálló összefüggéseket. A másik az intuicionista álláspont, amely szerint a matematikus feltalálja, megteremti ezeket a dolgokat. A matematikusok többsége mégis inkább formalista álláspontot képvisel, ami azt jelenti, hogy tulajdonképpen nem kötelezi el magát egyik irányban sem, csak műveli a matematikát.

Juhász István kiemelte a matematika örökérvényűségét, időtállóságát. A kínaiak és a görögök – leginkább az utóbbira szoktak hivatkozni – által évezredekkel ezelőtt megteremtett matematika ma is éppúgy érvényes. Ez megkülönbözteti a természettudományoktól, ahol nagyon gyorsan elévülnek az ismeretek.

T. Sós Vera bevezetőjében egy 25 évvel ezelőtti élményt idézett fel, amikor először és utoljára ült szemben filozófusokkal, egy általa tartott matematikai előadássorozat alkalmával. A „végtelen” témája kapcsán komoly összetűzésbe került velük. Ennek egyik oka a különböző nyelv használata, ami sokszor áll a megértés vagy a meg nem értés hátterében. Ha például egy matematikus arról beszél, hogy végtelen halmazok esetében is lehet többről és kevesebbről beszélni, más a nyelvezet, és talán más a gondolkodásmód is.

T. Sós szerint az interdiszciplinaritás jelentősége külső hatások révén nőhetett. Megváltozott a kommunikáció, megnőtt az információáradat. A tudományok, a tudományos élet struktúrája nagymértékben átalakult, nemzetközi és tudományközi projektek váltak megvalósíthatóvá. Ha a különböző diszciplínákat csomópontoknak tekintjük, az összeköttetések megvizsgálásával belátható, hogy sokkal bonyolultabb lett a tudomány struktúrája.

A matematika és a fizika egymásra hatása kapcsán T. Sós Vera megemlítette a kvázi-kristályok húsz évvel ezelőtti felfedezését. Fizikusok kísérleti úton olyan struktúrát fedeztek fel, amely periodikus is, meg nem is. Kiderült, hogy a matematikában egy ezzel analóg struktúrát már szerkesztettek. A fizikusok elkezdtek számelméleti cikkeket írni, a matematikusok pedig a sejtett atomi struktúra megszerkesztésén kezdtek dolgozni.

Benedek András a nézőpontok különbözősége kapcsán megjegyezte: az a kérdés, hogy gömbölyű-e a Föld, egy matematikus és egy fizikus számára teljesen mást jelent. A fizikust az érdekli, hogy tényleg gömbölyű-e. A matematikust inkább az, hogy mi van akkor, ha feltesszük, hogy gömbölyű. A filozófust pedig az izgatja, hogy milyen kérdést válaszoltunk meg akkor, amikor azt mondtuk, hogy a Föld gömbölyű.

Benedek elmondta, hogy a jogászok között töltött évei során, filozófusként és logikusként próbálta megérteni, hogy mitől jogi kérdés egy jogi kérdés. Létezik analitikus jogelmélet, melynek révén a nyelvelmélettel kombináltan megmondhatjuk, hogy mitől tulajdon a tulajdon, amikor jogász mondja, és mitől nem az, ha valaki a hétköznapi nyelvben használja a szót. A mai jogelmélet leginkább formális választ tud adni erre a kérdésre; megvizsgálja azokat a jellegzetes alkalmazásokat a nyelvben az emberi kultúrtörténet során, amelyek hatására ezt a jogászok jogi használatnak tekintik. Benedek véleménye szerint ezzel történettudományos, jogtörténeti kérdést emelünk be a jogelméletbe; a matematika esetében is hasonló lehet a helyzet.

Vámos Péter annak a kérdésnek a kapcsán látná gyümölcsözőnek a filozófusok közreműködését, hogy vajon miképpen lehetséges, hogy a fizikusok szerint a világ diszkrét egységekből áll, viszont minden olyan hatékony matematikai elmélet, amellyel meg tudjuk érteni ezt a diszkrét világot, folytonos. És a világ nem csak diszkrét, hanem véges is, mégis ennyit foglalkozunk a végtelennel. A matematikusok ezt értik, mivel a matematikában tudják, hogy felmerülhetnek olyan kérdések egy zárt rendszerben, amelyeket a rendszeren belül nem lehet megoldani. A görögökkel ellentétben már ismerjük a tudásunk határait, és ezeket a határokat bizonyítani is tudjuk.

SZÁMÍTÓGÉP ÉS MATEMATIKA KAPCSOLATA

Laczkovich Miklós elmondta, hogy a legtöbb matematikus még írógépnek vagy adatbázisokban való keresésre használja a számítógépet (például bebizonyított tételek keresésére), de ezek nem specifikus alkalmazások. A matematika és a technika között egyszerre van versenyfutás és konvergencia. Vitatott kérdés, hogy a matematika (okosabb algoritmusok), vagy a technika (gyorsabb csipek) oldja-e meg a mindennapok kérdéseit. A hajózásban nagyon fontos kérdésnek számító helymeghatározást például a hordozható óra kifejlesztése oldotta meg, amelynek segítségével lehetővé vált a hosszúsági fokok kiszámítása.

Laczkovich nagyon érdekesnek tartja a mesterséges intelligencia kérdését, melynek segítségével néha nagyon kevés, nagyon buta szabállyal lehet nagyon okos embereket imitálni (sakkmestert legyőző sakkgép). De a mesterséges intelligencia még számos megoldatlan problémával küszködik: már előállíthatók látni képes szerkezetek, ám ezek egyelőre nem versenyezhetnek az emberi látással. Az ember nem csak a szemével lát, hanem az agyával is, nehéz megalkotni azt a programot, amely úgy dolgozza fel a képet, mint az ember. A Neumann-komputer valamilyen módon rávilágított arra, hogyan gondolkodunk, akkor is, ha nem úgy gondolkodunk, mint a Neumann-komputer.

T. Sós Vera hozzátette, az egyes tudományok módszereiben is beálltak bizonyos változások, kölcsönhatások. A matematikus továbbra sem fogad el tételnek valamit, ami nincs bizonyítva, de a számítógéppel új bizonyítási lehetőségekre tettünk szert. Erre példa a négyszín-sejtés igazolása, amelynek jelentős része számítógép segítségével történt. Ma sem szűnt meg a vita, hogy érvényes-e ez a bizonyítási módszer, hiszen eredetileg akkor tekinthető valami bebizonyítottnak, ha világosan látni a logikai struktúrát. Ha egy számítógép több hónapos számítás és tesztelés után kiad egy eredményt, akkor kérdés, hogy hol látható a logikai struktúra. Ma már önmagában is annyira összetett lett a matematika, hogy születnek olyan – kutatócsoportok által létrehozott – többoldalas bizonyítások, amelyek esetében nehéz lenne azt mondani, hogy létezik emberi agy, amely a levezetést az elejétől a végéig követni képes. Bár az egyes részletek logikai struktúrája ilyenkor még látható, nem úgy, mint a számítógép esetében.

Az egyes tudományágak besorolása sem mindig teljesen világos. Az informatika esetében fennáll az a kérdés, hogy a matematikához vagy a műszaki tudományokhoz tartozik. Az informatika kérdése is kapcsolódik a matematika alkalmazásához. T. Sós Vera véleménye szerint az alkalmazott matematika és a matematika között nincs éles határvonal. A mai napig sokan a számelméletet tekintik a legkevésbé alkalmazható matematikai területnek, a számítástechnikában mégis nélkülözhetetlennek tűnik.

ALAPKUTATÁS ÉS ALKALMAZOTT KUTATÁS VISZONYA

Laczkovich Miklós szerint az alapkutatások és az alkalmazott kutatások nagyon bonyolultan hatnak egymásra. A matematikus elsősorban egy konkrét problémát szeretne megoldani, például ellenséges rakéták kilövéséhez szükséges kérdéseket. A megoldás vagy sikerül vagy nem, de a munka során a matematikus teljesen eltávolodik a kiindulástól, mígnem jön egy újabb gyakorlati probléma, ami visszavezeti az eredeti problémához.

Juhász István példákkal illusztrálta a matematika klasszikus és aktuális sikereit. Leszögezte, hogy a matematikusok szeretnek matematizálni, úgy, ahogy a zenészek zenélni, és bár néha egy konkrét feladat megoldásán dolgoznak, elsősorban a matematizálás esztétikai jellege motiválja őket. Erre jó példa a görögök által felvetett kúpszeletek kérdése, amely 1500 évvel később a ballisztika alapjává vált. A nem-euklideszi geometria, melynek alapkérdései visszavezethetők a görögökre, később az általános relativitáselmélet megalkotását tette lehetővé. A véletlen fogalma is klasszikus sikertörténetnek nevezhető. Egészen a XX. század közepéig tartott, míg ezt a kérdést matematikailag teljesen tisztázni lehetett.

A modern sikerek kapcsán Juhász elmondta, hogy a matematikai publikációk száma 1950-ben évi ötezer körül volt, míg 2000-ben kb. évi hatvanezer. Szintén friss adat, hogy kb. 50-70 ezer kutató matematikus dolgozik a világon. (A kutató biológusok száma 700 ezer és 1 millió között van.)

Juhász kiemelte a matematika jelentős szerepét a modern fizikában, és rámutatott kapcsolatuk különlegességére. Wigner Jenő a hatvanas években tartott egy előadást *The unreasonable effectiveness of mathematics in physics* (*A matematika érthetetlen hatékonysága a fizikában*) címmel, amely a matematika szerepét tárgyalta a kvantumtérelmélet megalapozásában.

Néhány hónapja Arthur Jaffe harvardi professzor tartott egy előadást, melynek a *The unreasonable effectiveness of physics in mathematics* (*A fizika érthetetlen hatékonysága a matematikában*) címet adta.

A számítógépek valóban gyors ütemben terjednek. Neumann találta fel a tárolt program elvét, amit a matematikai logikából hozott. Talán kevesen tudják, hogy a mai high-tech termékek – CD-lejátszók, autók, telekommunikációs eszközök stb. – mennyi matematikát tartalmaznak. A bennük lévő műszaki tartalom igazából matematika.

A biológia rendszerek vizsgálatába is benyomul a matematika, bár ott vitatott a matematika hatékonysága. Israel M. Gel'fand matematikus a Wigner-féle bonmot kapcsán a „the unreasonable ineffectiveness of mathematics in biology"-ról (a matematika érthetetlen haszontalansága a biológiában) beszélt. Juhász Gel'fand kijelentését vitathatónak tartja, hiszen a biológia egyes területein – például a genomkutatásban, az agyműködés modellezésében – már a számítógépnek és ezáltal a matematikának is óriási szerepe van.

Juhász a matematika sikereihez sorolja a *waveleteket* (hullámocskák) is, amelyeknek az első nyomai már Haar Alfréd 1909-es doktori disszertációjában is fellelhetők. Ezek csak később, a geofizikai és kvantumfizikai alkalmazások kapcsán kerültek előtérbe, de ma már a képalkotásban és a látás leírásában is jelentős szerepük van.

Laczkovich Miklós a matematika örökérvényűsége és az elhangzott görög példa kapcsán elmondta, hogy véleménye szerint nem arról van szó, hogy a legtöbb probléma ugyanúgy érvényes, mint régen, hanem arról, hogy a matematika, a teljes kérdésfeltevés lényegében ugyanaz. A görögök nem azért fedezték fel a matematikát, hogy alkalmazzák a valóságra, ők a valóságra való alkalmazást valamilyen alacsonyabb rendű tevékenységnek tekintették. Laczkovich hozzátette, a Wigner-előadásban az is elhangzott, hogy a matematika csodálatos alkalmazhatóságát a világra nem értjük, és nem érdemeljünk meg.

Békés Vera arra kérdezett rá, hogy hol kezdődik a komoly matematika. Mint elmondta, ma a filozófusok egy jó része arról vitatkozik a filozófusok másik részével, hogy szabad-e a filozófiát más tudományok ismerete nélkül művelni, van-e értelme interaktivitásba kerülni legalább a tudományok történetével. Szerinte a filozófia mindig is együtt volt a tudományokkal, nem lehet őket különválasztani. A görögöknél *mathématikosz*-nak azokat a tudósokat hívták, akik úgy látták, hogy bizonyos nagy kérdések megoldására ismernek valamiféle módszert. A filozófusok ezzel szemben azt gondolták, hogy ezek a kérdések túl bonyolultak, túl keveset tud az ember ahhoz, hogy megoldja őket. Sokszor nem olyan éles a határ köztük.

Békés Vera az utóbbi időben abból a szempontból vizsgálta a magyar tudós elit történetét, hogy tagjai a fejükben mit vittek magukkal az emigrációba. Szinte mindenkiről kiderült például, hogy imádta és kívülről fújta Madách Tragédiáját. Az elhangzott kínai példa kapcsán Békés azt vetette fel, hogy léteznek más, nem szigorúan matematikai megközelítések.

Laczkovich Miklós válaszában megjegyezte, hogy az egész generáció imádta Madáchot. A komoly matematika pedig véleménye szerint két-három év alatt elsajátítható egy alapos középiskolai képzés során.

T. Sós Vera a komoly matematika kérdésére reagálva kifejtette, hogy olyan módszerekre kell gondolni, amelyekből meg lehet érteni, hogy mi az a matematikai gondolkodás, a matematikai probléma vagy a megoldatlan matematikai probléma. Ilyen értelemben Pósa Lajos módszere az általános iskolában már komoly matematika.

Összeállította: Bedő Viktor