

A KÖRKONOID METSZETEI LAPPAL.

Fodor Lászlótól.

— IV. Tábla. —

I. A körkonoid egyenlete, a hengeres és kúpos elemek.

A körkonoidot, vagyis azt a fölszint, melyet egy egyenes vonal leír, miközben valamely adott K kört és E egyenes vonalat metsz és minden helyzetében valamely S iránylappal parallel marad: czél-szerű oly összendező rendszerre vonatkoztatni, melynek z -tengelyét az adott E egyenes képezi; y -tengelye az adott K -kör középpontján áthalad, S -sel parallel és E -t (O -ban) metszi; végre x -tengelye az S -lappal, valamint a kör lapjával is parallel. E szerint tehát az xy -lapot az iránylappnak tekinthetjük.

Ha az Oy és Oz , az Ox és Oz , az Ox és Oy tengelyek közti szöget (1. ábra) sorban α , β , γ -val; azt a szöget, melyet a kör lapjának $O_0 C$ nyoma az yz -lapon az y -tengely positiv oldalával képez, δ -val; és végre ugyanazon $O_0 C$ -nyom és a kör lapjának az xy -lapon levő nyoma által bezárt szöget ε -nal jelöljük: akkor

$$\cos \varepsilon = \frac{\cos \beta \sin \delta - \cos \gamma \sin (\delta - \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Az xy -lappal parallel lap, mely a z -tengelyt, az $O_0 C$ -t és az r -sugarú kört A , A_0 , $A_{1,2}$ -ben metszi, magában foglalja a konoidnak $AA_{1,2}$ alkotóit, melyeknek projectióit az xy -lapon, ha $A_m A'_m \parallel OA'$ — a hol $m = 0, 1, 2$ — az $OA'_{1,2}$ egyenesekben nyerjük. Az alkotónak bármely $P_{1,2}$ pontjára nézve akkor áll:

$$\frac{x}{y} = \frac{A'_0 A'_{1,2}}{AO'_0} = \frac{A_0 A_{1,2}}{OO_0 - O_0 A'_0};$$

$$s \text{ mivel } A_0 A_{1,2} = B_0 A_{1,2} - B_0 A_0 = \\ = \frac{\pm \sqrt{r^2 \sin^2 \delta - z^2 \sin^2 \alpha} \sin \varepsilon - z \sin \alpha \cos \varepsilon}{\sin \delta}$$

$$\text{és } O_0 A'_0 = \frac{z \sin(\delta - \alpha)}{\sin \varepsilon},$$

lesz, $OO_0 = p$ téve, a konoid egyenlete:

$$\frac{x}{y} = s \cdot \sin \varepsilon \frac{\pm \sqrt{r_1^2 - z^2} - z \cot \varepsilon}{p_1 - z}, \dots \dots \dots 1)$$

$$\text{hol } p_1 = \frac{p \sin \delta}{\sin(\delta - \alpha)}, \quad r_1 = \frac{r \sin \delta}{\sin \alpha \sin \varepsilon}, \quad s = \frac{\sin \alpha}{\sin(\delta - \alpha)}.$$

A körkonoid nevezetesebb speciális esetét nyerjük 1. ha $\beta = \varepsilon = 90^\circ$ és $\alpha = \delta$, vagy, ha mindezek a szögek, valamint γ is derékszögek (Wallis-féle conocuneus); ilyenkor a fölszín egyenlete

$$p^2 x^2 + y^2 z^2 = r^2 y^2.$$

2. Ha $p_1 = r_1 \sin \varepsilon$, a görbe fölszín egy lapra ($z = r_1 \sin \varepsilon$) és egy harmadfokú konoidra oszlik fel, melynek egyenlete

$$z = \frac{p_1 (x^2 - s^2 y^2)}{x^2 - 2sxy \cos \varepsilon + s^2 y^2}.$$

* * *

A z -tengelyen átfektetett lap a konoidot, ha általában, két párhuzamos alkotóban metszi; az esetben tehát, a mikor e lap a kört érinti, e két alkotó a konoidnak hengeres elemét zárja be; ilyen a konoidon általában kettő lehet. Az xy -lappal párhuzamos lap pedig, a konoidot ha általában, úgy két egymást (a z -tengelyben) metsző alkotóban találja; ha tehát e lap a kört érinti (mint $DD_0 D_1$), e két alkotó a konoidnak kúpos elemét zárja be; ilyen a konoidon mindig kettő van.

Minthogy pedig ezen különös elemeknek előfordulása és elhelyezésével a metszeteknek bizonyos sajátságai összefüggésben vannak, azért itt röviden említjük, hogy

1. ha $p_1 > r_1$ (azaz $OC > OD$), akkor egy-egy hengeres elem következik egy-egy kúpos után;
2. ha $p_1 = r_1$, akkor egy hengeres elem összeesik egy kúposal; a hengeres elemek száma kettő;
3. ha $p_1 < r_1$, de $a) p_1 > r_1 \sin \varepsilon$, akkor egy hengeres elem után megint egy ilyen következik, ezután pedig a két kúpos;

ez tehát a metszészonal asymptotáinak egyenlete is; s így a görbe vonal zárt vagy egy vagy két asymptotával bír a szerint, a mint, ha 5)-ben a gyökzendő kifejezés értékét k -val jelöljük, $k \leq 0$.

a) Azonban $f(e_n)$ értéke 0, s ennek folytán ξ -é végtelen nagy csak az esetben, a mikor $f(e_n)$ -ben (s így $F(e_n)$ -ben is) az alsó jelt veszszük; a felső jel megtartása mellett ξ - számára határozott véges értéket nyerünk, s így az asymptota általában metszi is a görbe vonalat egy pontban. Ez akkor is történik, ha $k=0$ miatt $e_1=e_2$; ha azonban $s''=0$ folytán a két asymptota ($\eta=p'$ -ben) összeesik, akkor ξ -nek mindkét értéke végtelen nagy.

b) Minthogy $f(e_n + den)$ és $F(e_n - den)$ ellenkező jelűek, míg den előjele $F(e_n)$ előjelére, feltéve, hogy b' és e_n különbsége nem végtelen kicsiny, befolyással nincsen, azért a görbe vonal a vízszintesnek felvett asymptotának a végtelenben levő egyik pontjához felülről, másikához alulról mindig jobban s jobban közeledik. Azon esetben, a mikor $k=0$ miatt $e_1=e_2$, den előjele a nevező előjelére sem gyakorol befolyást, s így az asymptota a görbe vonalnak az asymptota fölött s alatta levő részét egy és ugyanazon (a végtelenben fekvő) pontban érinti.

Vége $s''=0$ esetében $f(e_n + den)$ és $f(e_n - den)$ különböző jelűek; $F(e_n)$ két értéke pedig ilyenkor a szerint, a mint $p' \geq r' \sin \varepsilon$, ugyanazon vagy különböző jelű. Így tehát $p' > r' \sin \varepsilon$ esetében a vízszintesnek felvett asymptota fölött levő ág mindkét oldala az egyedüli asymptotának egyik, végtelenben levő, pontjához mindig jobban közeledik; az asymptota alatt levő ág mindkét oldala pedig az előbbivel ellenkező irányban halad a végtelenig (39., 40., 41. ábra). — $p' < r' \sin \varepsilon$ esetében pedig úgy a felső mint az alsó ág az asymptotának mindkét, végtelenben levő, pontjáig terjed (42., 43., 44. ábra).

c) Az $f(\eta)=0$ egyenlet valamely ε hajlású koordináta tengelyekre vonatkoztatott kör centrális egyenletéből származik, ha ezt az $o \mid p \frac{\sin \alpha}{\sin(\delta - \alpha)} = p_2$ koordinatájú ponton áthaladó egyenes egyenletével összekötjük; a kör s az egyenes közös pontjainak ordinátái ($\eta=e_n$) a p' -hez képest, azaz a konoid lapmetszeténél az $\eta=e_n$ és $\eta=p'$ egyeneseknek helyzetei egymáshoz képest, p' -nek valamint az egyenes és a ξ -tengely közti szögnek változásával különbözők lehetnek; és pedig,

- α) ha $p' > r'$, akkor $e_n > p'$;
- β) ha $p' = r'$, lehet $e_2 = -r'$; mindig $e_1 < p'$, s így $e_n < p'$;
- γ) $p' < r'$ esetében, a mikor azonban $p' > r' \sin \varepsilon$, mindkét e -érték vagy nagyobb, vagy kisebb p' -nél, vagy egyenlő vele; ha azonban $p' < r' \sin \varepsilon$, akkor az e -értékek egyike nagyobb, másika kisebb p' -nél, vagy mindkettő egyenlő p' -vel.

Minthogy e_n értéke b -től független, világos, hogy ugyanazon koordináta rendszerre vonatkoztatott parallel metszeteknek közös asymptotáik vannak.

Nézzük most, hogy a lapnak minő helyzete mellett származik zárt, vagy egy vagy két asymptotával bíró metszet: k -nak 5) után mondott jelentéséből valamint 4)-ből következik

$$s'' = \frac{-r' \cotg \varepsilon \pm \sqrt{p'^2 \operatorname{cosec}^2 \varepsilon^2 - r'^2 + k \operatorname{cosec}^2 \varepsilon^2}}{r' \operatorname{cosec} \varepsilon^2} = \frac{\sin \alpha \sin \varepsilon \sin (\gamma' - \gamma)}{\sin (\delta - \alpha) \sin \gamma'} \dots \dots \dots 6)$$

miből γ' számára $k \leq 0$ mellett illetőleg $\gamma'_{1,2; 3,4; 5,6}$ értékeket nyerünk; mivel pedig a konoid cylindrikus elemeihez fektetett érintő lapokra nézve, ha nyomuk az xy -lapon az y -tengely positiv részével $v_{1,2}$ szögeket zár be, áll:

$$\frac{\sin \alpha \sin \varepsilon \sin (v_{1,2} - \gamma)}{\sin v_{1,2}} = \frac{-r' \cotg \varepsilon \mp \sqrt{p'^2 \operatorname{cosec}^2 \varepsilon^2 - r'^2}}{r' \operatorname{cosec} \varepsilon^2};$$

látjuk, hogy $v_{1,2} = \gamma'_{4,3}$, azaz a lapnak nyoma az xy -on, mely ($k=0$ miatt) egy asymptotával bíró görbében metszi a konoidot, parallel a konoidot a cyl. elemekben érintő egyik lapnak az xy -lapon levő nyomával, s így a metsző lap-parallel a cyl. elemmel. $k=0$ mellett s'' reális, vagyis egy asymptotával ellátott görbét nyerünk, ha $p' \geq r' \sin \varepsilon$; $p' = r'$ esetében $\gamma_3 = \gamma$, azaz ezen metszetek parallelek az x -tengelylyel; ha $p' = r' \sin \varepsilon$, a konoidnak cyl. elemei összesznek, és $\gamma_{3,4} = \frac{\sin 2\varepsilon}{2}$.

$k < 0$ mellett, hogy s'' reális legyen, kell $p' > r' \sin \varepsilon$. Összehasonlítván az $s''_{1,2}$ értékeket $s''_{3,4}$ -gyel, látjuk, hogy ugyanazon konoidnál $s''_3 > s''_{1,2} > s''_4$; s így tekintettel 4)-re $\gamma'_3 > \gamma'_{1,2} > \gamma'_4$ vagyis $v_2 > \gamma'_{1,2} > v_1$. Azaz azon $O(A)$ egyenes (3. ábra), mely a körkonoidot zárt görbében metsző lapnak az xy -lapon levő AB nyomával

parallel, az $N_1 ON_2 = v_2 - v_1$ szög szárjai közt fekszik; az ilyen metsző lap tehát a konoid minden alkotóját találja.

$k > 0$ esetében $s''_{5,6} = 6)$ szerint — reális, ha $p' \geq r' \sin \varepsilon$; ekkor $s''_5 > s''_{3,4} > s''_6$, azaz tekintettel 4)-re $\gamma'_5 > v_{1,2} > \gamma'_6$. E szerint azon $O(B_{5,6})$ egyenes (4. ábrán), mely parallel a (körkonoidot két asymptotájú görbében) metsző lapnak az xy -lapon levő $AB_{5,6}$ nyomával s így két alkotóval is, az $N_2 O(N_1)$ szög szárjai közt fekszik (az ábrán $y O(B_{5,6}) = \gamma'_{5,6}$). — $p' = r' \sin \varepsilon$ esetében $v_1 = v_2$, s így $\gamma'_5 > v_1 > \gamma'_6$; ekkor tehát a metsző lap nyoma az xy -lapon tetszés szerinti helyzetű lehet, csak nem parallel az összeeső cyl. elemekben érintő lap nyomával: a metszet mindig két asymptotájú. Ha végre $p' < r' \sin \varepsilon$, az ezen érték mellett imaginair $s''_{3,4}$ -gyel nem hasonlíthatjuk össze az $s''_{5,6}$ -ot; de ha

$$r'^2 [s'^2 + (1 + s' \cotg \varepsilon)^2] - p'^2 = k$$

egyenletbe p' értékét helyezzük, akkor

$$r'^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2 \left(s'^2 + \frac{\sin 2 \varepsilon}{2} \right)^2 < k$$

lesz, a miből világos, hogy bármely (γ' -érték számára nyert) s'' mellett positiv k , azaz két asymptotájú metszégörbe származik.

Mind ezekben az esetekben tehát a metszőlap parallel a konoid azon két alkotójával, melyek a lapnak AB_5 (vagy AB_6) nyomával paralelek.

* * *

Jelölvén τ -val a metszégörbének valamely pontjához vont érintő s a ξ -tengely közt levő szöget, s feltéve, hogy a coordinata-tengelyek szöge ω , 3)-ból nyerjük

$$\frac{\sin \tau}{\sin(\omega - \tau)} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{s'} \frac{\sqrt{r'^2 - \eta^2} f(\eta)^2}{\sqrt{r'^2 - \eta^2} M + (b' - \eta)(p' - \eta) N} \quad . \quad 7)$$

a hol $f(\eta)$ -nek ugyanazon jelentése van mint 3)-ban, továbbá

$$M = \{ \pm \sqrt{r'^2 - \eta^2} - \eta \cotg \varepsilon \} [b' - p' - s'' \{ \pm \sqrt{r'^2 - \eta^2} - \eta \cotg \varepsilon \}]$$

és $N = \mp \eta - \sqrt{r'^2 - \eta^2} \cotg \varepsilon$.

7) szerint tehát a metszégörbének a ξ -tengelylyel parallel érintőit meghatározza 1. $f(\eta) = 0$; ezen érintők az asymptoták (l. 5.); 2. $\eta = \pm r'$; ezen esetben azonban eltérés áll be, ha egyszersmind b' -nek vagy p' -nek absolut értéke egyenlő r' -rel.

a) Ugyanis $b' = r'$ esetében $\eta = r'$ számára

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{p' - r' (1 + s'' \cotg \epsilon)}{r' s' \cotg \epsilon}, \dots \dots \dots 7a)$$

azaz $\frac{d\eta}{d\xi}$ egyértékű; s mivel a görbének $\eta = r' - \Delta r'$ mellett két, $\eta' = r'$ -nél egy reális, $\eta = r' + \Delta r'$ mellett pedig imag. pontjai vannak: a görbének $\eta = r'$ melletti pontja csúc s- (visszatérő, cuspidalis) pont. $\eta = -r'$ számára $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, azaz $\eta = -r'$ érintője a görbének.

b) $b' = -r'$ esetében $\eta = -r'$ számára

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{p' + r' (1 + s'' \cotg \epsilon)}{r' s' \cotg \epsilon}, \dots \dots \dots 7b)$$

s a görbének $\eta = -r'$ melletti pontja ismét csúcspon; $\eta = +r'$ a metszetnek érintője.

c) $p' = r'$ esetében $\eta = r'$ mellett

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{s''^2 r' \cotg \epsilon}{s' \{b' - r' (1 - s'' \cotg \epsilon)\}}, \dots \dots \dots 7c)$$

azaz a görbének pontja $\eta = r'$ mellett csúcspon; $\eta = -r'$ érintője a metszés görbének.

d) Ha $p' = -r'$, $\eta = -r'$ számára

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{s''^2 r' \cotg \epsilon}{s' \{b' + r' (1 - s'' \cotg \epsilon)\}}, \dots \dots \dots 7d)$$

s így a görbének $\eta = -r'$ melletti pontja ismét csúcspon; $\eta = r'$ a vonal érintője.

e) Ha $b' = p' = r'$, az ($\eta = r'$ mellett levő) csúcspontra nézve (7 a) vagy c) szerint) $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{s''}{s'}$.

f) $p' = b' = -r'$ esetében az ($\eta = -r'$ melletti) csúcspon-érintőjét meghatározza ugyan az e) alatti $\frac{d\eta}{d\xi}$ -érték.

g) $p' = -b' = r'$ esetében a görbének van $\eta = r'$ mellett csúcsponja, melyre nézve (7c) $\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{s''^2 \cotg \epsilon}{s' (2 - s'' \cotg \epsilon)}$

$\eta = -r'$ " " " " (7b) $\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{2 + s'' \cotg \epsilon}{s' \cotg \epsilon}$.

h) Ha $p' = -b' = -r'$, a görbe vonalon $\eta = -r'$ és $\eta = r'$ mellett előforduló csúcspontok érintőire nézve a g) alatt jelzett $\frac{d\eta}{d\xi}$ értékek érvényesek.

A csúcspontokon kívül a görbének még kétszeres pontjai is lehetnek; ha ugyanis absolute véve $b' < r'$, akkor $\eta = b'$ számára $= 0$, holott η -nak ezen értéke mellett

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{1}{s'} \frac{b' - p' - s'' \left\{ \pm \sqrt{r'^2 - b'^2} - b' \cotg \varepsilon \right\}}{\pm \sqrt{r'^2 - b'^2} - b' \cotg \varepsilon}, \quad (7e)$$

s így a görbének $o | b'$ pontjához két érintő vonható.

ξ egyértékű még $\eta = p'$ mellett, ha t. i. $p' < r'$; ilyenkor

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{s'' \left\{ \pm \sqrt{r'^2 - p'^2} - p' \cotg \varepsilon \right\}}{s' [b' - p' - s'' \left\{ \pm \sqrt{r'^2 - p'^2} - p' \cotg \varepsilon \right\}]}, \quad (7f)$$

azaz az $\eta = p'$ melletti pont megint kétszeres pont.

Ha $b' < r'$ és $p' < r'$, a görbe vonalon két kétszeres pont fordul elő, melyek $b' = p'$ esetében összeesnek, a mikor a görbe vonal önmagát érinti.

Ha absolute véve $b' < r'$ és $p' = r'$, a metszeten $\eta = b'$ mellett kétszeres (7e) és $\eta = r'$ -nél csúcspont van (7c. vagy d); éppen így van a görbének ilyen két különös pontja, ha absolute $p' > r'$ és $b' = r'$ (7f), és 7a), vagy b).

A) Zárt lapmetszetek. ($k < 0$).

Lehetőségek föltétele (a 3. ábrándl mondottak szerint) hogy $p' > r' \sin \varepsilon$ vagyis $p_1 > r_1 \sin \varepsilon$ legyen; utóbbi annak is föltétele, hogy a z-tengelyen át a körkonoidhoz (a különálló cyl. elemek hosszában) két érintő lapot fektethessünk.

Ha a konoidot és az azt határoló éket (115. old.) az ABC lappal metszszük s a metszégörbét határoló négyszöget (általában trapéz) ugyanazon AB és BC egyenesekre mint ξ - illetve η -tengelyre vonatkoztatjuk, melyre eddig is a görbét, akkor

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \pm r' && a) \\ \text{és} \quad \frac{\eta}{b'} + \xi \frac{r' s'' + \sin \varepsilon^2 (\pm q + r' \cotg \varepsilon)}{b' r' s'} &= 1 && b) \end{aligned} \right\} 8$$

egyenletek ($q = \sqrt{p'^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2 - r'^2}$) határozzák meg a mondott négyszöget, melynek a 8a) által adott oldalaiban

$$\xi = \frac{\mp (b' \mp r') r' s' \cotg \varepsilon}{p' \mp r' (1 + s'' \cotg \varepsilon)} \dots \dots \dots 9a)$$

mellett, a 9b) által meghatározott oldalaiban pedig

$$\eta = \frac{r' \{ r' \pm q \cotg \varepsilon \}}{p' \operatorname{cosec} \varepsilon^2} \dots \dots \dots 9b)$$

értékeknel vannak a metszés-görbének határpontjai, a mikor a felső (alsó) jelekkel vett értékek a felső (alsó) jelekkel vett 8) alatti egyenleteknek felelnek meg. $\varepsilon = 90^\circ$ esetében tehát 9a)-ban $\xi = 0$, 9b)-ben pedig $\eta = \pm \frac{r'^2}{p'}$ áll be.

A görbe vonalat bezáró egyenes vonalú idom a b' értékei szerint különböző alakot vesz fel; így $b' = \infty$ esetében ($\alpha' = \alpha$ *) ezen idom 8) szerint parallelogramma; ha, absolute véve, $b' = r'$, háromszöget nyerünk; abs. $b' < r'$ esetében átesapott (überschlagen) oldalú négyszög áll elő, melynek átesapott oldalai, ha $b' = 0$, egyenlő távolságban metszik egymást a másik két (paralel) oldaltól.

A körkonoidnak valamely lappal képezett általános zárt metszés-vonalának alakját, az azt körülvevő s imént leírt négy- illetve háromszögekkel együtt az 5—15. ábra mutatja.

I. Ha $p' > r'$, és 1) $b' > r'$, akkor a metszésvonalon (ovalis) sem kétszeres, sem csúcspon t nincs (5. ábra); ha 2) $b = r'$, akkor $r' = r'$ mellett csúcspon t (7a), 6. ábra), ha pedig 3) $b' < r'$, akkor $\eta = b'$ mellett kétszeres pon t (7e), 6. ábra) fordul elő rajta.

II. $p' = r'$ esetében a görbének $\eta = r'$ mellett van csúcspon tja, a melyhez tartozó érintőt $b' \geq r'$ esetében (8. és 9. ábra) 7e), $b' = r'$ esetében pedig (10. ábra) e) (119. old.) határozza meg. Ha $b' = -r'$, metszésidomnak $\eta = r'$ és $\eta = -r'$ mellett van csúcspon tja (f), 119. old., 11. ábra); $b' < r'$ esetében a görbe vonalon $\eta = b'$ mellett kétszeres pon t (7e) fordul elő (9. ábra).

III. Ha $r' > p' > r' \sin \varepsilon$, akkor $\eta = p'$ mellett van a görbének kétszeres pon tja (7f), 12. ábra) s ha $b' = r'$, ezen kívül még csúcspon tja (7a) $\eta = r'$ értéknél (13. ábra), $b' < r'$ esetében pedig még

*) $b' s' = b \frac{\sin \alpha \sin \gamma \sin \varepsilon}{\sin(\delta - \alpha) \sin \gamma'}$

egy második kétszeres pontja (7e) $\eta = b'$ -nél (14. ábra); ha ez utolsó esetben $b' = p'$, a két kétszeres pont összeesik s a görbe vonal önmagát érinti (15. ábra).

E görbe vonalak specialis eseteit nyerjük, ha

$$a) \alpha' = \alpha.$$

(A metsző-lap parallel a z -tengelylyel.)

Ilyenkor az ék metszete parallelogramma, s az általa bezárt metszégörbének egyenlete

$$\xi = b \frac{\sin \alpha \sin \gamma \sin \varepsilon \{ \pm \sqrt{r_1^2 - \eta^2} - \eta \cotg \varepsilon \}}{\sin (\delta - \alpha) \sin \gamma'} p_1 - \eta + s'' (\pm \sqrt{r_1^2 - \eta^2} - \eta \cotg \varepsilon)'$$

azaz parallelmetszeteknél (különböző b mellett) ugyanazon r -értéknek b -vel arányos ξ -értékek felelnek meg s így a parallelmetszetek mind egyből szerkeszthetők s ennek projectióinak tekinthetők.

A konoidnak a z -tengelylyel parallel metszetein: ha $p' > r'$ sem csúcs- sem kétszeres pont nincs (ovalis); $p' = r'$ esetében pedig $\eta = r'$ mellett csúcspon (7e), ha $r' > p' > r' \sin \varepsilon$, $\eta = p'$ mellett kétszeres pont van (7f).

$\varepsilon = 90^\circ$ esetében (tekintettel a zárt metszetek föltételére) csak, ha $p' > r'$, nyerhetünk zárt görbét.

$$b) \gamma' = \gamma.$$

(A metsző-lap parallel az x -tengelylyel.)

A metszészvonal, melynek egyenlete

$$\xi = \frac{\sin (\alpha' - \alpha) \sin \varepsilon (b' - \eta) (\pm \sqrt{r'^2 - \eta^2} - \eta \cotg \varepsilon)}{\sin (\delta - \alpha) (p' - \eta)}, \quad 10)$$

csak $p' > r'$ esetében zárt; a ξ -tengelylyel parallel húrok felező- (diametral) vonalát meghatározza

$$\xi = m \frac{b' - \eta}{p' - \eta} \eta \cotg \varepsilon, \quad 11)$$

a hol m a 11) egyenlet jobboldalának állandó factorát jelenti.

A diametralvonal tehát hyperbola, $\eta = p'$ és $\frac{\xi}{m(p' - b) \cotg \varepsilon} =$

$\frac{\eta}{p' - b'}$ asymptotákkal. E szerint tehát az ugyanazon coordinata-tengelyekre vonatkoztatott parallelmetszetek (különböző b mellett) diametralvonalai mind átmennek a coordinaták kezdőpontján, egy

közös asymptotával bírnak, másik asymptotáik pedig paralelek. Ha $b' = 0$, a diametralhyperbola érinti az η -tengelyt.

Ezen metszésvonalak alakja nagyjában megegyezik a $p' > r'$ mellett $b' \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} r'$ esetére bemutatott görbékével (5., 6. és 7. ábra).

Symmetrikus az ily metszésidom, vagyis a diametralhyperbola két egymást metsző egyenessé fajul (melyeknek egyike a ξ -tengelylyel parallel, másika pedig a görbének átmérője), ha

$$\alpha) b' = p'.$$

A metsző lap a konoidon kívül fekvő $y = 0$, $z = p_1$ egyenesen halad át; a metszet 10) folytán ellipsis. A ξ -tengelylyel parallel húrokkal conjugált átmérőt 11) szerint $\xi = m \eta \cot \varepsilon$ határozza meg; ezen egyenesben találja a metszőlap a körkonoidnak az x -tengelylyel parallel húrjaihoz tartozó diametrallapját is, azaz azon hyperb. paraboloidot, melynek vezető egyenesei a z -tengely és a körnek azon átmérője, mely a körlapnak az xy -lapon levő nyomára merőleges; e diametral paraboloid iránylapja az xy -lap.

$$\beta) \varepsilon = 90^\circ.$$

A metszésvonal átmérője maga az η -tengely. $b' = 0$ esetében a kétszeres pont az átmérő közepén van, s a vonal, ha $\delta = \alpha$, mindkét coord. tengelyre nézve merőlegesen symmetrikus; egyenlete ilyenkor

$$\xi^2 = \left(\frac{\sin(\alpha' - \alpha) \sin \alpha'}{p \sin \alpha} \right)^2 (r' - \eta^2) \eta^2;$$

$\eta = 0$ mellett vannak forduló (flexio-) pontok, melyekben a görbe vonalat az azt körülvevő trapéznek átesapott oldalai érintik.

Ha a metszet a z -tengelylyel is parallel (azaz $\alpha' = \alpha$), akkor ($p' > r'$ föltétel miatt) csak is ovalis metszetet nyerhetünk. $\delta = \alpha$ esetében ezen metszet ellipsis, melynek egyik (η) féltengelye r'' másika $\frac{b}{p} r$, s így amaz a parallelmetszeteknél állandó, míg ez utóbbi b -vel arányosan növekszik vagy fogy.

A kör lapjával parallel lapmetszet merőlegesen symmetrikus, mert a koordinatatengelyek hajlása $\varepsilon = 90^\circ$.

B) Lapmetszetek egy asymptotával.

$$(k=0; e_1=e_2=e).$$

Ezen metszetek nyerhetők oly konoidnál, melynél (117. old.) $p' \geq r' \sin \varepsilon$; a metsző lapnak (u. o.) az egyik hengeres elemmel paralelnak kell lennie. A konoidot határoló éket az ilyen lap oly négy egyenesben metszi, melyek egyenletei 8) szerint, ha ott 6)-ból

$$s'' = \frac{-r' \cotg \varepsilon \pm q}{r' \operatorname{cosec} \varepsilon^2}$$

értékét helyettesítjük:

$$\eta = \pm r' \text{ és } \frac{\eta}{b'} + \frac{\xi}{\infty \text{ vagy } \pm \frac{b' r' s'}{2 q \sin \varepsilon^2}} = 1,$$

a mely utóbbi egyenletben q -nak ugyanazon jele van, melyet s'' -nél választunk. A görbe vonalat körülvevő egyenes vonalú idom áll tehát három parallel és egy ezeket metsző egyenesből.

A görbe vonal azon pontjait, melyek ezen egyenesekben fekszenek, a 9) alatti egyenletek határozzák meg; megjegyzendő, hogy a 9b) alatti η -értékek egyike*) azonos az 5) alattival ($k=0$ mellett), a melynek $\xi = \infty$ felel meg, s így ezen egyik 9b) egyenlet a görbe vonal asymptotájának egyenlete is.

A körkonoidnak egy asymptotájú lapmetszete I. ha $p' > r'$, a szerint, a mint $b' \geq r'$, sem csúcs-, sem kétszeres ponttal nem bír (16. ábra); vagy pedig csak ($\eta = r'$ mellett) csúcsponttal (7a), 17. ábra), illetőleg kétszeres ponttal ($\eta = b'$ mellett; 7e), 18. ábra). Utóbbi esetben megjegyzendő azon metszet is, melyhez

$$b' = \frac{r' (r' \pm q \cotg \varepsilon)}{p' \operatorname{cosec} \varepsilon^2}$$

érték mellett jutunk, a mikor b' -nél és s'' -nél q -t ugyanazon jellel kell venni. Ezen metszet áll ugyanis egy egyenesből ($\eta = b'$), mely a térben a cyl. elem, s egy harmadfokú görbéből (általános cissois) melynek ugyanazon $\eta = b'$ az asymptotája (19. ábra); e görbének egyenlete

$$\xi^2 (\eta - f_1) + f_2 \xi (\eta - f_3) (\eta - f_4) + f_5 (\eta - f_6) (\eta - f_7) (\eta - f_8) = 0. \quad 12)$$

a hol

*) A melynél q jelle ugyanaz, melyet s'' -ben választunk.

$$\left. \begin{aligned} f_{1,6} &= b'; f_2 = -2s'; f_3 = -s'^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2; f_{7,8} = \pm r' \sin \varepsilon; \\ f_{3,4} &= \frac{p' \cotg \varepsilon \pm \sqrt{p'^2 \cotg^2 \varepsilon^2 + 4s''r'(\cotg \varepsilon + s'' \operatorname{cosec} \varepsilon^2)}}{2(\cotg \varepsilon + s'' \operatorname{cosec} \varepsilon^2)} \end{aligned} \right\} 13)$$

II. $p' = r'$ esetében azon metszészonalaknak, melyekre nézve $s'' = 0$, azaz, melyeknek lapja parallel az x -tengelylyel parallel cyl. elemmel, asymptotájok $\eta = r'$; a ξ -tengelylyel parallel húrokhoz tartozó diametralvonaluk pedig hyperbola (l. 11). Alakjukat ($b' \geq r'$ szerint) a 20. és 21. ábrán látjuk; $b' = r'$ esetében a metszet ellipsis (l. zárt lapmetszetek, $b) \alpha$) és $\eta = r'$ egyenes.

A másik cyl. elemmel parallel lap a konoidot oly vonalakban metszi, melyek e szakaszban I. alatt említve voltak.

Ha $p' = -r'$, a metszetek alakja azonos a $p' = r'$ esetre nyert metszetekével.

III. Ha $r' > p' > r' \sin \varepsilon$, a metszészonalnak $\eta = p'$ mellett van kétszeres pontja (7f), 18. ábra), s ezen kívül a szerint, a mint $b' \geq r'$, $\eta = b'$ mellett vagy csúcspontja (7a), 22. ábra), vagy kétszeres pontja (7e); utóbbi esetben a szerint, a mint b' és p' nagyobb (vagy mindkettő kisebb) e -nél, vagy az egyik nagyobb, a másik kisebb e -nél, a vonal a 23. és 24. ábrán látható alakkal bir. $b' = p'$ esetében a két kétszeres pont összeesvén, a vonal önmagát érinti (25. ábra). Megjegyzendő azon különös eset is, a mikor $b' = \frac{r'(r' \pm q \cotg \varepsilon)}{p' \operatorname{cosec} \varepsilon^2}$

(a hol q -t ugyanazon jellel kell venni, melylyel s'' -ben); ilyenkor ugyanis a metsző lap átmegy a cyl. elemen keresztül, s a metszet $\eta = b'$ egyenesből (cyl. elem) és egy általános cissoisból áll (l. 12); asymptotája $\eta = b'$; $\eta = p'$ mellett kétszeres ponttal bir (26. ábra).

Ha $p' = r' \sin \varepsilon$, a konoid harmadfokú s e metszete általános cissois; egyenletét 12) alatt látjuk, a hol

$$\begin{aligned} f_1 &= p'; f_2 = -2s'p' \cotg \varepsilon; f_{3,6} = b'; \\ f_5 &= s'^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2; f_7 = -b'; f_8 = -p'; \end{aligned}$$

továbbá az $(\eta - f_4)$ factor elmarad. Asymptotája $\eta = p'$; a szerint, a mint $b' \geq r'$, a vonal alakját a 19. vagy 26. ábra ($\eta = b'$ mellett kétszeres ponttal 7e), $\eta = -r'$ esetre pedig a 27. ábra ($\eta = -r'$ mellett csúcsponttal, 7b) mutatja.

$\varepsilon = 90^\circ$ esetében a metszészonalak elliptikusok, s ha $\alpha = \delta$ (azaz a metsző lap parallel a kör lapjával), kör-cissoisok; a met-

szet $b'=r'$ esetében $\eta=r'$ egyenesre, s egy ellipszire (ha $a'=\delta$, akkor körre) bomlik fel.

Ha $\alpha'=\alpha$, azaz a metsző lap parallel a z -tengelylyel, a metszet harangvonal

$$\xi^2 = b \frac{\sin \alpha \sin \gamma (p' + \eta)}{\sin \gamma' \sin (\delta - \alpha) (p' - r')}$$

egyenlettel. Általában, ha $\alpha'=\alpha$, akkor $b'=\infty$ miatt a metszetek alakja nagyjában megegyezik azon vonalak alakjával, melyeket e szakaszban I. II. III. alatt $b'>r'$ föltétel mellett említettünk; az ilyen parallel metszeteknél (különböző b mellett ugyanazon η -értéknek b -vel arányos ξ -értékek felelnek meg. A metszésidomot határoló egyenesek közül az, mely a három parallel metszi, parallel a z -tengelylyel.

C) Lapmetszetek két asymptotával ($k>0$).

Ezek az előbb mondottak szerint minden körkonoidon eszközölhetők; a metsző lapnak kell a konoid két alkotójával parallelnek lennie.

A konoidot határoló éket e metsző lap a 8)-ban adott egyenesekben találja; a metszésgörbét az $\eta = +r'$, $\eta = -r'$ által határolt szalag azon része zárja be, mely e szalagból fennmarad, ha a 8*t*) egyenesek által belőle kivágott ($b'=\infty$ esetében) parallelogrammát, (véges $b'>r'$ esetében) trapézt, (absolut $b'=r'$ esetében) háromszöget vagy ($b'>r'$ esetében) átesapott oldalú trapézt elveszszük.

A görbe vonal asymptotái összeesnek (l. 5.), ha $\gamma'=\gamma$, azaz, a metszőlap parallel az x -tengelylyel; s ha ezenkívül $p'=0$, akkor e kettős asymptota a koordináták kezdőpontján megy át. Ha $\gamma'=0$, vagy $p'=0$ vagy $s''=-\operatorname{tg} \varepsilon$, akkor a két asymptota a kezdő ponttól egyenlő távolságban van. Ha $\gamma'=0$ és $\varepsilon=90^\circ$, azaz a metsző lap parallel mindkét kúpos elemmel, akkor a szélső $\eta = \pm r'$ egyenesek az asymptoták; az asymptotáknak csak egyike ily szélső egyenes ($\eta = +r'$), ha ($\varepsilon \geq 90^\circ$) a metsző lap az egyik kúpos elemmel parallel ($s'' = \frac{p' - r'}{r' \operatorname{cotg} \varepsilon}$).

I. A metszésvonalon $p'>r'$ esetében a szerint, a mint $b' \geq r'$, sem kétszeres, sem csúcspon t nincs (28. ábra), vagy rajta ($\eta = r'$ mellett, 7a) csúcspon t (29. ábra) vagy kétszeres pon t

($\eta = b'$, 7e) fordul elő. Utóbbi esetben, ha $b_1 = e_1$ (vagy e_2), azaz a lap magában foglal egy alkotót s így érinti is a konoidot, a metszet $r = b'$ egyenesből és egy általános cissoisból áll, melynek egyenletét 12), 13) alatt látjuk, mely utóbbiban $f_1 = e_2$ (illetőleg $f_1 = e_1$) teendő; a vonal alakját a 19. ábra mutatja.

II. Ha $p' = r'$, a metszet $\eta = r'$ mellett csúcsponttal van el látva (7c); $b' \geq r'$ esetére a vonal alakját — nagyjában — a 29. ábra tünteti fel. Ha $b' < r'$, akkor $\eta = b'$ mellett kétszeres pont fordul elő (7e) s a vonal $b' \geq e_2$ szerint a 31. vagy 32. ábrán feltüntetett alakkal bír. $b' = e_1$ (vagy $b' = e_2$) esetében a lap átmegy egy alkotón (tehát érinti is a konoidot) s a metszet $\eta = b'$ egyenesből s a fentebb említett általános cissoisból áll, (27. ábra; csúcspont $\eta = r'$ mellett). Ha $b' = -r'$, a görbén két csúcspont van, $\eta = +r'$ (7c) és $\eta = -r'$ mellett (7b) 33. ábra).

III. $p' < r'$ esetében a vonalon $\eta = p'$ mellett kétszeres pont fordul elő (7f).

1. Ha $p' > r' \sin \epsilon$, a metszet a szerint, a mint $b' \geq r'$, csakis az említett kétszeres ponttal (34. ábra), vagy $\eta = r'$ mellett még egy csúcsponttal (7a), 35. ábra), vagy pedig $\eta = b'$ érték számára még egy másik kétszeres ponttal (7e) bír; s mivel $p' > r' \sin \epsilon$ esetében $e_n > p'$ vagy $e_n < p'$, azaz az egyik kétszeres pont vagy mindkét — vízszintesnek gondolt — asymptota alatt v. fölött fekszik, azért a szerint, a mint $b' > e_n$ vagy $e_1 > b' > e_2$ vagy $e_n > b'$, a vonal alakját a 36. vagy 37. vagy 38. ábra mutatja (a hol $e_n > p'$ lett felvéve; ha $p' > e_n$, a 36. és 38. ábra felcserélendő). Ha $p' = b'$, a két kétszeres pont összeesik s a görbe vonal önmagát érinti (39. ábra). $b' = -r'$ esetében $\eta = -r'$ -nél csúcspont van (31. ábra). Ha $b' = e_1$ (vagy $b' = e_2$) a (konoidot érintő) lap átmegy egy alkotón s a metszet $\eta = b'$ egyenesből s egy általános cissoisból áll, melynek $\eta = p'$ mellett kétszeres pontja van (26. ábra).

Megjegyzendők még azon metszetek (általános conchoisok) is, melyek $\gamma' = \gamma$ s így $s'' = 0$ esetében származnak (a metsző lap parallel az x -tengelylyel).

Egyenletök

$$\xi = s' \frac{b' - \eta}{p' - \eta} (\pm \sqrt{r'^2 - \eta^2} - \eta \cotg \epsilon);$$

a ξ -tengelyvel parallel húrokhoz tartozó diametralvonal hyperbola

$$\xi(p' - \eta) = s'(\eta - b') \eta \cotg \varepsilon \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

egyenlettel. Tekintettel az értekezés elején mondottakra, alakjukat $b' \geq r'$ szerint a 40. 41. vagy 42. ábra mutatja.

Ha $p' = r' \sin \varepsilon$, a konoid harmadfokú és lapmetszetei általános cissoisok $\eta = f_1$ asymptotával; egyenletöket 12) mutatja, hol

$$f_1 = \frac{r' \sin \varepsilon (1 - s''^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2)}{s''^2 + (1 + s'' \cotg \varepsilon)^2}; f_2 = 2s'; f_3 = b'; f_4 = \\ = \frac{-r' s'' \operatorname{cosec} \varepsilon}{\cotg \varepsilon + s'' \operatorname{cosec} \varepsilon^2}; f_5 = -s'^2 \operatorname{cosec} \varepsilon^2; f_{6,7} = \pm b'; f_8 = -r' \sin \varepsilon.$$

Ha absolute véve $f_1 = r'$, azaz a metsző lap parallel az egyik kúpos elemmel, akkor a metszésvonal symmetrikus.

$p' < r' \sin \varepsilon$ esetében p' az e -értékek egyikénél nagyobb, másikánál kisebb, s így az $\eta = p'$ melletti kettőspont a két asymptota közt fekszik, s a vonal alakját $b' \geq r'$ esetekre a 30. illetőleg 32. ábra mutatja. Ha $b' < r'$, a vonalnak $\eta = b'$ mellett is van kétszeres pontja (7e), s alakja a szerint, a mint $b' > e_n$ vagy $e_1 > b' > e_2$ vagy $b' < e_n$, a 37. 43. vagy ismét a 37. ábrán látható. Ha $b' = p'$, a két kétszeres pont összeesik s a görbe vonal önmagát érinti (44. ábra); $b' = -r'$ esetére l. a 32. ábrát. Ha $b' = e_1$ (vagy $b' = e_2$), akkor a metszet $\eta = e_1$ (vagy $\eta = e_2$) egyenesből és egy általános cissoisból áll, melynek $\eta = p'$ mellett kétszeres pontja van (26. ábra.)

Megjegyzendők még a $\gamma' = \gamma$ (tehát $s'' = 0$) esetében származó általános conchoisok is; asymptotájok $\eta = p'$; a ξ -tengelyvel parallel húrokat hyperbola (l. 14.) felezi. E vonalak alakját a szerint, a mint $b' \geq r'$ a 45. 46. illetőleg 47. ábra mutatja. A $b' = p'$ eseten kívül (zárt lapmetszetek, b, α) ezen metszésvonalak symmetrikusak 1. ha $\varepsilon = 90^\circ$; ekkor (l. 14.) az átmérő $\xi = 0$, azaz az η -tengely; 2. $p' = 0$ esetében, a mikor átmérőjük $\xi = (b' - \eta) \cotg \varepsilon$, azaz ama egyenes, melyben a metsző lap a z -tengelyen és a vezető körnek az x -tengelyre merőleges átmérőjén átfektetett lapot (a konoidnak az x -tengelyvel parallel húrjaihoz tartozó diametrallapját) találja. Ha $\varepsilon = 90^\circ$, $p' = 0$ és $\alpha' = \delta$ (a mikor a metsző lap a kör lapjával parallel), a metszet, melynek egyenlete $\xi^2 \eta^2 = (b' - \eta)^2 (r'^2 - \eta^2)$, a közönséges conchois.

$\gamma' = 0$ esetében, vagyis a mikor a metsző lap parallel az y -tengelylyel, a metszésvonalat a választott egyenesekre mint összrendező-tengelyekre (mivel azok most paralelek) vonatkoztatni nem lehet; ilyenkor a ξ - illetve η -tengelyül azon AB , AC egyeneseket választjuk (48. ábra), melyekben a metsző lap az xy , xz lapokat találja. Jelölvén az OAC szöget φ -vel, s OA -t a -val, a síkban levő bármely P pontra nézve a térbeli xyz és a lapbeli ξ , η -koordináták közt a következő összefüggést nyerjük:

$$x = \frac{a \sin \beta - \eta \sin(\beta + \varphi)}{\sin \beta}; \quad y = \xi; \quad z = \eta \frac{\sin \varphi}{\sin \beta},$$

minek a konoid 1) alatti egyenletébe történt helyettesítése után a metszésvonal egyenlete lesz

$$\xi = \frac{t(a' - \eta)(p'' - \eta)}{\pm \sqrt{r''^2 - \eta^2} - \eta \cotg \varepsilon'}$$

$$\text{a hol } t = \frac{\sin(\beta + \varphi) \sin(\delta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \varepsilon \sin \varphi}; \quad a' = \frac{a \sin \beta}{\sin(\beta + \varphi)};$$

$$p'' = \frac{p \sin \beta \sin \delta}{\sin(\delta - \alpha) \sin \varphi}; \quad r'' = \frac{r \sin \beta \sin \delta}{\sin \alpha \sin \varepsilon \sin \varphi}.$$

Ezen metszeteknek asymptotái $\eta = \pm r' \sin \varepsilon$; ha a' vagy p'' vagy mind a kettő r'' -nél kisebb, a vonalaknak $\eta = a'$ vagy $\eta = p''$ értéknél vagy mindkettőnél kétszeres pontjaik vannak (és pedig az η -tengelyben), mivel az e pontokhoz vonható érintőkre nézve

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{1}{t} \left[\frac{\pm \sqrt{r''^2 - \eta^2} - \eta \cotg \varepsilon'}{a' + p'' - 2\eta} \right].$$

$$\eta = a' \text{ vagy } \eta = p''$$

Ezen vonalak az η -tengelyre nézve szimmetrikusak, ha $\varepsilon = 90^\circ$; ilyenkor asymptotáik az $\eta = \pm r''$ egyenesek.

$p'' > r''$ esetében a szerint, a mint $a' \geq r''$, a metszetnek kétszeres pontja nincs (49. ábra) vagy van (50. ábra). Ha $a' = r''$, a metszet $\eta = r''$ egyenesből s a közöséges cissois egyszerű ferde projectiojából áll; ugyanezt a görbét nyerjük a' -nak bármely értékénél, ha $p'' = r''$ (azaz a konoid harmadfokú). Ha pedig $p'' < r''$, akkor $a' > r''$ esetében ismét az 50. ábrán feltüntetett idomot nyerjük, mert a' és p'' -nek ugyanazon szerepe lévén az egyenletben, e mennyiségek feleszerélhetők; $a' = r''$ esetében a metszetet $\eta = r''$ egyenes és a fenn említett cissoisprojectio képezi; végre ha $a' < r''$, a metszés-

vonalnak még egy másik kétszeres pontja van (51. ábra), mely $a' = p''$ esetében az $\gamma = p''$ melletttel összeesik s a vonal két ága egymást az γ -tengelyben érinti. Ha $a' = p'' = 0$, a metszet mindkét koordinata tengelyre nézve symmetrikus.

III. A lapmetszetnek s érintőinek szerkesztése.

A) A lapmetszet szerkesztése.

Az 52. ábrán látjuk az ABC metszőlapot és a vezető közt (O_1) feltüntetve, mely utóbbinak lapját az yz lap OD -ben metszi.

Valamely az xy -lappal parallel S lap a kör lapját az x -tengelylyel parallel E_1E_2 -ben, yz lapot pedig az y -tengelylyel parallel E_0F -ben találja, s így ezen S lapban fekszenek a konoidnak $E_{1,2}F$ alkotói; másrészt pedig metszi az E_0F egyenes a BC -t G -ben, s így az S lap az ABC lapot az AB -vel parallel GH -ban; miért is az ugyanazon (S) lapban levő $E_{1,2}F$ -nek és GH -nak $P_{1,2}$ metszéspontjai az ABC lapnak a körkonoiddal képezett metszészögébénének egyes pontjait adják.

Ha most az $E_{1,2}F$ alkotókat, valamint a GH egyenest xy -lapra projiciáljuk, úgy, hogy a projiciáló sugár iránya a z -tengely, akkor az F, G, E_0 pontoknak, az E_1E_2 és GH egyeneseknek projectióit O, G', E'_0 -ben, illetőleg $E'_1E'_2, G'H'$ -ben találjuk, a mikor $E'_1E'_2$ egyenlő és parallel E_1E_2 -vel. $G'H'$ pedig GH -val. Az alkotók $E'_{1,2}O$ projectiói metszik a $G'H'$ -t a $P_{1,2}$ pontokban, melyek tehát a metszészög vonal $P_{1,2}$ pontjainak projectióit képezik az xy -lapon. — Az (O_1) kör projectióját (az xy -lapon) képező ellipsisnek, melynek az L_1L_2 átmérővel parallel egyik húrja $E'_1E'_2$, az L_1L_2 -vel conjugált I'_1O félátmérőjét nyerjük, ha az O_1 kört az xy -nal parallel lappal I_1 -ben érintjük, mely lapnak az yz -n levő KM nyomja a BC -t M -ben metszi, s azután M -nek s KI_1 -nek projectióját az xy -on M' - és $K'I'_1$ -ben felkeressük.

Tekintetbe véve még, hogy

$B'G : M'B = (BG : MB = E_0O_1 : KO_1) = E'_0O_1 : K'O_1$, a metszészög vonal (xy -on levő) most leirt projectiójának szerkesztését a következőképen eszközöljük.

Az egymáshoz γ alatt hajló egyenesek egyikén O_1 metszéspontjuktól kezdve (53. ábra) mindkét irányban az $O_1L_{1,2} = r$, másikán $O_1K'_1 = \frac{r \sin(\delta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \epsilon}$ távolságot kijelölván, az O_1L_1 -gyel parallel $K'I'_1$

távolságot $r \cotg \varepsilon$ -nal egyenlővé tesszük; $L_1 L_2$ és $I_1' I_2'$ adják a vezető kör projectiójának, egy ellipszisnek conj. átmérőit. Ha most $O_1 O = p$, tehát O a z -tengelynek projectiója; továbbá $OB = b$, és AB , azaz a metsző lap nyoma az xy lapon, $O_1 O$ -hoz γ' alatt hajlik; s végre ha $BM' = \frac{r \sin \delta \sin (x' - z)}{\sin x \sin x' \sin \varepsilon}$; akkor az $L_1 L_2$ -vel parallel,

külömben tetszés szerinti $E_1' E_2'$ húrnak végpontjain át az $E_{1,2} O$ egyeneseket, mint a konoid egy alkotó-párjának projectióját vonjuk és $BG' = \frac{BM' \cdot E_0' O_1}{K_1' O_1}$ folytán felkeresvén G' -t, az e pontból az AB -vel parallel vont egyenessel az $E_{1,2} O$ -t metszszük. A $P'_{1,2}$ metszéspontok a lapmetszet projectiójának pontjait adják. — Ezen $P'_{1,2}$ pontok segítségével magának a lapmetszetnek $P_{1,2}$ pontjait nyerjük (53. ábra), ha az $ABM = \omega$ szög BM szárán $BM = r'$ képezzük és $G'G \parallel MM$ vonván, az AB -vel parallel GH -ra $GP_{1,2} = G'P'_{1,2}$ felrakjuk.

$\alpha' = \alpha$ esetében, azaz a mikor a metszőlap parallel a z -tengelylyel, a metszőlapnak s így a lapmetszetnek is a projectiója az RS egyenes; RS -nek $O_1 O$ -val közös Γ' pontja tehát a projectiója az η -tengelynek, míg RS maga a ξ -tengely. A metszészvonal ($II_{1,2}$) pontjainak*) felkeresése végett tehát ω szög alatt az RS és OT' egyeneseket (54. ábra) vonjuk; továbbá $OI = r'$ képezvén, $OI = \frac{r' \cdot E_0' O}{K_1' O_1}$ segítségével a Γ pontot meghatározzuk és az RS -sel parallel $II_{1,2}$ -re $III_{1,2} = \Gamma' II'_{1,2}$ távolságokat felrakjuk.

Az 55. ábrán a metszészvonal projectiójának szerkesztését látjuk azon esetre, a mikor $\delta = \alpha$, azaz a kör lapja parallel a z -tengelylyel, úgy hogy a kör projectiója most az $E' L_2$ egyenes; a szerkesztéshez szükséges adatokat ugyanazon betűkkel jelöljük, melyekkel az 53. ábrán. A konoid azon $E_{1,2} O$ alkotóinak projectióját, melyek a $P_1 P_2$ egyenessel egy lapban vannak, oly módon nyerjük, hogy az $E' L_2 Q = \beta$ szög $L_2 Q$ szárát az $E' L_2$ -nek O_1 közepéből rajzolt körrel érintjük és $E_0' O_1 : JO_1 = BG' : BM$ képezvén, az E_0 -n átmenő és $E' L_2$ -vel parallel húr $E_{1,2}$ végpontjait az $L_2 Q$ -val parallel egyenesek segítségével $E' L_2$ -re $E'_{1,2}$ -be projiciáljuk; $E'_{1,2} O$ a keresett alkotó-projectiók, s ezeknek $P'_{1,2}$ metszéspontjai a $P_1 P_2$ -vel a metszészgörbe projectiójának pontjait adják.

*) Az 53. ábrán az ON és RS metszéspontját II_1 -gyel kell jelölni.

B) A metszésvonal érintőjének felkeresése.

A konoidot az $E_1 F$ alkotó hosszában (56. ábra) oly hyperb. paraboloid érinti, melynek az egyik rendszerhez tartozó két alkotója (vezető vonala) a z -tengely és a körnek $E_1 N$ érintője, iránylapja pedig az xy -lap; a másik rendszerbeli alkotók közé tartozik $E_1 F$ valamint ON is. Ha ez utóbbit P_0 azon arányban osztja, melyben $E_1 F$ -et valamely P_1 pontja, akkor $P_0 P_1$ -ben az első rendszernek egy harmadik alkotóját nyerjük. Az $E_1 F$ és $P_1 P_0$ egyeneseken átfektetett lap P_1 -ben érinti a hyperbolikus paraboloidot s így a konoidot is; e lapnak az xy -on levő nyoma áthalad P_0 -n, $E_1 F$ -fel parallel s a konoidot metsző ABC lapnak (melyben P_1 is fekszik) AB nyomát T -ben találja, miért is TP_1 az érintő- és az ABC lapnak közös vonala, vagyis az ABC lapban fekvő metszégörbének érintője P_1 -ben.

A lapmetszet megszerkesztett projectiójában (53. ábra) tehát P_1 ponton át, melyhez az érintőt képezni akarjuk, az $E'_1 O$ alkotó-projectiót, továbbá az ellipsishez az $E'_1 N$ érintőt, ez után pedig az ON egyenest vonjuk, mely utóbbit P_0 -val $OP_0 : ON = OP'_1 : OE'_1$ arányban felosztván, rajzoljuk az $E'_1 O$ -val parallel $P_0 T$ -t, mely AB -t T -ben metszi; $P'_1 T$ a metszésvonal projectiójának, $P_1 T$ pedig magának a metszésvonalnak egyik (keresett) érintője.

Azon megjegyzések után, melyeket $\alpha' = \alpha$ és $\delta = \alpha$ esetekre vonatkozólag a metszésvonal szerkesztésére tettünk, képesek vagyunk az ilyenkor nyert metszésidomokhoz is az érintőket egyszerű módon megrajzolni.

