A MADÁRREPÜLÉS ÁLTALÁNOS ELMÉLETE.

Dr. Martin Lajos egyet. tanártól.

Bevezetés.

A madár a legjobb repülőgép, s az ember csak úgy fog repűlhetni, ha a természetet utánozza. A felhők is repülnek, de nem oda, a hová a felhő akar, hanem a merre a szél viszi; akaratos repülést csak a madár képes gyakorolni s a szél igaz, hogy a felhőt viszi magával, de sokszor szét is tépi. Olyan repülést senki sem fog óhajtani.

A madárrepülés bizonyos törvényeknek van alávetve, s a madár, ha repülni akar, ezeket kénytelen követni. A ki tehát repülni akar, kell hogy a törvényeket ismerje, mert a ki azokat tudva vagy nem tudva megsérti repülés közben, fejével lakol.

Ha a madarak szervezeteit összehasonlítjuk, nagy változatosságot és különbséget tapasztalunk: az egyiknek a szárnya hosszú és keskeny, a másiké kurta es széles; az egyiké lapos, a másiké öblös. Épen olyan nagy eltéréseket tapasztalunk mozdulataikban a repülésnél. De bár milyen nagy is a különbség, a ki a dolog végére jár, meggyőződik, hogy az elvek mindig csak ugyanazok, a következése csak az, hogy az egyik madár egy csapással éri el azt, mihez a másiknak tíz szárnycsapás kell.

A repülés problémája három külön kérdésből áll.

Az első feladat ugyanis az: a szárnyfelületnek azon alakját s szegélyvonalának azon formáját meghatározni, melyeknél a szárnyműködés a legelőnyösebb; — a második feladat továbbá: az állhatóság feltételeit megállapítani, mert repülőgép állhatóság nélkül nem existálhat; — a harmadik feladat végre az: a legkedvezőbb arányokat a munkaerő, gyorsaság és haszonteher közt meghatározni.

A két első kérdés megfejtése nem igen nehéz, de annál nehezebb a harmadiké, melynek talán nincs is párja a mechánikában. Az első kérdés megfejtésével már 1862-ben foglalkoztam [1]; a jelen értekezés czélja a harmadik kérdést megfejteni. A mellett azon álláspontból indulok ki, hogy a repülés elvei függetlenek minden specialis szerkezettől, mert az elv nem igazitja magát a szerkezet szerint, hanem megfordítva a szerkesztés az elv szerint.

A jelen értekezés tehát nem tesz fel bizonyos formát vagy berendezést, hanem eltekintvén minden specialis berendezéstől, csak azt a kérdést fogja bolygatni: hogy melyek azon alap-feltételek, melyek a repülésnél döntenek s melyek szerint minden repülésre képes állat kénytelen a repülést végrehajtani.

Egy oly kérdés az, melylyel eddig még senkisem foglalkozott. Prechtl néhai műegyetemi tanár Bécsben „Untersuchungen über den Flug der Vögel" czímü munkájában 40 évi tanulmányairól a madarak repülése körűl sok érdekes dolgot hoz fel ugyan, de a madarak organikus szerkezetével bibelődvén, nem emelkedett fel azon általános álláspontra, melyből kiindulva a repülés elméletét teljesen befejezhette volna.

Alapfeltételek.

A repülés alapfeltételeit felismerhetjük, ha a madarat figyelemmel kisérjük a repülésnél. Igaz, hogy a madár sokszor mozdulatokat tesz, melyek a repüléshez legalább nem okvetlenül szükségesek, melyeket vagy pajzánságból tesz, vagy meglehet, mivel elbámészkodott élete megmentésére kénytelen megtenni. Ezekről el kell tekinteni s akkor kell a madarat megfigyelni, ha egészen szabadon van, s akadály vagy zavarnak nincs kitéve.

A mindennapi tapasztalás mutatja, hogy a madár valahányszor felszáll, a két szárnyát felemeli, kifeszíti s kifeszítve lecsap velök, s erre újra felemeli stb. A szárnyrepdesés, azaz a szárnyaknak fel- és alácsapdosása tehát az, a mi a repülést eszközli.

A mellett feltünő a synchronismus a szárnyak mozgásánál, továbbá feltünő, hogy a két szárny minden positióban symmetrikus a testi rendszer közepét elfoglaló testderékhoz. A test súlypontja

---

[1] L. Magyar akad. értesítő. III. köt. 176. s követk. lap.

tehát az, mely az egész szerkezetnek a centrumát képezi s a két szárny mindig symmetrikus, úgy alakukra, mint fekvésre nézve, azon vertikalis sík iránt, mely a madár súlypontján keresztül megy s a test hossztengelyét, melylyel a repülési irány mindig össze esik, magába foglalja. Az ok, hogy miért van ez így, magától átlátható. A symmetria és synchronismusnak az a következése, hogy a két szárny összeműködéséből olyan eredő erők jönnek létre, melyek a súlypont s a test hossztengelyén keresztűl menő vertikalis síkba esnek. A symmetria és synchronismus tehát az első törvény, mely a repüléshez megkivántatik. Ezt mint conditio sine qua non-t előre bocsátván tehát, nem is szükséges, hogy a számitást mindkét szárnyra kiterjeszszük, hanem elég, ha az egyik szárny iránt tisztába jövünk, ugyanaz állván a másikról is.

A madár, ha repűl, a szárnyával repdes, majd gyorsabb, majd lassubb tempoban.

Minden ilyen repdesés bizonyos időt vesz igénybe. A repdesés ideje két szakaszra osztandó. Az első szakaszban felemeli a madár a szárnyát, hogy csapáskész állapotba jusson; a másikban megteszi a madár a csapást, kifeszített szárnynyal a nyugvó levegőre lecsapván. Evvel véget ér a szándékba vett repdesés, — utánna következik ugyanazon játéknak az ismétlése, vagy egyenlő, vagy módositott tempóban.

Ezen egymást felváltó szárnyfelemeléseknél és lecsapásoknál bizonyos munkák fejlődnek. Ezek képezik a sarkpontot, mely körűl az egész kérdés forog. Mert ezen munkák egymás közti viszonya határozza meg a repülés módját és czélját. A repülésnek pedig háromféle czélja lehet. Lehet; hogy a madár a repdeséssel emelkedni akar, azaz hogy fel akar szállani; vagy lehet, hogy csak azon magasságban akar megmaradni, melyet a korábbi repdesésekkel elért volt, azaz hogy lebegni akar; vagy végre lehet, hogy le akar szállani, de úgy, hogy ez minden erőszakos rázkodtatás, vagy saját teste épségének a veszélyeztetése nélkül történjék.

A repdesés kezdetét veszi, ha a szárny a legmélyebb állásából kezd felemelkedni, s véget ér, ha ezen legmélyebb állást újra elfoglalja. Mivel a repdesés felemelés s lecsapásból áll s a két mozgás egymástól független, melyeket a madár a szükséghez képest módosit, tehát legyen $t_{\prime}$ a felemelés és t a lecsapás ideje, úgy hogy $(t+t_{\prime})$ az egész repdesés ideje. Ha a madár n ilyen repdesést végez másodperczenként, lesz

$$n\,(t + t_{,}) = 1$$

A felemelésnek csak az a czélja, hogy a szárny csapáskész állásba jusson; s hogy az alatt hatást nem gyakorol, magától értetődik; mert positiv hatást felfelé tartó mozgásánál fogva nem idézhet elő, negativ hatást pedig nem szabad fejlesztenie, mivel ez a rákövetkező lecsapás hatását csökkentené. Ezt a czélt elérte a természet az által, hogy a szárnynak olyan szerkezetet adott, mely a madárnak lehetővé teszi, hogy azt bár mikor is legyező módjára összehúzhatja vagy kifeszítheti. A mesterséges szárny, ha szilárdsági tekintetből legyezőforma szerkezetet nem tűrne meg, legalább olyant kell hogy kapjon, hogy a szárny felett levő levegő a felemelendő szárny előtt kitérhessen. Bár milyen legyen is a szárny szerkezete, fel kell tennünk, hogy a levegő a felemelés ideje alatt nyomást nem gyakorol a szárnyra, vagy ha gyakorolna is olyant, hogy az elenyésző kicsiny.

Vizsgáljuk most a felemelést kisérő tűneményeket.

A lebegő test, mivel a levegő a felemelés alatt nyomást nem gyakorol, ezen idő alatt a gravitatio hatásának van alávetve; ennek következtében a szabad esés törvénye szerint lefelé fog sülyedni, úgy hogy a madár a felemelési idő végén egy ezen idő négyzetével arányos oszlopmagassággal mélyebben lesz, mint volt a felemelés kezdetén. A mellett bizonyos munkát végez a gravitatio. Ha $t_{,}$ a szárnyfelemelés időtartama s P egy a sülyedő test súlyától függő constans, akkor a szabadesés munkája:

$$L_{,} = \frac{t_{,}^{2}}{P^{2}} \tag{1}$$

Ámde a szárny nem magamagától emelkedik fel, a madárnak kell azt saját testi erejével felemelnie; a felemelés tehát bizonyos munkába fog kerülni. A felemelés forgásból áll, melyet a szárny saját forgási tengelye körűl fölfelé végez; a madár tehát kénytelen azt a munkát megtenni, mely a forgás létrehozására szükséges s a melybe a szárny tömege tehetetlenségi nyomatékának legyőzése belekerül. Legyen $T_{,}$ a tehetlenség munkája, M^{2} egy a tömegtől függő constans, mivel a munka, egyenlő utaknál az idő négyzetével fordított viszonyban áll, lesz:

(2) $$T_{,} = \frac{M^2}{t^2}$$

A két egyenletet összeszorozván, nyerjük az új egyenletet:

(3) $$L_{,}T_{,} = \frac{M^2}{P^2}$$

Ezen egyenlet kimondja az első törvényt: szerinte a szabadesési és tehetlenségi munkák szorzata constans; de lehet a törvényt még így is kifejezni: a szabadesés és tehetetlenség munkái fordított viszonyban állanak egymáshoz. Mentől kisebb az egyik, annál nagyobb a másik.

Ismervén a szárnyfelemelés körűlményeit, vizsgáljuk a szárnylecsapást.

A lecsapás megint forgásból áll, melyet a szárny most ellenkező irányban hajt végre. A mellett kell, hogy a levegő a lehető legnagyobb nyomást gyakoroljon, mivégre tehát kell, hogy a szárny mereven kifeszítve maradjon.

A szárny s vele együtt a nyomások támadó pontjai a lecsapásnál bizonyos útakat írnak le; ama nyomások tehát munkát fejlesztenek, melyet a madártest magába felvesz, mint eleven erőt, mely egyensúlyba igyekszik helyezkedni a testi súlylyal.

Ha t a lecsapás időtartama, L a légnyomások munkája, mivel ez, egyenlő utaknál, az idő négyzetével fordított viszonyban áll, ha N^2 egy a szárny nagyságától s görbülésétől függő constanst jelent, lesz:

(4) $$L = \frac{N^2}{t^2}$$

Ha most $L > L_{,}$, azaz ha a szárny több munkát fejleszt a lecsapásnál, mint a szabadesés végzett volt a felemelés idejében: akkor a madártest nagyobb magasságban lesz a lecsapás végén, mint volt a felemelés kezdetén; a madár tehát, ha a repülést ezen a módon folytatja, emelkedni fog, azaz: ha a madár feljebb akar szállani, úgy kell a szárnyfelemelést és lecsapást kimérnie, hogy

$L > L_{,}$ legyen. — Ha megint $L = L_{,}$, azaz, ha a szárny a lecsapásnál épen annyi munkát végez, mint a mennyit a szabadesés a szárnyfelemelésnél végzett volt: akkor a madártest a lecsapás végén ugyanazon magasságban lesz, mint a melyben volt a felemelés kezdetén. A madár tehát, ha a repülést ezen a módon folytatja, visszanyeri minden szárnycsapásra azt a magasságot, melyet a repülés kezdetén elfoglalt volt. Ez a lebegés esete; a madárnak tehát, ha lebegni akar, úgy kell a szárnyfelemelést és lecsapást kimérnie, hogy $L = L_{,}$ legyen. Ha végre $L < L_{,}$, azaz, ha a szárny kevesebb munkát végez a lecsapásnál, mint a szabadesés végzett volt a szárnyfelemelésnél: akkor a madártest a lecsapás végén már nem éri el azt a magasságot, melyben a szabadesés kezdetén volt. Ez a leszállás esete; s a madár saját élete megmentésére kénytelen ezen esetben a szárnyfelemelést és lecsapást úgy kimérni, hogy az $L < L_{,}$ egyenlőtlenségből eredő leereszkedés a test épségét ne veszélyeztesse.

A szárnycsapásnak tehát az a feladata, hogy a sohasem nyugvó szabad esést időről-időre megszakítsa. Ez által azt éri el a madár, hogy a szabadesés végsebessége azt a hatást soha túl nem lépi, mely a test épentartását veszélyeztetné.

Ebből áll a repülés titka.

A mondottak szerint a madár vagy felszáll, vagy lebeg, vagy leszáll, a szerint, a mint a lecsapás és szabadesés munkáit viszonyítja. Legfontosabb a lebegés; mert ha az ehhez megkivántató feltételeket ismerjük, ezeknek módositása a lebegést felszállás vagy leszállásra fogja változtatni.

Vizsgáljuk tehát a lebegés körűlményeit.

Ha a madár lebegni akar, kell hogy:

$$L = L \tag{5}$$

egyen. A feltételből fontos következtetés vonható le. Ha ugyanis az (1) és (4) alatti egyenleteket összehasonlítjuk, nyeretni fog:

$$tt_{,} = NP \tag{6}$$

Mely egyenlet a repülés *második törvényét* kifejezi. Szerinte a felemelési és lecsapási idők szorzata állandó; a két idő tehát fordított viszonyban áll egymáshoz a lebegés esetében. —

Ha pedig az (1) és (4) alatti egyenletek összeszoroztatnak, nyeretik az új egyenlet:

$$(7) \qquad L L_{,} = \frac{N^2}{P^2}\left(\frac{t_{,}}{t}\right)^2$$

mely a harmadik törvényt kimondja, mely szerint: a felemelési és lecsapási idők viszonya a lecsapási és szabadesési munkák mértani középarányosa.

A (7) alatti egyenlet minden repülésnél érvényes; ha a lebegés esetét még azon kivűl külön számba vesszük, mivel akkor $L = L_{,}$, a (7), ennek tekintetbe vétele mellett, ebbe menend át:

$$(8) \qquad L_{,} = \frac{N^2}{P^2}\left(\frac{t_{,}}{t}\right)$$

mely egyenlet a negyedik törvényt kifejezi, mely szerint: a szabadesési és lecsapási idők viszonya a szabadesési munkával egyenes viszonyban áll a lebegés esetében.

A legkedvezőbb viszonyok meghatározása.

A fennebbi nyolcz képlet meg adja ugyan a háromféle munkát s azok egymásközti viszonyát, melyek a szárnyrepdesésnél előfordulnak, de hogy mi az egésznek a végeredménye, arról nem adnak felvilágosítást; ezt kapjuk a következő uton.

A szárnyrepdesés a felemelés és lecsapásból áll; az elsőt $t_{,}$, a másodikat t időben végzi; esik tehát egy ilyen repdesésre

$$t + t_{,} \text{ idő.}$$

Hogy az első megtörténjék, kell hogy a madár $T_{,}$ munkát végezzen, mert ennyibe kerűl a szárny felemelése. Hogy a második megtörténjék, L munkát kell végeznie. Hogy tehát az egész repdesést (t. i. felemelés és lecsapást) megtegye, bele kerűl a madárnak

$$L + T$$

munkába. Már most tegyük fel, hogy a madár másodperczenkint n ilyen csapást tesz: akkor a madárnak másodperczenkint fejlesztett munkája:

$$A = n\,(L + T_{,})$$

Ámde mivel a madár n repdesést tesz és egy ilyenre $t + t_{,}$ időt fordít, lesz:

$$n\,(t + t_{,}) = 1\,;\ \text{tehát}$$

$$A = \frac{L + T_{,}}{t + t_{,}}$$

Hogy $T_{,}$, t és $t_{,}$ a képletből kirekeszszük, térjünk vissza a (3), (4) és (1) alatti képletekre; szerintök van:

$$T = \frac{M^2}{P^2 L_{,}}$$

(9) $$t = \frac{N}{\sqrt{L}}\ \text{és}$$

(10) $$t_{,} = P\sqrt{L_{,}}\,;\ \text{ennélfogva lesz}$$

(11) $$A = \frac{L + \dfrac{M^2}{P^2 L_{,}}}{\dfrac{N}{\sqrt{L}} + P\sqrt{L_{,}}}$$

A formula adja a madár összes munkafejlesztését, még pedig: ha $L > L_{,}$ a felszállásnál; ha $L = L_{,}$ a lebegés s végre ha $L < L_{,}$ a leszállásnál. Legfontosabb a lebegés; ha ezt ismerjük, könnyü aztán a formulát a fel- és leszállás szerint beigazítni.

Legyen tehát $A = A_{,}$, ha $L = L_{,}$; akkor a (11) átmegy ebbe:

$$A_{,} = \frac{L_{,} + \dfrac{M^2}{P^2 L_{,}}}{\dfrac{N}{\sqrt{L_{,}}} + P\sqrt{L_{,}}}\ \text{azaz:}$$

(12) $$A_{,} = \frac{L_{,}^2 + \dfrac{M^2}{P^2}}{N\sqrt{L_{,}} + PL^{3/2}}$$

Az $A_{,}$ minden null és végtelen közt fekvő $L_{,}$-nél véges marad; $L_{,} = 0$ és $L = \infty$-nél az A ∞: tehát kell $A_{,}$-nek bizonyos $L_{,}$-nél minimumnak lennie. Ezt elérjük ha:

$\frac{dA_,}{dL_,} = 0$. Ámde

$$\frac{dA_,}{dL_,} = \frac{2L_,(N\sqrt{L_,} + PL_,^{3/2}) - \left(L_,^2 + \frac{M^2}{P^2}\right)\left(\frac{2\sqrt{L_,}}{N} + \frac{3P}{2}\sqrt{L_,}\right)}{(N\sqrt{L_,} + PL_,^{3/2})^2}$$

Ebből nyeretik az egyenlet:

$$2L_,(N\sqrt{L_,} + PL_,^{3/2}) - \left(L^2 + \frac{M^2}{P^2}\right)\left(\frac{N}{2\sqrt{L_,}} + \frac{3P}{2}\sqrt{L_,}\right) = 0;$$

rendezvén:

$$PL_,^{5/2} + 3NL_,^{3/2} - \frac{3M^2}{P^2}L^{1/2} - \frac{M^2N}{P^2\sqrt{L_,}} = 0;$$

ezt $\sqrt{L_,}$ megszorozván és P-vel osztván:

$$(13) \qquad L^3 + \frac{3N}{P}L_,^2 - \frac{3M^2}{P^2}L_, - \frac{M^2N}{P^3} = 0.$$

Ezen kubikus egyenletnek van mindig egy positiv valós gyöke; tehát minden M, N és P-nél létezik egy bizonyos L érték, melynél a (12) által kifejezett $A_,$ lebegési munka minimum. Mivel pedig M, N és P constansok a repülő madárnak vagy a repülő gépnek a szerkezete által meghatározvák, tehát következik, hogy minden repülő testnek bizonyos $L_,$ szabadesési munka elő van írva, melynél a lebegés munkája a minimumát eléri. Ezen minimum megfejti végre a repülés kérdését.

Mert mivel M, N és P a szerkesztés által adva vannak, $L_,$-et a (13)-ból ki lehet számítni. Ismervén L'-et az $A_,$ a (12)-ből nyerhető; másfelől a t a (9)-ből, a $t_,$ a (10)-ből meghatározható. Ennélfogva ismeretesek a lecsapási és felemelési idők; ezek összege: $(t+t_,)$ adja meg a repdesés időtartamát, és mivel $n(t+t_,) = 1$ végre a szárnycsapások számát is megkapjuk. Egyszóval a lebegés kérdése egészen meg van fejtve.

Ha nem lebegésről, hanem vagy fel- vagy leszállásról van szó; akkor fejtsük meg elébb a lebegést, úgy hogy $L_,$ $A_,$ t és $t_,$ a lebegésre nézve ismeretesek, s tegyük fel, hogy $A = A_{,,}$ és $t = t_{,,}$ ha $L = L_{,,}$, akkor a (9)-ből:

$$t_{,,} = \frac{N}{\sqrt{L_{,,}}}\text{; a (10)-ből:}$$

$$t_{,} = \sqrt{L_{,}}\text{; a (11)-ből:}$$

$$A_{,,} = \frac{L_{,,} + \dfrac{M^2}{P^2 L_{,}}}{\dfrac{N}{\sqrt{L_{,,}}} + P\sqrt{L_{,}}}\ \text{azaz:} = \frac{L_{,,}^{3/2} L_{,} + \dfrac{M^2}{P^2} L_{,,}^{1/2}}{NL_{,} + P\sqrt{L_{,} L_{,,}}}$$

kapható; végre a szárnycsapások száma:

$$n_{,,} = \frac{1}{t_{,,} + t_{,}}\ \text{képlet által adatik.}$$

Evvel a repülés problemája meg volna fejtve; de támaszkodva az elébbi lefejtésekre, lehet a számításnak még egészen más fordulatot adni. Lássuk azt is.

A (9) és (10) határozzák meg a t és $t_{,}$ időket a lebegés esetében. Ezek függnek, mint látjuk, N, P és $L_{,}$-től; ámde mivel $L_{,}$ szabadesési munka a (13) szerínt M, N és P függvényei. A míg ezek meg nem változnak, a t és $t_{,}$ idők sem, tehát ezek viszony $\frac{t}{t_{,}}$ sem változik meg.

Ha pedig t helyett $t_{,,}$ tétetik, $\frac{t_{,}}{t_{,,}}$ más értéket fog kapni; ha $t_{,,} < t$ lesz $\frac{t_{,}}{t} < \frac{t_{,}}{t_{,,}}$; ámde, ha $t_{,,} < t$, akkor a lecsapás rövidebb időben hajtatik végre, mint a lebegésnél, a lecsapás munkája tehát nagyobb lesz, mint a lebegésnél. Ha tehát $\frac{t_{,}}{t}$ helyett egy ennél nagyobb $\frac{t_{,}}{t_{,,}}$ viszony tétetik, a lebegés felszállásba megy átal. Megfordítva, ha $t_{,,} > t$ tehát $\frac{t_{,}}{t} > \frac{t_{,}}{t_{,,}}$ a lebegés leszállásba fog átmenni. Ezekből tehát az következik, hogy a

$\frac{t_{,}}{t}$ tört értéke a felett határoz, vajjon lebegés, fel-, vagy leszállásról van-e szó. Ebből látjuk, hogy a szabadesési és lecsapási idők viszonya a repülés módját meghatározzák s a repülésnél fontos szerepet játszik. Vezessük tehát be ezen mennyiséget.

Legyen tehát:

$$\frac{t_{,}}{t} = x, \text{ úgy hogy: } t_{,} = xt \text{ és}$$

$$t + t_{,} = t(1 + x); \text{ tehát}$$

$$nt(\ + x) = 1, \text{ akkor:}$$

$$t = \frac{1}{n(1 + x)} \text{ és}$$

$t_{,} = \frac{x}{n(1 + x)}$. Ennek következtében lesz (7) helyett:

$L L_{,} = \frac{N^2 x^2}{P^2}$ s ha lebegést teszünk fel, mivel akkor $L = L_{,}$,

a (8) helyett: $L = \frac{Nx}{P}$ nyerünk.

Ezt a (13)-ba helyettesítve, rövid egyszerüsítés után kapjuk:

$$x^3 + 3x^2 - 3\left(\frac{M}{N}\right)^2 x - \left(\frac{M}{N}\right)^2 = 0. \tag{14}$$

Ezen egyenletben csak M és N fordulván elő, az x független a P-től. Az egyenlet fenáll, ha a lebegési munka minimum, az x értéke tehát a minimum esetében P-től független. Akár mi legyen tehát a P, a minimum mindig elérhető. A P constans a repülő test súlyával, az M a szárny tehetlenségi nyomatékával s az N a szárny formájától függvén, következik, hogy a szabadesés és lecsapási idők viszonya: $x = \frac{t_{,}}{t}$ egyedül csak a szárny tehetlenségétől s formájától függ.

A (14) alatti egyenletnek megint más alakot lehet adni. Ha ugyanis x helyett $\frac{t_{,}}{t}$ tétetik, kis reductio után nyerjük:

$$(15) \qquad t_{,}^{3} + 3 t_{,}^{2} t - \frac{3 M^2}{N^2} t_{,} t^2 - \frac{M^2}{N^2} t^3 = 0.$$

Ha ebbe a (16) szerint $t t_{,}$ helyett $N P$ tétetik, ered:

$$t_{,}^{3} + 3 N P t_{,} - 3 \frac{M^2 P}{N} t - \frac{M^2}{N^2} t^3 = 0.$$

Kirekesztvén a (15)-ből a (9), vagy illetőleg a (10) segélyével vagy a t-et vagy a $t_{,}$-et, nyerjük a két egyenletet:

$$t^3 + 3 P \sqrt{L_{,}}\, t^2 - \frac{3 N^2 (P \sqrt{L_{,}})^2}{M^2} t - \frac{(N^2 P \sqrt{L_{,}})^3}{M^2} = 0 \quad \text{és}$$

$$t_{,}^{3} + \frac{3 N}{\sqrt{L_{,}}} t_{,}^{2} - \frac{3 M^2}{(\sqrt{L})^2} t_{,} - \frac{M^2 N}{(\sqrt{L_{,}})^3} = 0.$$

Ha ezekben megint $\sqrt{L_{,}}$ helyett vagy a (9) szerint t vagy a (10) szerint $t_{,}$ vezettetik be, és t vagy illetőleg $t_{,}$ mint osztó eltávolíttatik:

$$t_{,}^{6} + 3 N P t^3 - \frac{3 N^4 P^2}{M^2} t^2 - \frac{N^5 P^3}{M^2} = 0 \quad \text{és}$$

$$t_{,}^{6} + 3 N P t^3 - 3 M^2 P^2 t_{,}^{2} - M^2 N P^3 = 0.$$

Az első formula adja a lecsapás-, a második a szabadesés idejét M, N és P-ben kifejezve, ha a lebegés munkája minimum.

Következtetések.

A fennebbiekben lefejtettem azon elveket, melyek a madár, repülés alapját képezik. Specialis szerkezet sehol sincs kikötve· általános definitiók képezik a kiindulási pontokat. A levont eredmények tehát függetlenek minden berendezéstől, érvényesek tehát, akár madárról, akár rovarról, akár mesterséges repülő gépről van szó.

Igen közel fekszik a kérdés: vajjon képes-e az ember ön erején felemelkedni a levegőbe?

Már ember emlékezet óta arra törekszenek, hogy az ember a madár repülését utánozza; eddig ez még nem sikerült. Sokan azt következtetik abból, hogy az eszme kivihetetlen, sőt akadtak már s akadnak még most is olyanok, kik számszerüleg akarják a repülés lehetetlenségét bebizonyítni. Ámde a számítás nem helyes. Vaktában kiragadnak az elvek tömkelegéből egyet, mely önmagában véve helyes ugyan, de helytelenül van alkalmazva, felállítanak hozzá egy csonka képletet, mely csakugyan nem kedvező eredményre vezet, de melynél más fontos körülmények egészen mellőztetnek. Evvel aztán azt hiszik, hogy a repülés lehetetlenségét megczáfolhatlanúl bebizonyították.

Ezt a számítást arra állapítják, hogy minden szabadon lebegő test a gravitatiónak van alávetve, s ha azt akarjuk, hogy a test lebegjen, szükséges, hogy annyi munkát fordítsunk reá, mennyi a szabadesés által elvesztett oszlopmagasság visszanyerésére megkivántatik. Ez ugyan egészen helyes; a madár sem tesz mást, ha lebegve repül. Csak annyi munkát végez, mennyi a szabadesés okozta oszlopmagassági veszteségek pótlására kivántatik. Nem is ott van a baj, hanem máshol.

A tapasztalás tanítja, hogy a gravitatio gyorsulása $g = 9{\cdot}8$ metert kitesz, s a szabadesés oszlopmagasságát kiadja a formula:

$$h = \frac{g t^2}{2} \text{ hol } t \text{ idő másodperczekben kifejezendő}$$

A kik már most a repülés lehetetlenségében hisznek — s 1857-ben magam is tartoztam azokhoz — úgy okoskodnak, hogy a test csak akkor fogja magát lebegve fenntartani, ha másodperczenként 4·9 meterre felemeltetik, mert ennyi a h értéke, ha $t = 1$. De ez nem áll. Mert a h oszlopmagasság növekedik az idő négyzetével in infinitum, úgy hogy

ha a szabadesés 1 időmásodperczig tartott, $h = 4{\cdot}9$; ha 2 mp.-ig tartott $h = 4 \times 4{\cdot}9 = 19{\cdot}6$; ha 3 mp.-ig tartott $h = 9 \times 4{\cdot}9 = 44{\cdot}1$ metert tesz ki stb. Az a nézet tehát, hogy azon test, mely másodperczenként 4·9 meter magasságra emeli magát, minden alátámasztás nélkül szabadon lebeg, csak akkor helyes, ha a szabadesés csak 1 mp.-ig tart. S egy olyan testnél (mely csak 1 mp.-ig szabadon esik) áll az, hogy pl. a 75 méterkilogrammnyi lóerő $75 : 4{\cdot}9 = 15{\cdot}3$ kiló sulyt képes lebegve tartani. De ha a szabadesés nem 1 mp.-ig, hanem t ideig tart, akkor $h = 4{\cdot}9\, t^2$

és a lóerő ilyen körülmények közt nem 15·3, hanem $\frac{15 \cdot 3}{t^2}$ kiló súlyt fog elbirni. A hiba tehát abban van, hogy azok, a kik a repülés kivihetetlenségét akarják bebizonyítni, egészen indokolatlanúl felteszik, hogy a szabadesés ideje a lebegő testnél egy másodpercz. S ez nem helyes; mert a madár nem másodperczenként szakítja meg a szabadesést, hanem szárnycsapásról-szárnycsapásra. A körülmény megváltoztatja a számítást. Lássuk azt egy konkrét esetben.

Prechtl már idézett művében több madárfaj közt egy sasról is tesz említést, melyet a karintiai havasokban megfigyelt, s végre le lővén az állatot, testi sulyát azonnal megmérte, s a tetemet otthon szakszerüen felbonczolta. A sas súlya volt 3·6 kilónyi, a lebegésnél 1·744 szárnycsapást tett.

Ha a fenti nézet helyes volna, ezen állatnak 16·2 meterkilogramm munkába került volna a lebegés, azaz több mint két embererőbe! — De ez lehetetlen, mert miután az állat mp.-ként 1·744 szárnycsapást végzett, esik egy csapásra 0·57 mp. Ezen időnek megfelel 1·476 meter oszlopmagasság, a szabadesés oszlopmagassága kitett tehát mp.-ként nem 4·9, hanem csak 1·476 $\times$ 1·744 = 2·57 metert, s a lebegés tehát nem 16·2, hanem csak 9·25 méterkilogrammba kerülhetett. — De még ez is sok; mert a szárnyrepdesés áll felemelés és lecsapásból, s a 0·57 mp.-nyi idő eloszlik bizonyos arányban a két mozgás közt, a szabadesés pedig csak addig tart, a meddig a szárnyfelemelés tart. Tegyük fel a legrosszabb esetet, hogy az állat már nagyon el van fáradva, s a 0·57 mp.-nyi időt felerészben szárnyfelemelésre és felerészben lecsapásra fordítja, jut a szabadesésre csak 0·28 mp.-nyi idő, ennek megfelel 0·36 m. esési oszlop és a lebegés szárnycsapásonként csak 1·37 mk. erőbe kerülni. — Nem lehet mondani, hogy a számítás vérmes színben van tartva, mert csak azt tettem fel, hogy az által a szárnyat oly gyorsan felemeli, a milyen gyorsan vele lecsap. Ezt az állat csak akkor teszi, ha vagy nagyon el van fáradva, vagy ha veszélyből menekül, tehát a legvégső megerőltetés esetében; egyébkor mindig tapasztaljuk, hogy az állat a szárnyat nagyobb gyorsasággal felemeli, mint milyennel lecsapja. Így ama sas Prechtl szerint háromszor gyorsabban emelte a szárnyat, ama 0·57 mp.-ből tehát csak $^1/_4$ rész, azaz 0·14 mp. jutott a szabadesésre, ennek megfelel 0.098 méter esési oszlop, tehát 0·353 mk. munka s mivel

1·744 ilyen csapás történt mp.-ként, az összes másodperczuyi munka = 0·525 meterkilogramm.

Ezen számítás már most nem azt bizonyítja, hogy a repülés lehetetlen, sem azt, hogy a természet a madarat mesés munkaképességgel felruházta volna, hanem igenis azt bizonyítja, hogy a repülés kivihetősége attól függ, hogy milyen gyorsan következnek a szárnycsapások egymásra, és milyen arányban áll a felemelési idő a lecsapáséhoz. — S már most fel vagyunk jogosítva, fölvetni a kérdést vajjon képes volna-e az ember magát saját erejével a levegőben lebegve tartani? A kérdés meg lesz fejtve, mihelyt a szárnyfelemelési és lecsapási idők viszonyát az emberi erő és súlyhoz képest meghatározzuk. A számítás nem nehéz.

Legyen G a repülő ember súlya, t' és t'' a felemelési és lecsapási idők, $x = \frac{t'}{t}$ ezek viszonya és n a mp.-kénti szárnycsapások száma, akkor:

$$n\,(t + t_,) = 1, \text{ azaz } n t_, \left(\frac{1 + x}{x}\right) = 1 \text{ és } t_, = \frac{x}{n\,(1 + x)}$$

A szabadesés munkája egy szárnyfelemelésnél:

$$L_, = \frac{Gg}{2}\left[\frac{x}{n\,(1 + x)}\right]^2 \text{ tehát } n \text{ csapásnál:}$$

$$L = \frac{Gg}{2n}\left(\frac{x}{1 + x}\right)^2 \quad \text{Ebből } x = \frac{\sqrt{\frac{2n\,L}{Gg}}}{1 - \sqrt{\frac{2n\,L}{Gg}}}$$

Legyen például $G = 75$ kilo és $L = 7·5$ meterkilogramm, továbbá $n = 1$; akkor $x = \frac{1}{6}$, azaz az ember másodperczenként egy-egy csapást tévén egy arra való szárnykészülékkel, csak úgy volna képes saját erejének túlmegfeszítése nélkül magát lebegve tartani, ha a szárnyat hatszor gyorsabban tudná felemelni, mint lecsapni. A felemelés ideje $t_,$ tehát $= 0·125$ mp., a lecsapás ideje $t = 0·875$ mp. Ha $n = \frac{3}{2}$, akkor $x = 0·212$, azaz közel $= \frac{1}{5}$, azaz: az ember $n = 1·5$ szárnycsapásnál, mp.-ként végezve, képes lebegve tartani magát, ha a szárnyfelemelés ötször gyorsabban történik, mint a lecsapás. Tekintve azt, hogy az ember közönséges sétálásnál 90 lépést szokott tenni perczenként, tehát 1·5 lépést másodperczenként, s a mellett 7·5 meterkilogramm munkát végez, látjuk tehát, hogy a lebegés 1·5 szárnycsapásnál, ha x azon kivül $= \frac{1}{5}$, az embernek épen annyi erőltetésébe kerül, mint a közönséges séta.

Még egy esetre akarok reflektálni. Degen Jakab bécsi órás, köztudomás szerint 1809-ben kisérleteket tett, mint mondják, nem egészen kielégítő eredménynyel. Közelebbi adatok nem maradtak meg, csak azt tudjuk, hogy Degen felemelkedett, de soká nem birta a lebegést kitartani s ha a földre leszállt, roppantúl ki volt merülve. Noha nem tudjuk, hogy hány szárnycsapást tett mp.-ként, probáljuk meg a megerőltetést hozzávetőleg kiszámítni. — Degen közvetlenül a lábával mozgatta meg a szárnyakat; nem tévedünk tehát, hogy felemelés- és lecsapási idők egyenlők voltak, x tehát $= 1$; másfelől nem valószínü, hogy perczenként több mint 150 szárnycsapást tett volna, mert már ez is eléri a mérsékelt futás tempóját. Legyen tehát $n = 2{\cdot}5$, esik tehát egy szárnyfelemelésre 0·2 mp. a testi súlyt 70 kilóra becsülvén, nyeretik $L_1 = \frac{P g t_1^2}{2} = 13{\cdot}8$ mk. munka egy-egy csapásra, tehát ha 2·5 olyan csapást tett, lesz az összes munka $L = 2{\cdot}5\ L_1 = 34{\cdot}5$ mk., azaz 0·45 lóerő. Nem csoda tehát, ha a roppant megerőltetést csak rövid ideig birta kitartani.

Egyébiránt megjegyzendő, hogy ezen hozzávetőleges számítások, mivel csak a szabadesés munkájára kiterjednek, nem adják meg az összes munkafejlesztést, mely a repüléshez kivántatik; ehhez még azon munka is volna hozzászámítandó, melyet a szárny felemelése a tömeg tehetetlensége miatt igénybe vesz.
