

A FELÜLETEK ELMÉLETÉHEZ.

I. Az egymásra terithető felületek problemájáról.

Dr. Farkas Gyula egyet. tanártól.

Isothermás orthogonális (B o n n e t elnevezése szerint isometricus) felületi coordináta-rendszert használva (u, v) , az ebbéli coordinátáknak közönséges (egyenesvonalú orthogonális) coordináta-rendszerre (x, y, z) vonatkozó irány cosinusait $(\alpha, \beta, \gamma; a, b, c)$ a három Euler-féle szögivvel $(\vartheta, \varphi, \psi)$ fejezem ki. Ekkor a felületi vonalelemnek

$$e^{\omega} \sqrt{du^2 + dv^2}$$

jellemzőjét (ω) , mely az egymásra terithető felületek jellemzője is, (mint u és v funkcióját) adottúl tekintve, az egyik közönséges coordinátának (mint u és v funkciójának) a G a u s s-féle relatióból (Disqu. gen. cir. superf. curv. XI.) való meghatározása után az egyik Euler-féle szögivet quadratura, a másik kettőt egyszerű algebrai kifejezések szolgáltatják, úgy, hogy az egymásra terithető felületek problemája egy másodrendű másodfokú partiális differentiális egyenlet megoldására és három quadraturára reducálódik.

1. Isometricus rendszerben az ω jellemzőhöz tartozó felületek egyenletei tudvalevőleg

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 &= e^{2\omega}, \\ \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} &= 0, \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 &= e^{2\omega}. \end{aligned}$$

Irjuk, a fenti jelzéseknek megfelelően

$$(1) \quad \begin{cases} e^{-\omega} \frac{\partial x}{\partial u} = \alpha, & e^{-\omega} \frac{\partial y}{\partial u} = \beta, & e^{-\omega} \frac{\partial z}{\partial u} = \gamma, \\ e^{-\omega} \frac{\partial x}{\partial v} = a, & e^{-\omega} \frac{\partial y}{\partial v} = b, & e^{-\omega} \frac{\partial z}{\partial v} = c, \end{cases}$$

és három differentiális egyenletünk helyébe a következő egyenletek lépnek:

$$(2) \quad \begin{cases} x^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha a + \beta b + \gamma c = 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1, \end{cases}$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial v} (e^{\omega\alpha}) - \frac{\partial}{\partial u} (e^{\omega a}) = 0,$$

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial v} (e^{\omega\beta}) - \frac{\partial}{\partial u} (e^{\omega b}) = 0,$$

$$(5) \quad \frac{\partial}{\partial v} (e^{\omega\gamma}) - \frac{\partial}{\partial u} (e^{\omega c}) = 0,$$

mint a hat iránycosinus meghatározói, és

$$(6) \quad \begin{cases} dx = e^{\omega\alpha} du + e^{\omega a} dv, \\ dy = e^{\omega\beta} du + e^{\omega b} dv, \\ dz = e^{\omega\gamma} du + e^{\omega c} dv, \end{cases}$$

quadratura-egyenletek.

2. Vezessük be már most

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha = \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi + \sin \vartheta \sin \varphi, \\ \beta = \sin \vartheta \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi, \\ \gamma = \cos \varphi \sin \psi, \\ \\ a = \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi - \sin \vartheta \cos \varphi, \\ b = \sin \vartheta \sin \varphi \cos \psi + \cos \vartheta \cos \varphi, \\ c = \sin \varphi \sin \psi. \end{cases}$$

Ezzel a (2) alatti egyenleteknek egészen általánosan eleget tettünk. A (3), (4), (5) alatti egyenletekből ezt a hármat képezzük:

$$(3) \cos \vartheta \sin \psi + (4) \sin \vartheta \sin \psi - (5) \cos \psi = 0,$$

$$(3) (\cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi - \sin \vartheta \sin \varphi) + \\ + (4) (\sin \vartheta \cos \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \sin \varphi) - (5) \cos \varphi \cos \psi = 0,$$

$$(3) (\cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi + \sin \vartheta \cos \varphi) + \\ + (4) (\sin \vartheta \sin \varphi \sin \psi - \cos \vartheta \cos \varphi) - (5) \sin \varphi \cos \psi = 0,$$

melyek az eredeti hármat teljesen helyettesítik.

Beírva ezekbe (3), (4), (5) helyett a (3), (4), (5) alatti egyenletek beloldalaít, azután (7)-ből a hat iránycosinus kifejezéseit s erre a kijelentett operációkat formálisan végre hajtva, reductiók után a következő egyszerű alakokban nyerjük ki azokat:

$$(8) \quad \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} - \sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u} = \sin \varphi \sin \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial v} + \cos \varphi \sin \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial u},$$

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \omega}{\partial v} = \cos \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial u},$$

$$(10) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} = \cos \psi \frac{\partial \vartheta}{\partial v}.$$

Hozzájuk a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v \partial u}$$

identitás révén (9) és (10)-ből első rendű negyedik társ egyenletül

$$(11) \quad \sin \psi \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} \right) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2}$$

csatlakozik.

A (8), (9), (10), (11)-nek megfelelő ϑ , φ , ψ functiók a (7) alatti kifejezések kapesán a (6) alatti quadratura-egyenletekből adják ki az ω jellemzőhöz tartozó x , y , z coordinátákat, mint u és v functióit.

3. A (8) és (11) alatti egyenletekből a (9) és (10) alattiak segítségével ϑ derivatumai eliminálhatók, s ekkor két első rendű egyenletünk van φ és ψ között

$$(12) \quad \cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} - \sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u} = \operatorname{tg} \psi \left[\sin \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) + \cos \varphi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) \right],$$

$$(13) \quad \operatorname{tg} \psi \left[\frac{\partial \psi}{\partial v} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial u} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) \right] = \frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2},$$

míg a már innen egyszer meghatározott φ és ψ a (9) és (10) alatti egyenletekből quadraturával adja ki a ϑ functiót

$$(D) \quad d\vartheta = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) \frac{du}{\cos \psi} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \right) \frac{dv}{\cos \psi}.$$

4. Az iménti három egyenlet elseje (12) így írható:

$$\frac{\partial}{\partial u} (e^{\omega} \sin \varphi \sin \psi) = \frac{\partial}{\partial v} (e^{\omega} \cos \varphi \sin \psi),$$

és nem egyéb, mint γ és c -nek (7)-ből való helyettesítése után az (5) alatti egyenlet. Minthogy (1) és (7) szerint

$$\frac{\partial z}{\partial u} = e^{\omega} \gamma = e^{\omega} \cos \varphi \sin \psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = e^{\omega} c = e^{\omega} \sin \varphi \sin \psi,$$

tehát, ha rövidítésül

$$(A) \quad \frac{\partial z}{\partial u} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = q$$

írjuk,

$$(C) \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{q}{p}, \quad \sin \psi = e^{-\omega} \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Igy mihelyt z mint u és v függvénye meg van határozva, (C) a (12) alatti egyenletnek megfelelően adja ki φ és ψ függvényeket. Úgy, de (C)-ből φ és ψ a (13) alatti egyenletbe substituálva, ha továbbá rövidítésül

$$(A)' \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = t$$

teszszük, megnyerjük a z meghatározására szolgáló egyenletet

$$(B) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(r - p \frac{\partial \omega}{\partial u} + q \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) \left(t + p \frac{\partial \omega}{\partial u} - q \frac{\partial \omega}{\partial v} \right) \\ = \left(s - p \frac{\partial \omega}{\partial v} - q \frac{\partial \omega}{\partial u} \right)^2 - \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} \right) (e^{2\omega} - p^2 - q^2) \end{array} \right.$$

Összefoglalva: az (A) és (A)' jelzések szerinti (B) másodrendű másodfokú partialis differenciális egyenlet meghatározza az adott ω jellemzőhöz tartozó z függvényt; ezután a (C) kifejezések kiadják a φ és ψ függvényeket s a (D) egyenlet quadraturával kiadja a ϑ függvényt; végül α , β , a , b kifejezéseik (7)-ből (6)-ba iratván

$$(E) \quad dx = e^{\omega} (\cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi + \sin \vartheta \sin \varphi) du + e^{\omega} (\cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi - \sin \vartheta \cos \varphi) dv.$$

$$dy = e^{\omega} \sin \vartheta \cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi) du + e^{\omega} (\sin \vartheta \cos \varphi \cos \psi + \cos \vartheta \cos \varphi) dv$$

két quadratura szolgál x és y meghatározására.

5. A normalisoknak közönséges rendszerbeli iránycosinusait (l , m , n) megilletik a

(13) $l = -\cos \vartheta \sin \psi$, $m = -\sin \vartheta \sin \psi$, $n = \cos \psi$
 kifejezések. Ezek alapján az u. n. másodrendű alapmenntiségeek, azaz

$$\begin{aligned} L &= l \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + n \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \\ M &= l \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + m \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + n \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}, \\ N &= l \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + m \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + n \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \end{aligned}$$

igy jelennek meg:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= \left(\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u} - \sin \psi \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \right) e^{\omega}, \\ M &= \left(\cos \varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} - \sin \psi \sin \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right) e^{\omega}, \\ &= \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial u} + \sin \psi \cos \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \right) e^{\omega}, \\ N &= \left(\sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial v} + \sin \psi \cos \varphi \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right) e^{\omega}, \end{aligned} \right.$$

továbbá még így is:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= \frac{r - p \frac{\partial \omega}{\partial u} + q \frac{\partial \omega}{\partial v}}{\sqrt{e^{2\omega} - p^2 - q^2}} e^{\omega}, \\ M &= \frac{s - p \frac{\partial \omega}{\partial v} - q \frac{\partial \omega}{\partial u}}{\sqrt{e^{2\omega} - p^2 - q^2}} e^{\omega}, \\ N &= \frac{t + p \frac{\partial \omega}{\partial u} - q \frac{\partial \omega}{\partial v}}{\sqrt{e^{2\omega} - p^2 - q^2}} e^{\omega}. \end{aligned} \right.$$

Utóbbiakkal a Gauss-féle reláció

$$(F) \quad M^2 - LN = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial v^2} \right) e^{2\omega}$$

kiadja a (B) alati egyenletet. A másodrendű alapmenntiségeek derivátumai közt fenálló relatiók

$$(G) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial v} - \frac{\partial M}{\partial u} = (L + N) \frac{\partial \omega}{\partial v}, \\ \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} = (L + N) \frac{\partial \omega}{\partial u}, \end{array} \right.$$

melyek (15)-ből

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial s}{\partial u}, \quad \frac{\partial s}{\partial v} = \frac{\partial t}{\partial u}$$

identitások által következnek, az (*F*) relációval kapcsolatban némely feladatok szolgálatában előnyösen használhatók a (*B*) egyenlet integrációjának közvetítésére. Nevezetesen, mikor még egy *L*, *M*, *N* közti relációnak megfelelő felületek kiválasztásáról van szó pl. minimális felületek ($L + N = 0$), vagy a görbülésvonalrendszerre vonatkoztatott felületek ($M = 0$) stb. kiválasztásáról.

(Folytatása a következő füzetben.)