A FELÜLETEN FEKVŐ GÖRBÉK GEODAETIKUS GÖRBÜLÉSÉRŐL.

Schlesinger Lajostól, egyetemi docens Berlinben.

Sok tekintetben egy tetszőleges felületen a geodaetikus vonal hasonlólag viselkedik, mint a síkban az egyenes. — Ugy mint a sík görbe érintője az az egyenes, mely a görbe két végtelen közel fekvő pontján halad át, úgy valamely tetszőleges felületen fekvő görbe „geodaetikus érintője" mint az a geodaetikus vonal van értelmezve, a mely a görbe két végtelen közel fekvő pontján megy át; továbbá úgy, mint a síkban valamely görbe két egymásra következő érintőjének hajlásszöge, elosztva a görbe ívelemével, meghatározza a görbülést, úgy a felületen fekvő görbe két egymásra következő geodaetikus érintőjének hajlásszöge, elosztva az ívelemmel, a görbe g e o d a e t i k u s g ö r b ü l é s é n e k neveztetik.

A következőkben a geodaetikus görbülés számára egy könnyen áttekinthető kifejezést állítunk fel és evvel kapcsolatban meg fogjuk határozni tetszőleges felületen lévő „geodaetikus körök" geodaetikus görbülését.

1.

Legyen A, M, M′ valamely adott felületen fekvő görbének három egymásra következő pontja. Fektessünk A és M pontokon, valamint M és M′ pontokon át geodaetikus vonalokat. Ezek az A illetőleg M pontokban a görbéhez vont geodaetikus érintők. Az A, M pontokon átmenő T egyenes, a görbe egyenes érintője A pontban, az M, M′ pontokon átmenő T′ egyenes közös érintője M pontban az eredeti görbének és az ehhez M pontban vont geodaetikus érintőnek. Az A pontban vont geodaetikus érintő Γ, M ponton megy át, de M-re következő pontja á l t a l á b a n már nem esik össze M′-mel és ennélfogva a Γ-hoz M pontban vont egyenes érintő G, bizonyos ϑ-szöget ké-

képez T′ egyenessel, mely szög a két egymásra következő geodaetikus érintő hajlását méri. Ennélfogva a görbe geodaetikus görbülése M pontban

$$K = \frac{\vartheta}{ds},$$

ha ds a görbe $\overline{MM'}$ ívelemét jelzi.

A T, T′ egyeneseken átmenő S sík, a görbe simuló síkja (Schmiegungsebene), a G, T′ egyeneseken átfektetett sík pedig a felület érintő síkja P.

Minthogy a geodaetikus vonal főnormalisa minden pontban összeesik a felület normalisával, valamely geodaetikus vonal két egymásra következő eleme normális-metszet síkjában fekszik. Ennélfogva a T, G egyeneseken átmenő N-sík a normális metszetnek a síkja. Igy P-sík N-síkra merőleges, és ha φ a simuló sík és a szóban lévő normalis metszet egymáshoz hajlásának szöge, ϑ a T, T′ egyenes érintők hajlásszöge, akkor a föllépő derékszögü gömb-háromszögben

$$\sin\vartheta = \sin\vartheta' \, . \, \sin\varphi,$$

és mivel ϑ, ϑ' végtelen kis szögek sinusai helyett az íveket irhatjuk,

$$\vartheta = \vartheta' \, . \, \sin\varphi.$$

Ekként a geodaetikus görbülés

$$K = \frac{\vartheta'}{ds}\sin\varphi,$$

és amiatt, hogy $\frac{\vartheta'}{ds}$ nem egyéb, mint a görbe közönséges görbülése azaz R görbülési radius forditott értéke, egyszersmind

$$K = \frac{\sin\varphi}{R},$$

mely kifejezést egyik dolgozatában először Liouville állitotta fel.[1])

---

[1]) Monge „Applications de l'Analyse à la Géometrie. 2-e edition (1850)", 2-e Note, 576 l.

2.

Legyenek a felület pontjainak koordinátái, mint két független u, v paraméter függvényei

$$(1)\quad \begin{cases} x = f(u, v) \\ y = g(u, v) \\ z = h(u, v) \end{cases}$$

és tegyük [1])

$$A = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}; \qquad E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$B = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u}; \qquad F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v};$$

$$C = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}; \qquad G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

akkor a felület normálisának irány-cosinusai

$$\frac{A}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{EG-F^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{EG-F^2}}$$

Valamely az (1) felületen fekvő görbe adva van egy az u, v parameterek közötti

$$(2)\qquad H(u, v) = 0.$$

egyenlet által. Ha ebből az egyenletből az egyik paramétert, mint a másiknak a függvényét, például a v-t, mint az u függvényét meghatározzuk, akkor a görbe pontjainak a koordinátái következő alakban vannak adva:

$$(3)\qquad \begin{cases} x = \Phi(u), \\ y = \Psi(u), \\ z = X(u). \end{cases}$$

Tegyük

$$\mathrm{A} = \frac{dy}{du}\frac{d^2z}{du^2} - \frac{dz}{du}\frac{d^2y}{du^2},$$

$$\mathrm{B} = \frac{dz}{du}\frac{d^2x}{du^2} - \frac{dx}{du}\frac{d^2z}{du^2},$$

$$\Gamma = \frac{dx}{du}\frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du}\frac{d^2x}{du^2},$$

[1]) Gauss: Desquisitiones generales circa superficies curvas. Gesammelte Werke, Bnd. IV, 233, 235 l.

akkor a símuló sík normálisának iránycosinusai

$$\frac{\mathrm{A}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}} \quad \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}} \quad \frac{\Gamma}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}$$

minélfogva

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}}\left(A\mathrm{A}+B\mathrm{B}+C\Gamma\right);$$

mivel pedig ismert képletek szerint a (3) görbülési radiusa

$$\mathrm{R} = \frac{\left(\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{du}}\right)^3}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\Gamma^2}},$$

a hol ds az ívelemet jelenti, az 1. fejezet utolsó egyenletéből folyólag:

$$\mathrm{K} = \frac{A\mathrm{A}+B\mathrm{B}+C\Gamma}{\left(\frac{\mathrm{ds}}{\mathrm{du}}\right)^3\sqrt{\mathrm{EG}-\mathrm{F}^2}}$$

Ezen kifejezés számlálóját még következőkép lehet átalakítani. Nyilvánvaló, hogy

$$(4)\quad A\mathrm{A}+B\mathrm{B}+C\Gamma = \Sigma\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{x}}{\mathrm{du}^2}\left(B\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{du}}-C\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}}\right),$$

a hol a Σ összegjel jelentése az, hogy azon három kifejezés összege veendő, mely a kiírt tagból az x, y, z cyklikus permutálásánál (x, y, z; y, z, x; z, x, y) keletkezik. — Mivel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}} = \frac{\partial}{\partial\mathrm{u}}+\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}}\frac{\partial}{\partial\mathrm{v}};$$

ekként

$$B\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{du}}-C\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}} = B\frac{\partial\mathrm{z}}{\partial\mathrm{u}}-C\frac{\partial\mathrm{y}}{\partial\mathrm{u}}+\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}}\left(B\frac{\partial\mathrm{z}}{\partial\mathrm{v}}-C\frac{\partial\mathrm{z}}{\partial\mathrm{v}}\right),$$

vagy

$$(5)\quad B\frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{du}}-C\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}} = \frac{\partial\mathrm{x}}{\partial\mathrm{v}}\left(E+F\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{du}}\right)-\frac{\partial\mathrm{x}}{\partial\mathrm{u}}\left(F+G\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial\mathrm{u}}\right),$$

és két hasonló egyenlet, mely a felírtból x, y, z cyklikus permutálásánál keletkezik.

Ha most még figyelembe vesszük, hogy

$$\frac{d^2}{du^2} = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2\frac{dv}{du}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{d^2v}{du^2}\frac{\partial}{\partial v}$$

és tehát

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial v}\frac{d^2x}{du^2} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v}\frac{dv}{du} + \frac{\partial G}{\partial v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + G\frac{d^2v}{du^2},$$

$$\Sigma\frac{\partial x}{\partial u}\frac{d^2x}{du^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{\partial v}\frac{dv}{du} + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + F\frac{d^2v}{du^2}$$

akkor az (5) kifejezések, (4) egyenlet második tagjába való helyettesítésének eredménye [1])

$$(6)\quad \mathit{A}\,\mathrm{A} + \mathit{B}\,\mathrm{B} + \mathit{C}\,\Gamma = \left(E + \frac{dv}{du}F\right)\left\{\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial u}\frac{dv}{du} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial v}\frac{d^2v}{du^2} + G\frac{d^2v}{du^2}\right\} - \left(F + \frac{dv}{du}G\right)\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial u} + \frac{\partial E}{dv}\frac{\partial v}{du} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial F}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u}\right)\left(\frac{dv}{\partial u}\right)^2 + F\frac{d^2v}{du^2}\right\}$$

Az u, v paramétereket akként válasszuk, hogy koordinátáink ugynevezett g e o d a e t i k u s p o l á r i s-k o o r d i n á t á k legyenek. [2])
Akkor:

$$E = 1\,, \qquad F = 0\,.$$

Ha aztán, mint szokásos

$$G = m^2,$$

és a (2) egyenletnek megfelelő $\frac{dv}{du}$ értéket:

[1]) V. ö. Gauss az id. helyen art. 18. 243. l.

[2]) Gauss, az id. helyen art. 19, 243. l.

$$\frac{dv}{du} = -\frac{\frac{\partial H}{\partial u}}{\frac{\partial H}{\partial v}} = k \,,$$

tesszük, úgy (6) egyenletből:

$$\mathit{A}\,A + \mathit{B}\,B + \mathit{C}\,\Gamma = m\left\{2\frac{\partial m}{\partial u}k + \frac{\partial m}{\partial v}k^2 + m\frac{dk}{du} + m^2\frac{\partial m}{\partial u}k^3\right\} \,,$$

tehát

$$\mathit{A}\,A + \mathit{B}\,B + \mathit{C}\,\Gamma = \frac{(1+m^2k^2)^{3/2}}{k}\left\{\frac{mk^2\frac{\partial m}{\partial u}}{\sqrt{1+m^2k^2}} - \frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{1+m^2k^2}}\right)\right\}$$

Vagy ha

$$\frac{du}{dv} = \frac{1}{k} = u' \,,$$

lesz

$$\mathit{A}\,A + \mathit{B}\,B + \mathit{C}\,\Gamma = \frac{(u'^2+m^2)^{3/2}}{u'^3}\left\{\frac{m\frac{\partial m}{\partial u}}{\sqrt{u'^2+m^2}} - \frac{d}{dv}\left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2+m^2}}\right)\right\}$$

és mivel

$$ds = \sqrt{du^2 + m^2 dv^2} \,,$$

lesz végre:

$$(7)\quad K = \frac{\partial m}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{u'^2+m^2}} - \frac{1}{m}\frac{d}{dv}\left(\frac{u'}{\sqrt{u'^2+m^2}}\right).$$

3.

A geodaetikus poláris koordináta rendszerben azok a görbék, a melyek hosszában u = const., úgynevezett g e o d a e t i k u s k ö r ö k, míg a v = const. görbék geodaetikus vonalok.

A geodaetikus kör azzal a tulajdonsággal bír, hogy minden pontja a felület egy bizonyos pontjától (középponttól) ugyanazon geodaetikus távolra van.[1] Az $u = u_1$ geodaetikus kör (a hol u_1

[1] Gauss az id helyen art. 15, 16.

állandó) minden pontjának az $u = o$, $v = o$ sarktól való távola u_1-val egyenlő s ennek a görbének a geodaetikus görbülése a 2. fejezet (7) egyenlete szerint

$$(1) \qquad K = \frac{1}{m}\left[\frac{\partial m}{\partial u}\right]_1$$

a hol $\left[\frac{\partial m}{\partial u}\right]_1$ a $\frac{\partial m}{\partial u}$-nek $u = u_1$-hoz tartozó és igy csak v-től függő értéke. Feladatunk az lesz K–t tehát $\left[\frac{\partial m}{\partial u}\right]_1$ értékét meghatározni.

E végből számitsuk ki curvatura integráját[1]) a felületen fekvő oly háromszögnek, a melynek két oldala $v = o$ és $v = \alpha$ geodaetikus vonalak és melynek harmadik oldala $u = u_1$ görbe, a hol α úgy, mint u_1 állandó mennyiségek. Képzeljük a kérdésben levő háromszöget $v =$ const. és $u =$ const. görbék által végtelen kis négyszögek hálójával bevonva. Egy ilyen négyszög területe

$$dw = m\ du\ dv.$$

Ha $\overline{K}$ a felület görbülésének Gauss-féle mértéke akkor[2])

$$\overline{K} = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial u^2}$$

és ennélfogva a háromszög curvatura integrája

$$J = \pm \int\int \frac{dw}{\overline{K}} = \pm \int_o^{\alpha} dv \int_o^{u_1} \frac{\partial^2 m}{\partial u^2} du \quad ,$$

vagy minthogy[3])

$$\text{ha } u = o, \text{ úgy } \frac{\partial m}{\partial u} = 1,$$

[1]) Gauss az id. helyen art. 6.

[2]) Gauss ugyanott 244. l.

[3]) Ugyanott.

ekként

$$(2) \qquad J = -\alpha + \int_0^\alpha \left[\frac{\partial m}{\partial u}\right]_1 dv.$$

De Natani úr egy tétele szerint,[4]) valamely felületen fekvő háromszög curvatura integrája

$$\alpha + \beta + \gamma - \Sigma\, d\vartheta - \pi$$

kifejezés által adatik, a hol α, β, γ a háromszög szögei, $d\vartheta$ pedig az a szög, a melyet a háromszög kerületének valamelyik iveleme a maga geodaetikus folytatásával képez, és a hol a Σ összegjel a háromszög egész kerületére vonatkozik. A mi háromszögünkre nézve

$$J = \alpha - \Sigma\, d\vartheta\,,$$

mert minden $v = \text{const.}$ görbe, minden $u = \text{const.}$ görbét drékszög alatt metszi. Minthogy továbbá a $v = o$, $v = \alpha$ oldalok geodaetikus vonalok lévén, ezekre nézve

$$\Sigma\, d\vartheta = o\;,$$

igy

$$(3) \qquad J = \alpha - \int_0^\alpha d\vartheta\;.$$

Az 1. fejezet szerint

$$K = \frac{d\vartheta}{ds}$$

ha t. i. ds az $u = u_1$ görbe ívelemét jelzi, tehát (1) egyenletből folyólag

$$d\vartheta = \left[\frac{\partial m}{\partial u}\right]_1 \frac{ds}{m}\,.$$

Ez (3) egyenletbe helyettesítve és az igy létrejövő kifejezés (2) egyenlettel összehasonlítva ehhez vezet:

---

[4]) Joachimsthal, Anwendungen der Differential- und Integralrechnung etc. 24 Auflage (1881), Anhang 235 l.

$$2\alpha - \int_0^\alpha \left[\frac{\partial m}{\partial u}\right]_1 \frac{ds}{m} = \int_0^\alpha dv \left[\frac{\partial m}{\partial u}\right]_1 .$$

Mivel pedig

$$ds = dv.\, m\,,$$

így

$$\alpha = \int_0^\alpha \left[\frac{\partial m}{\partial u}\right]_1 dv\,.$$

Minthogy α tetszőleges állandó mennyiséget jelent, ebből

$$(4) \qquad \left[\frac{\partial m}{\partial u}\right]_1 = 1$$

következik azaz valamely $u = u_1$ geodaetikus kör geodaetikus görbülése

$$K = \frac{1}{m}\,.$$

4.

Általában m az u és v függvényve tehát egy $u = \text{const.}$ görbének, azaz valamely geodaetikus körnek a pontjaiban a geodaetikus görbülés a v értékével változik és csak akkor fog minden egyes geodaetikus kör hosszában állandó értékkel birni, ha m a v-től független, azaz, ha m csupán az u-nak a függvénye,

$$m = \varphi(u)\,.$$

Ez esetben a 3. fejezet (4) egyenlete szerint

$$\frac{\partial m}{\partial u} = \varphi'(u) = 1\,,$$

tehát

$$m = u + \text{const.}$$

és mivel a pólusban, a hol $u = o$, $v = o$, az m eltünik,

$$m = u\,.$$

Azaz a geodaetikus körök geodaetikus görbülése csak oly felületen állandó, a mely felületen egy (u, v) geodaetikus polaris koordinata rendszerben

$$E = 1,\ F = o,\ G = u^2.$$

Ezeken a felületeken a görbülés Gauss-féle mértéke *zérus*, tehát ezek síkra leteríthető felületek.

A síkra leteríthető felületek tehát az egyedüliek, a melyeken a geodaetikus körök egyszersmind állandó geodaetikus görbülés görbéi.

Berlin, 1891. máj. 19.