DIE WACHSTUMSSCHICHT IN EINER KUGELSCHALE.

Studie aus dem Gebiete der theoretischen Organik.

Von K. Fuchs.

Die Kenntniss der Lebewesen ist heute so weit vorgeschritten, dass eine mathematisch-physikalische Behandlung des Materiales, d. h. die Begründung einer theoretischen Organik heute eben so notwendig geworden ist, wie die theoristische Physik schon seit Galileis Zeiten die notwendige Ergänzung der Experimentalphysik ist. Auf dem Gebiete der theoretischen Organik bewegt sich meine in den Sitzungsberichten der Wiener Akademie der Wissenschaften im laufenden Jahre erschienene Studie „Ueber die Entstehung organischer Cylindergebilde". Dort ist unter Anderem folgendes Problem behandelt: Es ist eine unendliche ebene Platte von dem Materiale M. und der Dicke H. Links von ihr befindet sich ein Medium N_1 von der constanten Dichte P_1, rechts ein Medium N_2 von der constanten Dichte P_2, und beide Stoffe deffundiren in die Platte mit verschiedener Geschwindigkeit, entsprechend den Deffusionsconstanten w_1 und w_2. In der Ebene, wo die beiden Stoffe einander begegnen, sollen sie sich sofort zu Substanz M chemisch vereinen, u. zw. im Massenverhältnis $n_1 : n_2$, wobei $n_1 + n_2 = 1$ ist. Es sind dort die Entfernungen h_1 und h_2 bestimmt in denen diese Wachstumsschicht von den beiden Oberflächen der Platte liegt, wobei natürlich $h_1 + h_2 = H$ ist.

Wir wollen nun dasselbe Problem für eine Hohlkugel vom Innenradius R_1 und Aussenradius R_2 behandeln; wir suchen den Radius R_0 der Wachstumsschicht. Die ganze Untersuchung gilt, wie man leicht erkennt, der Lage des Meristeme unter krummen Oberflächen.

Die Rechnung gestaltet sich folgendermassen:

1) Wenn Kerne-Stauung stattfinden soll, dann muss per Secunde durch jede Kugelfläche von einem Radius r_1 zwischen R_1 und

R_0 die gleiche Menge M_1 von N_1 in centrifugaler Richtung diffundiren. Wenn w_1 die Diffusionsconstante von N_1 ist dann ist

$$M_1 = 4\pi . r_1^2 \omega_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial r_1}$$

Wenn an die Wachstumsschicht per Zeit- und Flaecheneinheit die N_1 — Masse m_1 einströmen soll, dann muss gelten

$$4\pi R_0^2 m_1 = M_1$$

Durch Elimination von M_1 finden wir

$$r_1^2 \omega_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial r_1} = R_0^2 m_1$$

Nun muss offenbar für ein positives ∂r_1 das $\partial \rho_1$ negativ sein, d. h. die Curve muss ein Gefälle in centrifugaler Richtung haben, weswegen wir schreiben

$$\partial \rho_1 = - \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1} \frac{\partial r_1}{r_1^2}$$

Durch Integration finden wir die Formel der Dichtigkeitscurve von N_1 als

$$\rho_1 = \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1 r_1} + c_1$$

Die Constante c_1 bestimmen wir durch die Bedingung, dass für $r_1 = R_0$ auch $\rho_1 = o$ werden Muss. Das gibt

$$o = \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1 R_0} + c \quad \text{oder} \quad c = - \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1 R_0}$$

Dies eingeführt erhalten wir

$$\rho_1 = \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_0} \right)$$

Für $r_1 = R_1$ muss $\rho = P_1$ werden, also gelten

$$P_1 = \frac{R_0^2 m_1}{\omega_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_0} \right) = \frac{m_1 R_0}{\omega_1 R_1} \left(R_0 - R_1 \right)$$

und auf analoge Weise finden wir für N_2

$$P_2 = \frac{R_0^2 m_2}{\omega_2} \left(\frac{1}{R_0} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{m_2 R_0}{\omega_2 R_2} \left(R^2 - R_0 \right)$$

Diese beiden Formeln liefern uns die Entfernungen h_1 und h_2 der Wachstumsschicht von den beiden Oberflächen der Hohlkugel, denn es ist $h_1 = R_0 - R_1$ und $h_2 = R_2 - R_0$, so dass die beiden Formeln nun lauten

$$P_1 = \frac{m_1 \, h_1}{\omega_1} \frac{R_0}{R_1} \qquad P_2 = \frac{m_2 \, h_2}{\omega_2} \frac{R^0}{R_2}$$

wobei R_0 verschwunden ist. Nun soll jedesmal, wenn von N_1 und N_2 zusammengenommen die Masseneinheit verbraucht wird, hiebei von N_1 die Masse n_1, von N_2 aber die Masse n_2 verbraucht werden, so dass wir die zwei Gleichungen erhalten

$$n_1 + n_2 = 1 \qquad m_1 : m_2 = n_1 : n_2$$

Die letztere Gleichung oben eingeführt ergibt

$$\frac{h_1}{h^2} = \frac{\omega_1 \, n_2 \, P_1 \, R_1}{\omega_2 \, n_1 \, P_2 \, R_2}$$

Wir vollen die Brüche

$$\frac{\omega_1 \, P_1}{n_1} = a \qquad \frac{\omega_2 \, P_2}{n_2} = b$$

welche in der Folge oft auftauchen werden, in der abgekürzten Form einführen und somit schreiben

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{R_1}{R_2}$$

Diese bequeme Formel liefert nun ohne Mühe den Radius R_0 der Wachstumsschicht, und wenn wir $h_1 + h_2 = H = R_2 - R_1$ setzen, auch h_1 und h_2. Wir können nämlich zunächst schreiben

$$\frac{R_0 - R_1}{R_2 - R_0} = \frac{a \, R_1}{b \, R_2}$$

woraus sich ergibt

$$R_0 = \frac{R_1 \, R_2 \, (a + b)}{a \, R_1 + b \, R_2}$$

Einfacher wird die Formel, wenn wir einführen

$$\alpha = \frac{a}{a + b} \qquad \beta = \frac{b}{a + b} \quad \text{also} \quad \alpha + \beta = 1$$

denn dann erhalten wir

$$R_0 = \frac{R_1 \, R_2}{\alpha \, R_1 + \beta \, R_2} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R_0} = \frac{\beta}{R_1} + \frac{\alpha}{R_2}$$

Endlich können wir unsere Grundformel auf die Formen bringen

$$\frac{h_1 + h_2}{h_2} = \frac{a \, R_1 + b \, R_2}{b \, R_2} \qquad \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \frac{a \, R_1}{a \, R_1 + b \, R_2}$$

Wenn wir hier einführen $h_1 + h_2 = H$, dann erhalten wir

$$h_1 = H \frac{a\,R_1}{a\,R_1 + b\,R_2} \qquad h_2 = H \frac{b\,R_2}{a\,R_1 + b\,R_2}$$
$$= H \frac{\alpha\,R_1}{\alpha\,R_1 + \beta\,R_2} \qquad = H \frac{\beta\,R_2}{\alpha\,R_1 + \beta\,R_2}$$

2) Wir wollen nun die Masse m_0 berechnen, welche per Zeit- und Flächeneinheit aus N_1 und N_2 gebildet wird. Wir haben die Bedingung $m_0 = m_1 + m_2$. Nun haben wir oben zwei Ausdrücke für P_1 und P_2 gefunden, welche sich auf die Form bringen lassen

$$m_1 = \frac{\omega_1\ P_1\ R_1}{h_1\ R_0} = \frac{a\ n_1\ R_1}{h_1\ R_0} \qquad m_2 = \frac{\omega_2\ P_2\ R_2}{h_2\ R_0} = \frac{b\ n_2\ R_2}{h_2\ R_0}$$

Die Nenner $h_1\ R_0$ und $h_2\ R_0$ können wir aus früheren Formeln bestimmen an

$$h_1\ R_0 = \frac{\alpha\ H\ R_1^2\ R_2}{(\alpha\ R_1 + \beta\ R_2)^2} \qquad h_2\ R_0 = \frac{\beta\ H\ R_1\ R_2^2}{(\alpha\ R_1 + \beta\ R_2)^2}$$

Wenn wir diese Nenner einsetzen, dann finden wir

$$m_0 = m_1 + m_2$$
$$= \frac{a + b}{H} \frac{(\alpha\ R_1 + \beta\ R_2)^2}{R_1\ R_2} (n_1 + n_2)$$
$$= \frac{(a\ R_1 + b\ R_2)^2}{H\ R_1\ R_2\ (a + b)}$$

Diese Formel nimmt auf folgende Weise eine handlichere Form an. Für eine ebene Platte ist $R_1 = R_2 = \infty$ und m_0 soll dann mit μ_0 bezeichnet werden. Wir finden leicht

$$\mu_0 = \frac{a + b}{H}$$

Nun ist es leicht den Verlust $-\delta$ an Production zu berechnen, den wir herbeiführen, wenn wir eine Ebene Platte krümmen. Dieser Verlust ist nämlich, wie wir leicht finden

$$-\delta = \mu_0 - m_0 = \frac{1}{a + b} \left(\frac{a^2}{R_2} - \frac{b^2}{R_1}\right)$$

Noch durchsichtiger wird die Formel, wenn wir einsetzen

$$R_1 = D - h \qquad R_2 = D + h \qquad D = \frac{R_1 + R_2}{2}$$

Dies eingesetzt finden wir für den Productionsgewinn $+\delta$, der aus der krümmung der Platte resultirt, den Wert

$$\delta = m_0 - \mu_0$$
$$= \frac{1}{a + b} \cdot \frac{h\,(a^2 + b^2) - D\,(a^2 - b^2)}{D^2 - h^2}$$

Die Platte nehmen wir zunächst eben an, d. h. es sei $D = \infty$. Es sei $a > b$, also $a^2 - b^2$ positiv. Wir wissen aus der Formel $h_1 : h_2 = a : b$, welche für ebene Platten gilt, dann bei obiger Bedingung die Wachstumsschicht näher N_2 liegt (d. h. rechts von der Mittelfläche) als in N_1, d. h. dass $h_1 > h_2$ ist. Für $D = \infty$ ist natürlich $\delta = o$.

Nun geben wir dem D einen positiven Wert, d. h. wir krümmen die Platte so, dass die linke Seite, wo N_1 liegt, concav wird, die rechte Seite aber convex. Wenn dieses positive D immer Kleiner, die Krümmung der Platte also immer grösser wird, dann wird δ nothwendig negativ (da D gegen h sehr gross ist) d. h. die Production per Flächeneinheit der Wachstumsschicht wird nothwendig so lange verzögert, bis der Zähler gleiche Null wird, also

$$D = h\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\right)$$

Wenn wir aber diesen Wert von D einsetzen in unsere Grundgleichung für krumme Schalen

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{R_1}{R_2} = \frac{a}{b} \cdot \frac{D-h}{D+h}$$

dann erhalten wir den Wert

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{b}{a}$$

Das heisst aber, dass die Lager der Wachstumsschicht symmetrisch geworden ist zu ihrer Lage in der ebenen Platte. Wenn dann D noch kleiner wird, dann wird δ wieder notwendig positiv.

Hätten wir D negativ genommen, d. h. diejenige Oberfläche concav gemacht, zu welcher die Wachstumsschicht näher lägt, dann wäre δ für alle D positiv ausgefallen, d. h. es resultirt notwendig eine Steigerung der Production per Flächeneinheit der Wachstumsschicht. Wir haben also das Resultat:

Wenn wir diejenige Seite der Platte concav machen, zu welcher die Wachstumsschicht näher liegt, dann wird durch die Krümmung der Platte das Wachstum per Flächeneinheit der Wachstumsschicht unbedingt befördert. Wenn wir aber die entgegensetzte Seite concav machen, dann wird das Wachstum in der

Wachstumsschicht so lange verzögert, bis die Schicht sich nach der concaven Seite somit verschoben hat, dass sie zu ihrer Anfangslage in der ebenen Platte symmetrisch liegt. Bei noch weiter gehender Krümmung wird das Wachstum stärker sein, als bei einer ebenen Platte.

3. Wir haben jetzt untersucht, wie sich durch Krümmung das Wachstum per Einheit der Wachstumsschicht ändert. Wir wollen nun untersuchen, wie es sich durch Krümmung per Einheit der Oberfläche ändert. Per Einheit der Wachstums-Fläche ist der Stoffverbrauch, wie wir gefunden haben

$$m_0 = \frac{(a R_1 + b R_2)^2}{H R_1 R_2 (a + b)}$$

Nun entspricht der Flächeneinheit der Waschstumsschicht vom Radius R_0 die Fläche f in der Oberfläche vom Radius R_2, für welche gilt

$$f = \frac{R_2{}^2}{R_0{}^2}$$

Der Stoffverbrauch per Einheit der Oberfläche ist offenbar $m_0 : f$. Nun ist nach frühere Werten

$$\frac{1}{f} = \frac{R_0{}^2}{R_2{}^2} = \frac{R_1{}^2 R_2{}^2 (a + b)^2}{R_2{}^2 (a R_1 + b R_2)^2}$$

und hieraus ergibt sich für den Stoffverbrauch m per Einheit der Oberfläche der Wert

$$m = \frac{m_0}{\backsim} = \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{a + b}{H} = \frac{R_2}{R_2} \mu_0$$

Der Wachstum per Einheit der Oberfläche wird also verkleinert, wenn die Oberfläche convex gemacht, also $R_1 < R_2$ wird; eine concave Oberfläche hingegen liefert ein stärkeres Wachstum per Einheit der Oberfläche, als eine ebene Oberfläche.