Ebből következik, hogy az osztást 7 tizedesjegyig érdemes elvégezni, mert a hiba csak a nyolcadik tizedesjegyben lép fel, ott kapunk kb. 6-tal nagyobb értéket:

$6:2,45 = 2,448\ 979\ 6...$

Osztó és hányados számtani közepe: $2,449\ 489\ 7(96...)$

c./ Elvileg lényegtelen, hogy az első közelitő értéket milyen pontosan választjuk, de gyakorlatilag többet kell számolni a kivánt pontosság eléréséig. Pl.

$\sqrt{100} \approx 1$ feltételezéssel

$100 : 1 = 100$, ebből első közelités $a_1 = \frac{1+100}{2} \approx 50$

$100 : 50 = 2$, ebből második közelités $a_2 = \frac{50+2}{2} \approx 25$

$100 : 25 = 4$, ebből harmadik közelités $a_3 = \frac{25+4}{2} \approx 15$

$100 : 15 = 7$, ebből negyedik közelités $a_4 = \frac{15+7}{2} = 11$

$100 : 11 = 9,0909$, ebből az ötödik közelités $a_5 = 10,045...$
és innentől kezdve már érdemes az előirt pontossággal számolni a jó eredmény érdekében, hacsak valami más egyszerübb uton-módon rá nem jovunk $\sqrt{100}$ értékére.

Hasonlóképen feltételezhetjük, hogy $\sqrt{100} \approx 100$

$100 : 100 = 1$, ebből első közelités $a_1 = \frac{100+1}{2} \approx 50$

$100 : 50 = 2$, ebből második közelités $a_2 = \frac{50+2}{2} \approx 25$

a folytatás és eredmény az előbbivel azonos.

2. GYÖKSZÁMITÁS EGYENLETTEL.

a./ Számitsuk ki $\sqrt{6}$ értékét. Ez első közelitésben kb. 2,5 és az eltérés a pontos értéktől egynél kisebb, $\varepsilon_1 < 1$. Tehát

$$\sqrt{6} = 2,5 + \varepsilon_1$$

Emeljük mindkét oldalt négyzetre:

$$6 = 6,25 + 5\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2$$

Mivel $\varepsilon_1^2 < 5\varepsilon_1$ a kis számokat a nagyobb mellől elhagyhatjuk és igy

$$6 \approx 6,25 + 5\varepsilon_1$$

ebből $\varepsilon_1 \approx -\frac{0,25}{5} = -0,05$

Ezt az értéket az eredeti kifejezésbe visszahelyettesitve, pontosabb értéket kapunk: $\sqrt{6} \approx 2,5 + \varepsilon_1 \approx 2,5 - 0,05 = 2,45$

Megismételve az eljárást:

$\sqrt{6} = 2,45 + \varepsilon_2$ emeljünk négyzetre:

$6 = 6,0025 + 4,9\,\varepsilon_2 + \varepsilon_2^2$, tehát $6 \approx 6,0025 + 4,9\,\varepsilon_2$, ebből

$\varepsilon_2 \approx -\frac{0,0025}{4,9} = -0,000510$ Visszahelyettesitve:

$\sqrt{6} \approx 2,45 - 0,000510 = 2,449490$, hat tizedesjegyig pontos eredményt kapunk. Ennél az eljárásnál is igaz, hogy a számitás ismétlésével a pontos tizedesjegyek száma megkétszereződik. A számitási hiba itt is $\varepsilon^2/2a$.

Ez az eljárás alkalmazható akkor is, ha az első közelitő értéknek nagy az eltérése a pontos értéktől.

b./ Számitsuk ki ezzel a módszerrel $\sqrt[3]{10}$ értékét:

$\sqrt[3]{10} = 2 + \varepsilon_1$ az egyenlet mindkét oldalát emeljük köbre

$10 = 8 + 12\varepsilon_1 + 6\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^3$

Minthogy általában $\varepsilon_1^3 + 6\varepsilon_1^2$ nagysága elhanyagolható kicsi a többi értékhez képest, elhagyjuk:

$10 \approx 8 + 12\varepsilon_1$ ebből $\varepsilon_1 \approx \frac{2}{12} = \frac{1}{6} = 0{,}16\ldots$

helyettesitve az első egyenletbe

$\sqrt[3]{10} \approx 2 + 0{,}16 = 2{,}16$

Megismételve az eljárást

$\sqrt[3]{10} = 2{,}16 + \varepsilon_2$

$10 = 10{,}077696 + 13{,}9968\varepsilon_2 + \ldots$ és ebből $\varepsilon_2 \approx -\frac{0{,}077696}{13{,}9968} = -0{,}00555$

tehát $\sqrt[3]{10} = 2{,}16 - 0{,}00555 = 2{,}1544\ldots$

c./ Az eredmény hibájának számitása.

$\sqrt[3]{x^3} = a + \varepsilon_1$ ebből $x^3 = a^3 + 3a^2\varepsilon_1 + \cancel{3a\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1^3}$

tehát $\varepsilon_1 \approx \frac{x^3 - a^3}{3a^2}$ és $\sqrt[3]{m} = a + \frac{x^3 - a^3}{3a^2}$

Az uj közelités eltérése a pontos x értéktől

$$\varepsilon = \left|a + \frac{x^3 - a^3}{3a^2} - x\right| = \frac{|3a^2(a-x) - (a-x)(a^2+ax+x^2)|}{3a^2} = \frac{(a-x)^2(2a+x)}{3a^2} \approx$$

$$\approx \frac{\varepsilon_1^2 \cdot 3a}{3a^2} = \frac{\varepsilon_1^2}{a}$$

Általában $\sqrt[n]{m} = a_1 + \varepsilon_1$ számitásánál, ha a_1 az első közelitő érték, akkor a jobb közelitő értéket

$$a_2 = \frac{n-1}{n} \cdot a_1 + \frac{m}{n\,a_1^{n-1}}$$

képlettel kapjuk. Az a_2 hibáját pedig az $\varepsilon_2 = \frac{(n-1)\,\varepsilon_1^2}{2a_1}$ képlet adja, ahol a_1 és ε_1 helyettesitésekor csak egy-két értékes számjegyet használunk.

3. NÉGYZETGYÖKSZÁMITÁS HATVÁNYOZÁSSAL.

a) Tudjuk, ha $-1 < d < 1$, akkor $d^n \to 0$, ha n pozitiv egész szám növekszik. Mivel $\sqrt{6} \approx 2{,}5$ és $|\sqrt{6} - 2{,}5| < 1$, azért ebből következik, hogy

$1 > |\sqrt{6} - 2{,}5| > (\sqrt{6} - 2{,}5)^2 > |\sqrt{6} - 2{,}5|^3 > (\sqrt{6} - 2{,}5)^4 > \ldots \to 0$

Tehát $(\sqrt{6} - 2{,}5)^2 = 6 - 5\sqrt{6} + 6{,}25 = 12{,}25 - 5\sqrt{6} \approx 0$ alapján

$$\sqrt{6} \approx \frac{12{,}25}{5} = 2{,}45$$

Pontosabb eredményt kapunk harmadik hatványozásból:

$(\sqrt{6} - 2{,}5)^3 = 6\sqrt{6} - 3.6.2{,}5 + 3\sqrt{6}.2{,}5^2 - 2{,}5^3 = 24{,}75.\sqrt{6} - 60{,}625 \approx 0$

Ebből $\sqrt{6} \approx \frac{60{,}625}{24{,}75} = \frac{485}{198} = 2{,}44949\ldots$

Számitsuk ki $\sqrt{5}$ -öt gyorsabb közelitéssel:

Mivel $\sqrt{5} - 2 < 1$, azért

$$\sqrt{5} - 2 > (\sqrt{5} - 2)^2 > (\sqrt{5} - 2)^3 > (\sqrt{5} - 2)^4 \to 0.$$

Tehát

$$(\sqrt{5} - 2)^2 = 5 - 4\sqrt{5} + 4 = 9 - 4\sqrt{5} \approx 0 \qquad \text{ebből} \quad \sqrt{5} \approx \frac{9}{4} = 2,25$$

$$(\sqrt{5} - 2)^4 \to (\sqrt{5} - 2,25)^2 = 5 - 4,5\sqrt{5} + 5,0625 = 10,0625 - 4,5\sqrt{5} \approx 0, \text{ ebből}$$

$$\sqrt{5} \approx \frac{10,0625}{4,5} = 2,2361\ldots$$

$$(5 - 2)^8 \to (\sqrt{5} - 2,2361)^2 = 5 - 4,4722\sqrt{5} + 5,00014321 \approx 0, \quad \text{ebből}$$

$$\sqrt{5} \approx \frac{10,00014321}{4,4722} = 2,236\ 067\ 977\ \ldots$$

b./ A hiba becslése. $\sqrt{m} = a + \varepsilon$ -ból

$\sqrt{m} - a = \varepsilon$ hatványozásával $(\sqrt{m} - a)^n = \varepsilon^n$, tehát n-edik hatványra emelve a különbséget, az uj hiba a meglévő hiba n-edik hatványa lesz. Ha pl. egy szám négyzetgyöke 3 tizedesjegyig pontos, akkor negyedik hatványozást végezve, eredményünk legalább 12 tizedesjegyig lesz pontos. $\sqrt{5}$ -re kaptuk: $\sqrt{5} \approx 2,2361$. Ezt az eredményt összehasonlitva a rákövetkező eredménnyel, az elkövetett hiba: $0,000032 < 1/3.10^{-4}$. A rákövetkező eredmény hibája ennek a négyzete: $1/9.10^{-8} \approx 0,0000000011$ körül várható, tehát a kilencedik tizedesjegyben. Ha tovább számolnánk, akkor a következő eredményben a hiba

$$(1/9.10^{-8})^2 = 1/81.10^{-16} < 0,000000000000000002,$$ tehát csak a ~~tizen~~nyolcadik tizedesjegyben várható eltérés a helyes értéktől.

4. NÉGYZETGYÖKSZÁMITÁS KÖZELITŐ TÖRTEKKEL:

a) Alkalmazzuk az előbbi eljárást, de a törteket ne alakitsuk át tizedes törtekké:

$$(\sqrt{5} - 2)^2 = 9 - 4\sqrt{5} \approx 0 \qquad \text{Ebből} \quad \sqrt{5} \approx \frac{9}{4} = 2,25$$

$$(\sqrt{5} - 2)^3 = 17\sqrt{5} - 38 \approx 0 \qquad \text{Ebből} \quad \sqrt{5} \approx \frac{38}{17} = 2,235\ldots$$

$$(\sqrt{5} - 2)^4 = 161 - 72\sqrt{5} \approx 0 \qquad \text{Ebből} \quad \sqrt{5} \approx \frac{161}{72} = 2,2361\ldots$$

$$(\sqrt{5} - 2)^5 = 305\sqrt{5} - 682 \approx 0 \qquad \text{Ebből} \quad \sqrt{5} \approx \frac{682}{305} = 2,236065\ldots$$

Hasonlóképen kapjuk a következő közelitő törteket :

$\sqrt{6}$-ra $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{49}{20}$, $\frac{485}{198}$, $\frac{4801}{1960} = 2,449\ 489\ 7\ldots$

13 -ra $\frac{11}{3}$, $\frac{119}{33}$ ...

A sorozat tagjai egyre jobban megközelitik a megfelelő négyzetgyök értékét. Pl.

$\sqrt{13} \approx \frac{11}{3}$ négyzetreemelve $13 \approx \frac{121}{9} = 13 + \frac{4}{9}$

$\sqrt{13} \approx \frac{119}{33}$ " $\frac{14161}{1089} = 13 + \frac{4}{1089}$

Sok esetben a lehető legjobb közelitést kapjuk, mint pl $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$ stb. közelitő törtjeinél:

$$\sqrt{6} \approx \frac{5}{2} \rightarrow 6 \approx \frac{25}{4} \quad 6$$

$$\sqrt{6} \approx \frac{49}{20} \rightarrow 6 \approx \frac{2401}{400} = 6 + \frac{1}{400}$$

$$\sqrt{6} \approx \frac{485}{198} \rightarrow 6 \approx \frac{235225}{39204} = 6 + \frac{1}{39204}$$

$$\sqrt{6} \approx \frac{4801}{1960} \rightarrow 6 \approx \frac{23049601}{3841600} = 6 + \frac{1}{3841600}$$

A közelitő törtek sorozatának tagjait ki is lehet egymásból számitani: $\sqrt{6}$ esetében: egyik közelitő tört számlálóját megszorozzuk tizzel és az eredményből kivonjuk a megelőző közelitő tört számlálóját. Nevezővel hasonlóképen járunk el:

$$\frac{5}{2}, \frac{49}{20} \rightarrow \frac{10.49 - 5}{10.20 - 2} = \frac{485}{198}$$

b./ A közelitő törtek pontosságának számitása.

$$\sqrt{m} \approx \frac{a}{b} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{mb^2+c}{b^2}} = \sqrt{m + \frac{c}{b^2}} = \sqrt{m}\sqrt{1 + \frac{c}{mb^2}} \approx \sqrt{m}\left(1 + \frac{c}{2mb^2}\right) = \sqrt{m} + \frac{c}{2b^2\sqrt{m}} =$$

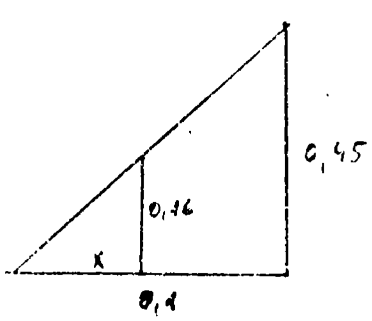
$$= \frac{c}{2b^2 \cdot \frac{a}{b}} + \sqrt{m} = \sqrt{m} + \boxed{\frac{c}{2ab}}$$

Pl. $\sqrt{6} \approx \frac{4801}{1960}$ esetében $\frac{1}{2.4801.1960} < 0{,}0000002$ eltérés adódik.

5. GYÖKSZÁMITÁS LINEÁRIS INTERPOLÁCIÓVAL.

a)Tegyük fel, hogy $\sqrt{5}$ értékét ismerjük egy tizedesjegy pontosságig.

$2{,}2 < 2{,}3$; 5; emeljünk négyzetre: $4{,}84 < 5 < 5{,}29$



$2{,}3 - 2{,}2 = 0{,}1$ értéknövekedés

$5{,}29 - 4{,}84$ négyzetes növekedést hoz létre. De nekünk csak $5{,}00 - 4{,}84 = 0{,}16$ növekedés szükséges. Aránypárral, hasonló háromszögekből számithatjuk a jobb értéket:

$x : 0{,}16 = 0{,}1 : 0{,}45$, ebből $x = 0{,}035$. Tehát az interpolációs érték $2{,}2 + 0{,}035 = 2{,}235$

Megismételve az eljárást 2,235-tel, továbbá 2,234 vagy 2,236-tal, hasonló módon eljárva növelhetjük számitásunk pontosságát. Ha a gyök értékét n tizedesjegy pontosságig ismerjük, interpoláció alkalmazásával a pontos tizedesjegyek számát legalább megkétszerezzük.

Bizonyitás : $\sqrt{m} = \sqrt{x^2}$ értékét két határ között ismerjük. $x - \varepsilon < \sqrt{x^2} < x + \delta$ itt $\varepsilon + \delta = 10^{-n}$ és $\varepsilon, \delta < 10^{-n}$. Négyzetreemelés után

$$x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2 < x^2 < x^2 + 2\delta x + \delta^2$$

A két szomszédos négyzetszám különbsége

$$(x^2 + 2\delta x + \delta^2) - (x^2 - 2\varepsilon x + \varepsilon^2) = 2x(\varepsilon + \delta) + \delta^2 - \varepsilon^2$$

A szükséges növekedés $x^2-(x^2-2\varepsilon x+\varepsilon^2)=2\varepsilon x-\varepsilon^2$.

Felirjuk az egyenes arányosságot:

$$\begin{array}{ll} 2\delta x+2\varepsilon x+\delta^2-\varepsilon^2 & 10^{-n} \\ 2\varepsilon x-\varepsilon^2 & x \end{array} \longrightarrow x=\frac{(2\varepsilon x-\varepsilon^2)\cdot 10^{-n}}{2\delta x+2\varepsilon x+\delta^2-\varepsilon^2}=$$

$$=\frac{(2x-\varepsilon)\varepsilon\cdot 10^{-n}}{2x(\delta+\varepsilon)+(\delta-\varepsilon)(\delta+\varepsilon)}=\frac{(2x-\varepsilon)\varepsilon\cdot 10^{-n}}{2x\cdot 10^{-n}+(\delta-\varepsilon)\cdot 10^{-n}}=\frac{(2x-\varepsilon)\varepsilon}{2x+(\delta-\varepsilon)}$$

Ezt kell hozzáadni a kisebbik közelitő gyökhöz

$$x-\varepsilon+\frac{(2x-\varepsilon)\varepsilon}{2x+\delta-\varepsilon}$$

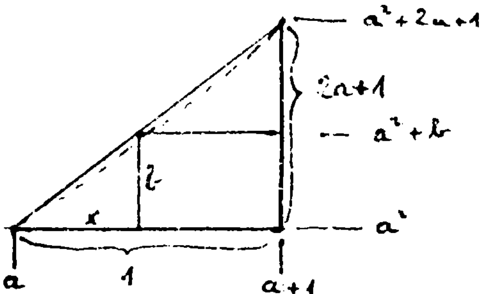
A pontos érték x. Az elkövetett hiba:

$$\left|x-\varepsilon+\frac{(2x-\varepsilon)\varepsilon}{2x+\delta-\varepsilon}-x\right|=\frac{\varepsilon\delta}{2x+\delta-\varepsilon}<\frac{10^{-2n}}{2x}<10^{-2n}$$

Hasonló módon tudunk számitani köbgyököt és egyéb gyököt.

b./ Állitsunk elő fejszámolásra alkalmas képletet; számitsuk ki $\sqrt{m}$-et. $\sqrt{m}$ két négyzetszám között van:

$$a^2<m=a^2+b<(a+1)^2=a^2+2a+1$$



A növekedés-különbségeket összehasonlitva a hasonló háromszögekből aránypárral adódik

$x : b = 1 : (2a+1)$ ebből

$$x=\frac{b}{2a+1}\approx\frac{b}{2a}$$

Körülbelül ennyivel nagyobb a keresett érték a-nál.

Példák:

$\sqrt{10}\approx 3+\frac{1}{6}\approx 3{,}17$ 3,16 helyett

$\sqrt{20}\approx 4+\frac{4}{8}\approx 4{,}50$ 4,47 helyett

$\sqrt{60}\approx 8-\frac{4}{16}\approx 7{,}75$ 7,746 helyett

$\sqrt{82}\approx 9+\frac{1}{18}\approx 9{,}0555$ 9,0554 helyett

c./ Ugyanigy levezethető a köbgyökvonásra való képlet :

$$\sqrt[3]{a^3+b}\approx a+\frac{b}{3a^2}$$

Példák:

$\sqrt[3]{10}=\sqrt[3]{2^3+2}\approx 2+\frac{2}{12}\approx 2{,}16$ (2,15 helyett)

$\sqrt[3]{20}=\sqrt[3]{3^3-7}$ $3-\frac{7}{27}\approx 2{,}74$ (2,71 helyett)

$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{3^3+3}$ $3+\frac{3}{27}\approx 3{,}11$ (3,107 helyett)

$\sqrt[3]{120}=\sqrt[3]{5^3-5}$ $5-\frac{5}{75}\approx 4{,}933$ (4,932 helyett)

Általában $\sqrt[n]{m}$ számításánál a

$$\sqrt[n]{a^n+b} = a + \frac{b}{n \cdot a^{n-1}}$$

képletet használhatjuk. Ennek a képletnek a hibája $\frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{b^2}{n \cdot a^{2n-1}}$ ha b a-hoz képest elég kicsi. Tehát

$\sqrt{a^2+b}$ esetében a hiba $\frac{1}{8} \cdot \frac{b^2}{a^3}$

$\sqrt[3]{a^3+b}$ esetében a hiba $\frac{1}{9} \cdot \frac{b^2}{a^5}$

6. GYÖKSZÁMITÁS ITERÁCIÓS EGYENLETTEL.

Olyan $f(x)$ polinomot kell meghatározni, amelybe $\sqrt{m}$ egy közelitő étékét helyettesitve visszakapjuk $\sqrt{m}$ egy pontosabb értékét.

$$x_2 = f(x_1)$$

Keressük a polinomot

$f(x) = ax^2 + bx + c$ alakban.

A megfelelő polinom első feltétele, hogy ha a pontos $\sqrt{m}$ értéket helyettesitjük, eredményül $\sqrt{m}$ -et kapunk.:

$a.m + b\sqrt{m} + c = \sqrt{m}$ ebből c együtthatóra kapjuk

$c = \sqrt{m} \cdot (1 - b) - am$

Az együttható értékére irracionális szám nem alkalmas, tehát $1 - b = 0$, azaz $b = 1$. A polinom uj alakja

$$f(x) = ax^2 + x - am$$

Második feltétel, hogy $|f'(x)| < 1$ legyen $x = \sqrt{m}$ és a helyettesitési értékek közelében, tehát

$f'(x) = 2ax + 1 \approx 0$, ebből kapjuk az a együtthatót:

$$a \approx -\frac{1}{2x}$$

$x = \sqrt{m}$ helyébe valamely $m \approx \frac{p}{q}$ közelitő értéket helyettesitve

$a = -\frac{q}{2p}$ értéket kapunk, tehát végeredményünk

$x = -\frac{q}{2p} x^2 + x + \frac{mq}{2p}$. Ebből az iterációs

képlet: $x_2 = x_1 + \frac{q}{2p}(m - x_1^2)$

Számitsunk ki egy iterációs képletet $\sqrt{6}$ -ra. $\sqrt{6} \approx \frac{5}{2} = \frac{p}{q}$ és $m = 6$ esetre:

$$x_2 = x_1 + \frac{6 - x_1^2}{5}$$

Legyen az első közelitő érték $\sqrt{6}$ -ra: $x_1 = 2,5$. Helyettesitve

$x_2 = 2,5 + \frac{6 - 6,25}{5} = 2,45$ értéket kapjuk.

Megismételve az eljárást

$x_3 = 2,45 + \frac{6 - 6,0025}{5} = 2,4495$-öt kapunk.

Az ujabb közelités értéke $x_4 = 2,449489$ volna, tehát ugy látszik, minden iterálással a pontos tizedesjegyek száma kettővel növekszik.

Ha az iterációs képlet előállitásához $\frac{p}{q} = \frac{49}{20}$ értéket használjuk, akkor

$$x_2 = x_1 + \frac{60 - 10\,x^2}{49}$$ képletet kapjuk, mely már gyorsabban konvergál, mindenegyes ismétléssel a pontos tizedesjegyek száma 3 - mal növekszik.

Köbgyököt is számithatunk ilyen módon. A képlet kiszámitásához hasonló gondolatmenetet alkalmazva

$$x_2 = x_1 + \frac{m - x_1^3}{3x_0^2}$$ kifejezéshez jutunk, ahol x_0 a $\sqrt[3]{m}$ egy közelitő értéke. Készitsünk $\sqrt[3]{10}$ számitáshoz iterációs képletet.

$x_0 \approx 2$ felhasználásával $x_2 = x_1 + \frac{10 - x_1^3}{12}$

$x_0 \approx \frac{13}{6}$ érték helyettesitésével pedig $x_2 = x_1 + \frac{12(10 - x_1^3)}{169}$

képleteket kapjuk. Szép képlet és szép módszer, de sajnos, nem konvergál olyan erélyesen, mint az előző módszerek. Nézzük meg a hiba csökkenését pl. a $\sqrt{6}$-ra jó iterációs képletnél:

Legyen ε_1 a helyettesités hibája és ε_2 az eredmény hibája, tehát $|x - x_1| = \varepsilon_1$ és $|x - x_2| = \varepsilon_2$

$$|x_2 - x| = \varepsilon_2 = \left| -\varepsilon_1 + \frac{6 - x^2 + 2x\varepsilon_1 - \varepsilon_1^2}{5} \right| \approx$$

$$x_2 \approx x_1 + \frac{6 - x_1^2}{5} \longrightarrow x - \varepsilon_1 + \frac{6 - (x - \varepsilon_1)^2}{5} \qquad |\varepsilon_2| \approx \left| \frac{2x\varepsilon_1}{5} - \varepsilon_1 \right| = \varepsilon_1\left(\frac{2x}{5} - 1\right) = \varepsilon_1\left(\frac{2\sqrt{6}}{5} - 1\right) = 0{,}020\,\varepsilon_1$$

Ebből látjuk, hogy a helyettesités hibája minden egyes ismétlésnél kb. ötvened részére csökken. Egy nagyobb számokat tartalmazó, kényelmetlenebb képletet használva, a hiba 0,0002-szer lesz kisebb minden lépésnél, tehát a pontos tizedes jegyek száma nem kétszereződik, csupán általában három tizedes jeggyel növekszik.

7. GYÖKSZÁMITÁS ITERÁCIÓS KÉPLETTEL.

a) Számitsunk ki egy iterációs képletet $\sqrt{m}$-re. Legyen $\sqrt{m} \approx a$. Alkalmazzuk az osztási eljárást

$$m : a = \frac{m}{a}$$ Az osztó és hányados számtani közepe közelitő képletet ad, amelynek ismételt alkalmazásával mindig pontosabb értéket kapunk:

$$\sqrt{m} = \left(a + \frac{m}{a}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

Alkalmazzuk a képletet $\sqrt{5}$ számitására ; $\sqrt{5} \approx a = 2{,}25$

$$\sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(2{,}25 + \frac{5}{2{,}25}\right) = 2{,}236\ldots$$

$$\sqrt{5} = \frac{1}{2}\left(2{,}236 + \frac{5}{2{,}236}\right) = 2{,}2360679\ldots$$

Itt már igaznak látszik, hogy a pontos tizedes jegyek száma minden egyes ismétlésnél legalább megkétszereződik.

A számitás hibájának megállapitása: Legyen a helyettesitési érték hibája ε_1. $a = x + \varepsilon$ és a számitás hibája ε_2. Tehát

$$\ldots\left(x+\varepsilon_1+\frac{m}{x+\varepsilon_1}\right) \rightarrow \varepsilon_2=\frac{x^2+2\varepsilon_1 x+\varepsilon_1^2+m-2x^2-2x\varepsilon_1}{2(x+\varepsilon_1)}=$$

$$=\frac{\varepsilon_1^2}{2(x+\varepsilon_1)}<\varepsilon_1^2$$

Ebből láthatjuk, hogy ha $\varepsilon_1<1$, és minél kisebb a helyettesités hibája, annál pontosabb lesz az eredmény, a tizedesjegyek számát meg tudjuk kétszerezni.

c) Tetszőleges gyökkitevőre lehet iterációs képletet előállitani. Számitsunk ki egy képletet $\sqrt[3]{m}$-re.

$\sqrt[3]{m}=a+\varepsilon$ emeljük mindkét oldalt harmadik hatványra:

$$m=a^3+3a^2\varepsilon+3a\varepsilon^2+\varepsilon^3$$

Mivel ε abszolut értékben egynél kisebb, azért ε magasabb hatványait elhagyjuk. A pontosság rovására a számitás leegyszerüsödik és közelitő értéket kapunk

$$m\approx a^3+3.a^2\varepsilon \qquad \text{ebből} \qquad \varepsilon=\frac{m-a^3}{3a^2}$$

visszahelyettesitve az első képletbe

$$\sqrt[3]{m}\approx\frac{1}{3}\left(2a+\frac{m}{a^2}\right)$$

Számitsuk ki pl $\sqrt[3]{10}$ értékét:

$$\sqrt[3]{10}=\frac{1}{3}\left(2a+\frac{10}{a^2}\right) \quad \text{iterációs képlettel}$$

$a=2$ helyettesitéssel $\sqrt[3]{10}\approx 2{,}16$

$a=2{,}16$ helyettesitéssel $\sqrt[3]{10}\approx 2{,}1544(49)$..

Az utolsó helyettesitési érték hibája $2{,}16-2{,}1544=0{,}0056$. Ennek a négyzete $=0{,}00003$... Eredményünk hibája pedig $2{,}154449-2{,}154435=0{,}000014$, tehát kisebb, mint a helyettesitési érték hibájának négyzete.

Hasonló módon előállithatunk $\sqrt[5]{m}$-re iterációs képletet:

$$\sqrt[5]{m}\approx\frac{1}{5}\cdot\left(4a+\frac{m}{a^4}\right)$$

Számitsuk ki ezzel $\sqrt[5]{35}$ értékét: $\sqrt[5]{35}\approx\frac{1}{5}\left(8+\frac{35}{16}\right)=2{,}037$ (2,036 helyett)

Általában bebizonyitható, hogyha az eredeti hiba ε, akkor az eredmény hibája kisebb, mint ε^2.

8. GYÖKSZÁMITÁS SORBAFEJTÉSSEL.

$\sqrt{1+x}$ értékét a szokásos gyökvonással is kiszámithatjuk:

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+-\ldots$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-1}\\
x \;:\left(2+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{x}{2}\\
\underline{-x-\frac{x^2}{4}}\\
-\frac{x^2}{4} \;:\left(2+x-\frac{x^2}{8}\right)\cdot\left(-\frac{x^2}{8}\right)\\
-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{64}\\
\underline{+\;\;+\;\;\;\;\;\;-}\\
\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{64}
\end{array}$$

Az iterációs módszer, vagy az osztási eljárás ismételt alkalmazásával szintén erre az eredményre jutnánk, figyelembe véve, hogy minden egyes ismétléssel a helyes tagok száma megkétszereződik.

Ez a függvénysor konvergens, ha $|x|<1$, és annál gyorsabban konvergál, minél kisebb x abszolut értékben.

Számitsuk ki pl. $\sqrt{6}$ értékét,

$\sqrt{1+5}$ természetesen nem vezet eredményre, előbb át kell alakitani $\sqrt{6}$-ot valamely közelitő törtje segitségével:

$$\sqrt{6} = \sqrt{\frac{24}{4}} = \sqrt{\frac{25-1}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{25}\right)} = \frac{5}{2}\sqrt{1-\frac{1}{25}}$$

Kiszámitjuk tehát $\sqrt{1-\frac{1}{25}}$ -öt, ahol $x=-\frac{1}{25}$ megfelel a konvergencia feltételének. Vegyük a függvénysor első öt tagját:

$$\sqrt{1-\frac{1}{25}} = 1 - \frac{1}{2.25} - \frac{1}{8.25^2} - \frac{1}{16.25^3} - \frac{5}{128.25^4} - \dots$$

$1/25$	$=$ 0,040 000 000		$1/2.25$	$=$	0,020 000 000
$1/25^2$	$=$ 0,001 600 000	ezekből	$1/8.25^2$	$=$	0,000 200 000
$1/25^3$	$=$ 0,000 064 000		$1/16.25^3$	$=$	0,000 004 000
$1/25^4$	$=$ 0,000 002 560		$5/128.25^4$	$=$	0,000 000 100
					0,020 204 100

$1 - 0,020\,204\,100 = 0,979\,795\,900$ és végül

$\frac{5}{2}\cdot 0,979\,795\,900 = \underline{2,\ 449\ 489\ 75}$, ahol az utolsó egy-két számjegy a konvergencia gyorsaságától és az összeadandó tagok számától függően nem megbizható.

Ha a függvénysor helyettesitésénél $\sqrt{6}$ egy jobb közelitő törtjét, 49/20 -at alkalmaznánk, és a sor első öt tagját használnánk, akkor a mellékszámitásban már 18 tizedesjegyet volna érdemes használni.

A számitás maximális hibáját gyakorlatilag jól megbecsülhetjük a következőképen: Ha $x<0,1$, a mellékszámitásban annyi tizedesjegyig számolunk, hogy a függvénysor elhagyott első tagja már nem jelenik meg az összeadandók közt. Az összeadandók utolsó számjegyeit kerekitjük, igy az utolsó számjegyhez viszonyitva a hiba kisebb, mint 0,5. Ezt szorozzuk az összeadás tagjainak számával, továbbá $\sqrt{m}$ közelitő értékével és igy megkapjuk a maximálisan lehetséges hibát a felhasznált számjegyekben. Előző számitásunkban a maximális hiba tehát $5.0,5.2,4 = 6$ volna az utolsó számjegyben, de ha figyelembe vesszük, hogy csak az utolsó tagnak van hibája, azért $1.0,5.2,4 = 1,2$ eltérés lehetséges.

Tetszőleges gyökkitevőre előállithatunk függvénysort, ha az

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \binom{n}{4}x^4 + \dots$$

binomiális képletben a binomiális együtthatókat formálisan kiszámitjuk.

Pl. $n=\frac{1}{3}$ esetén $\binom{n}{4} = \dfrac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-2\right)\cdot\left(\frac{1}{3}-3\right)}{1.2.3.4} = \dfrac{-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{3}}{24} = -\dfrac{10}{243}$

9. EGY SZÁM NÉGYZETGYÖKÉNEK SZERKESZTÉSE.

a./ Pythagoras tétele alapján derékszögü háromszögekkel szerkeszthetjük $\sqrt{m}$ értékét, ha találunk olyan számokat, melyekre

$$a^2 + b^2 = m^2$$

vagy

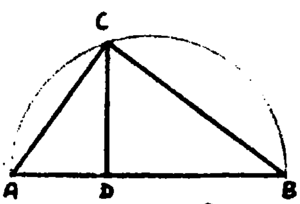
$$a^2 + b^2 + c^2 = m^2$$

Viszont mindig lehet találni négy olyan számot, melyekre

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = m^2$$

Gyakorlatilag csak kisebb egész számoknál használhatjuk. (1. ábra.)

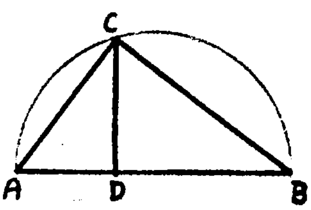
b./ Ismeretes, hogy a derékszögü háromszögnek csucsából az átfogóra bocsátott merőleges az átfogót két olyan részre osztja, melyeknek szorzata egyenlő a magasság négyzetével. $\sqrt{m}$ szerkesztéséhez tehát m-et két szám szorzatára bontjuk $m = a.b$, rajzolunk egy $a+b$ hosszuságu szakaszt, az a és b szakasz közös pontjában egy merőlegest szerkesztünk. Az $a+b$ szakaszra megszerkesztjük a Thales kört és a körnek a merőleges szakasszal való metszéspontja meghatározza $\sqrt{m}$ értékét.



$\overline{AD}.\overline{DB} = \overline{CD}^2$

Az a és b számokat ugy kell választani, hogy arányuk közel egy legyen a pontosabb leolvasás érdekében. (2. ábra.)

c./ Ha $m = a.b$ felbontásában az a és b számok aránya 2 körül van, akkor alkalmazhatunk a derékszögü háromszögre vonatkozó másik tételt a szerkesztéshez:

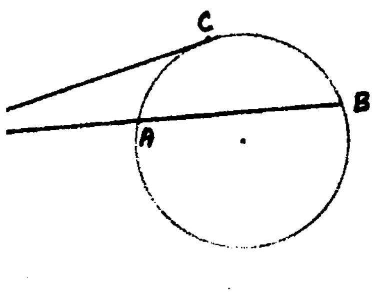


$$\overline{AD}.\overline{AB} = \overline{AC}^2$$

Itt $\overline{AB}$ jelentheti az a számot, $\overline{AD}$ a b számot. $\overline{AB}$ szakasz fölé, mint átmérő fölé megszerkesztjük a Thales kört, D-ben merőlegest emelünk és eredményünk az $\overline{AC} = \sqrt{m}$ értéke. (3. ábra.)

d./ A kör szelőjére és érintőjére igaz a következő tétel:

$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}^2$$



$\sqrt{m}$ szerkesztéséhez legjobb a következőképen eljárni: m-et felbontjuk két szám szorzatára, melyeknek aránya 3 körüli érték. Ekkor kapunk ugyanis két hasonló nagyságu kört, és kedvező rajzot a pontosabb leolvasás érdekében. A szelő menjen át a kör középpontján, igy a kör átmérője az a és b szakasz különbsége lesz. Az érintési pont szerkesztéséhez most is a Thales kört használjuk.

(4. ábra.)

A szerkesztéseknél jó rajzeszközöket, vékony vonalakat, megfelelő nagyságu és pontos ábrát feltételezve, 1 %-os hibahatár is elérhető. Törekedni kell arra, hogy a vonalak ne nagyon kis szögekben messék egymást és minél kevesebb lépésben jussunk eredményhez.

10. GYÖK ÉRTÉKÉNEK LEOLVASÁSA GRAFIKONRÓL.

a./ $y=\sqrt{x}$ grafikonját mm papirra megrajzoljuk. A koordinátatengelyek egységeit és intervallumait ugy választjuk, hogy a pontos leolvasás érdekében ne kapjunk nagyon meredek görbét. Négyzetgyökérték leolvasásához célszerü kétféle skálabeosztást alkalmazni, melyeknek görbéje egyenes.

Hasonló módon készithetünk köbgyökvonásra, vagy bármely gyök vonására alkalmas grafikont.

(5. ábra.)

b./Készithetünk grafikont egyenesszakaszra is. Négyzetgyökvonásnál az egyenesszakasz felső részének beosztása négyzetes, az alsó részének beosztása lineáris. A megfelelő értékek egy pontban vannak, igy a leolvasásnál egy hibaforrás megszünik.

Ez az eljárás is alkalmas bármilyen gyök értékének leolvasására.

(6. ábra.)

c./ Ha logaritmikus beosztású papirost használunk, akkor a koordináta tengelyek beosztása is logaritmikus, bármilyen gyök számitási görbéje egyenes lesz, ami könnyen és pontosan rajzolható. A leolvasás pontossága mindenütt azonos lesz. Egy koordináta-rendszerbe több grafikont rajzolhatunk.

Készitsünk grafikont $\sqrt{m}$, $\sqrt[3]{m}$ és $\sqrt[5]{m^3}$ leolvasásához:

$y=\sqrt{x} \longrightarrow \log y=\frac{1}{2}\log x \longrightarrow \eta=\frac{1}{2}\xi$ az egyenes iránytangense $\frac{1}{2}$

$y=\sqrt[3]{x} \longrightarrow \log y=\frac{1}{3}\log x \longrightarrow \eta=\frac{1}{3}\xi$ " " " $\frac{1}{3}$

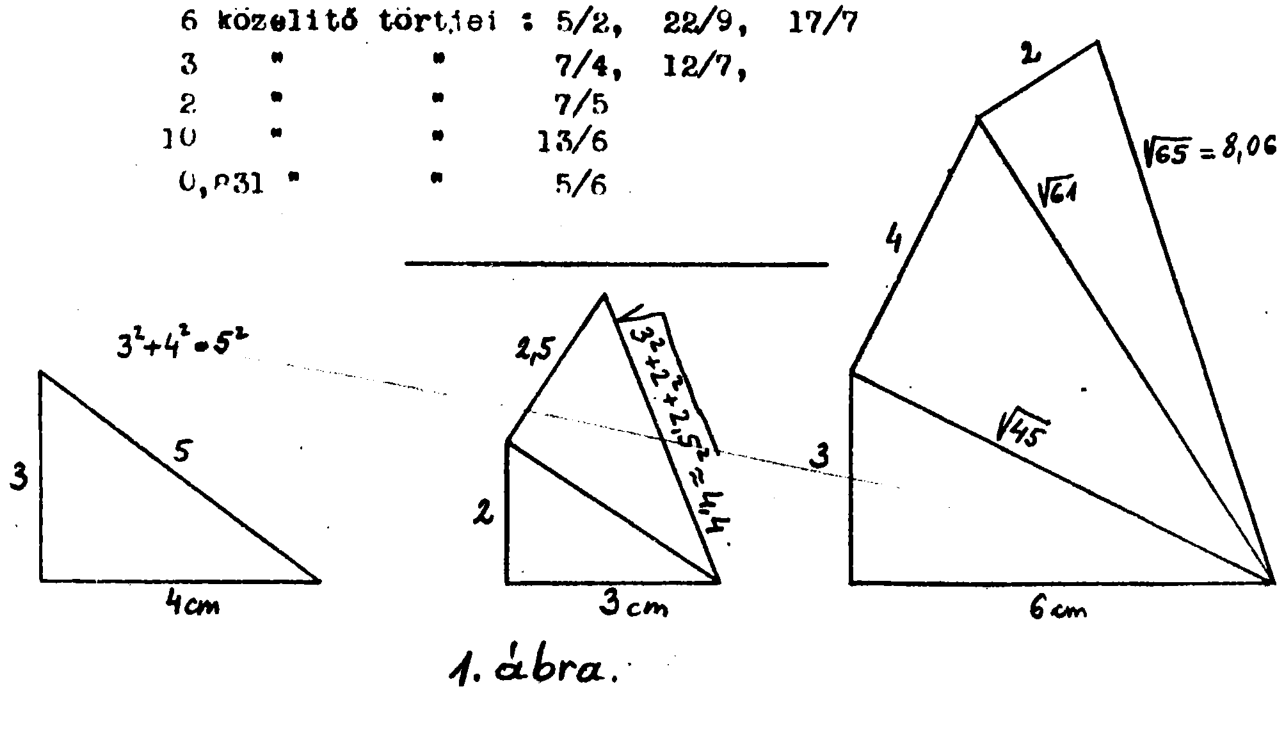
$y=\sqrt[5]{x^3} \longrightarrow \log y=\frac{3}{5}\log x \longrightarrow \eta=\frac{3}{5}\xi$ " " " $\frac{3}{5}$.

(7. ábra.)

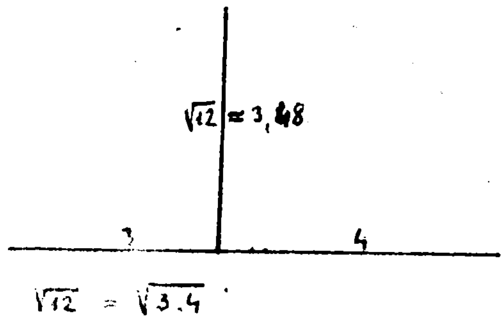
d./ Közelitő törtek keresése rácspontok segitségével. Bármilyen irracionális számhoz, vagy sok számjegyü törthöz kereshetünk közelitő törteket, ha négyzethálós papirt használunk. A koordinátarendszer origójából egy egyenest rajzolunk, melynek iránytangense az irracionális szám és megfigyeljük, hogy az egyenes mely rácspontokhoz közelit. A megfelelő közelségü rácspont vektorának iránytangense lesz egy közelitő tört.

A 8. ábrából látható, hogy

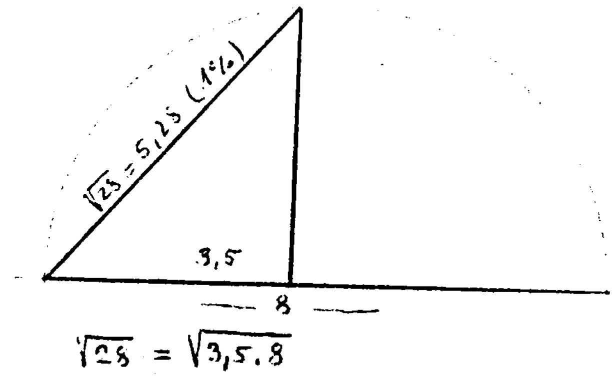
$\sqrt{6}$	közelitő törtjei	:	5/2,	22/9,	17/7
$\sqrt{3}$	"	"	7/4,	12/7,	
$\sqrt{2}$	"	"	7/5		
$\sqrt{10}$	"	"	13/6		
0,831	"	"	5/6		



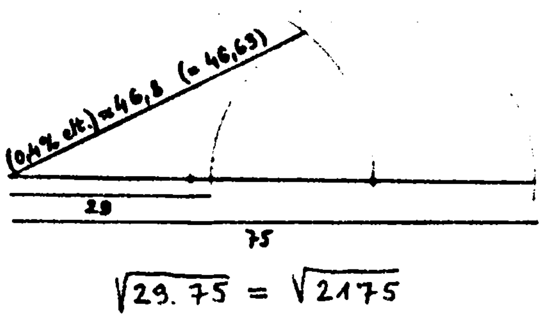
1. ábra.



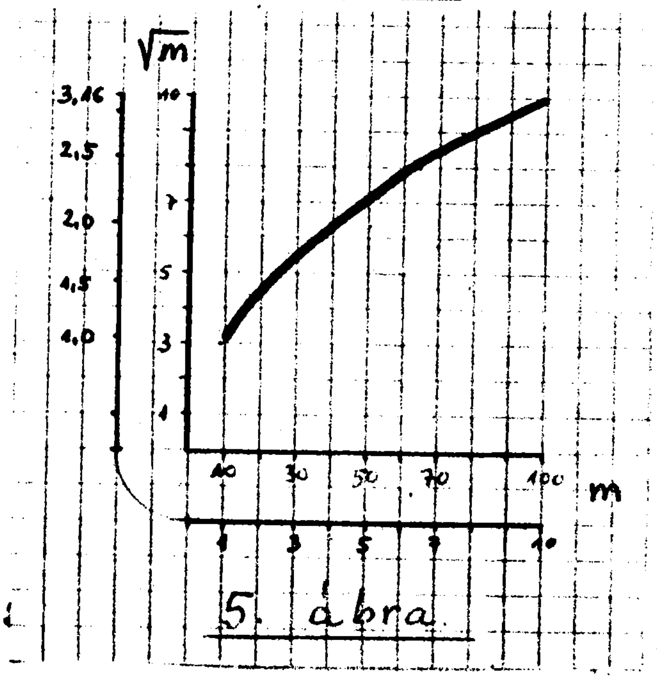
2. ábra



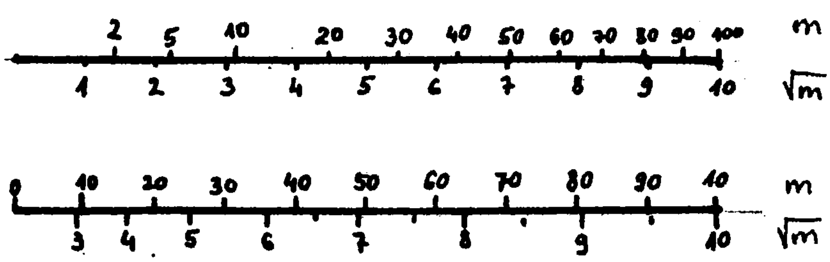
3. ábra



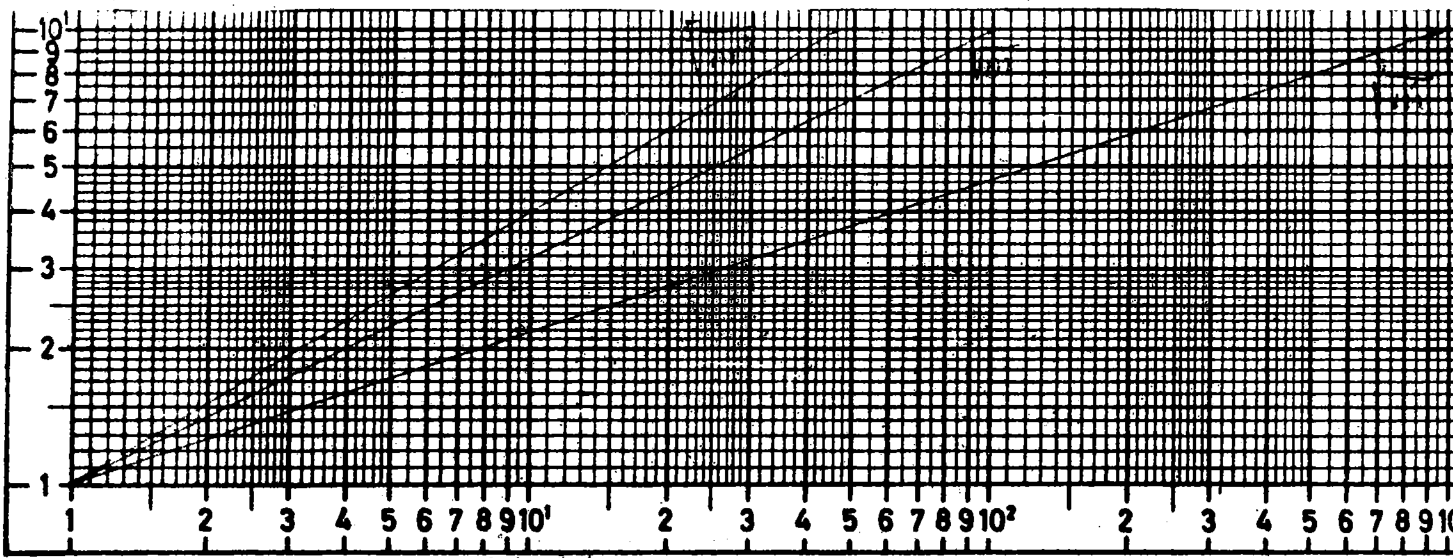
4. ábra



5. ábra

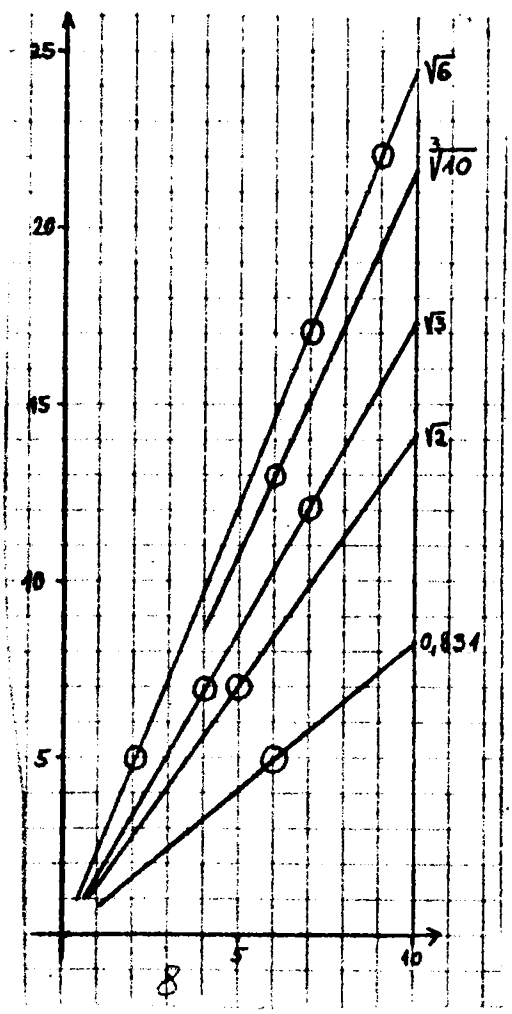


6. ábra



7. ábra

Mindkét tengely logaritmikus osztású



8. ábra.