Szaktárgyak

Mészáros Jenő: Egyenletek megoldása iterációval

A közlemény elsősorban gyakorlati célokat szolgál, elméleti kiegészítések a témára vonatkozó szakkönyvekben megtalálhatók.

A. Fogalomalkotás

Ha az $f(x) = 0$ egyenlet egyik gyökét tetszőleges pontossággal ki akarjuk számítani, akkor először ismernünk kell a gyök körülbelüli értékét. Ezt megtudhatjuk egy-két helyettesítéssel az előjelváltás alapján, vagy pedig grafikont készítünk és arról leolvassuk.
Utána az $f(x) = 0$ egyenletet átalakítjuk vele equivalens $x = g(x)$ iterációs egyenletté, és az első x_1 közelítő gyököt $g(x)$-ba helyettesítve, pontosabb x_2 gyököt kapunk.

Oldjuk meg pl. az

$$f(x) = x^3 - 4x^2 - x + 7 = 0$$

harmadfokú egyenletet.

X	-2	-1	0	1	2	3	4
Y	-15	+3	7	+3	-3	-5	+3

A helyettesítésekből látjuk, hogy ahol a függvénynek előjelváltozása van, abban az intervallumban gyöke is van.

$$X_I \approx -1$$

$$X_{II} \approx 1{,}5$$

$$X_{III} \approx 4$$

Tegyük pontosabbá az $x = 4$ gyököt.

Az egyenlethez tartozó interációs egyenlet:

$$x = \frac{6x + 4}{9} + \frac{38x - 59}{9(3x^2-8x-1)}$$

Helyettesítsük a jobboldalba x_1 = 4-et; a műveletek elvégzése után x_2 = 3,8 pontosabb gyököt kapunk. Most az x_2 = 3,8-at helyettesítsük a jobboldalba. Kapjuk:

$$x_3 = 3{,}774\text{-et.}$$

Folytatva az eljárást

$$x_4 = 3{,}773387. . .$$

eredményeket kapjuk.

Másik két gyököt hasonlóképen lehet közelíteni.

B. Iterációs egyenlet előállítása

Az iterációs egyenlet előállításának egyik módszerét nézzük meg az általános harmadfokú egyenletre. Akárhányadfokú egyenletre hasonlóképen számítunk:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

Legyen az egyik pontos gyök x_o. Az első közelítő gyök: $x_1 = x_o - \varepsilon$, ebből $x_o = x_1 + \varepsilon$

Helyettesítsünk az egyenletbe:

$$a(x_1+\varepsilon)^3 + b\,(x_2+\varepsilon)^2 + c(x_1+\varepsilon) + d = 0$$

Rendezve ε -ra:

$$ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d + \varepsilon\,(3\,ax_1^2 + 2\,bx_1 + c) +$$
$$+ \varepsilon^2\,(. . .) + \varepsilon^3 . a = 0$$

Az ε^2 és ε^3 tagokat a többi taghoz viszonyított kis értéke miatt elhagyjuk, aminek következtében közelítő egyenletet kapunk. Ebből:

$$\varepsilon = -\frac{ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d}{3\,ax_1^2 + 2\,bx_1 + c}$$

Figyelembevéve a fenti

$$x_0 = x_1 + \varepsilon \quad \text{-t,}$$

kapjuk az interációs képletet:

$$x_0 \approx x_2 = x_1 - \frac{ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d}{3\,ax_1^2 + 2\,bx_1 + c}$$

Ebből a képletből számíthatjuk a fentebbi példánkban használt kifejezést. Megjegyezzük, hogy bármely számot is választottuk volna kezdő közelítő értéknek, a képlet természetéből következik, hogy mindig konvergens sorozatot kaptunk volna a három gyök közül az egyikhez. Pl. $x_1 = 100$

$x_1 = 100$	$x_2 = 67$	$x_3 = 45$
$x_4 = 30$	$x_5 = 21$	$x_6 = 15$
$x_7 = 10$	$x_8 = 7$	$x_9 = 5$

$x_{10} = 4{,}2$ stb.

C Iterációs egyenletek előállítása Taylor sorral

Fejtsük sorba az $f(x) = 0$ egyenletet az x_1 hely környezetében:

$$f(x) = f(x_1) + \frac{f'(x_1)}{1!}(x - x_1) + \ldots = 0$$

Mivel $x - x_1 = \varepsilon$, azért

$$\varepsilon \approx -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{és}$$

$$x = x_1 + \varepsilon \qquad \text{miatt}$$

$$x \approx x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

iterációs képletet kapjuk. Mint egyenlet:

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

valóban equivalens az $f(x) = 0$ egyenlettel, amit rendezéssel megkapunk, feltéve, hogy az egyenlet többszörös gyököket nem tartalmaz.

D. <u>Nem algebrai egyenletek megoldása</u>

a/ Oldjuk meg a $\cos x = x^2$ egyenletet. Hozzávetőleges grafikonból is láthatjuk, hogy az egyik gyök egynél kisebb. Legyen ezért

$x_1 = 1.$

$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ alapján az iterációs egyenlet:

$$x = x - \frac{x^2 - \cos x}{2x + \sin x} \qquad (f(x) = x^2 - \cos x = 0 \text{ alapján})$$

Ezért $$x_2 = 1 - \frac{1 - \cos 57{,}3^\circ}{2 + \sin 57{,}3^\circ} = 0{,}84\ \ldots$$

Ismételjük a helyettesítést $x_2 = 0{,}84 = 48^\circ$-kal:

$$x_3 = 0{,}84\sqrt{\frac{0{,}71 - 0{,}67}{1{,}68 + 0{,}74}} = 0{,}8235 = 47^\circ 11'$$

$$x_4 = 0{,}8235 - \frac{-0{,}0015}{2{,}3803} = \underline{0{,}8241 = 47^\circ 13'}$$

b/ Oldjuk meg $2^x = x + 3$ egyenletet. Itt $x_1 = 2$ megfelel az egyik gyöknek.

$$f(x) = 2^x - x - 3 = 0 \quad \text{és a képlet alapján:}$$

$$x = x - \frac{2^x - x - 3}{2^x \ln 2 - 1}.$$

Tehát

$$x_2 = 2 - \frac{4 - 2 - 3}{4 \cdot 0{,}69 - 1} = 2{,}57$$

$$x_3 = 2{,}57 - \frac{5{,}94 - 5{,}57}{4{,}10 - 1} = 2{,}45$$

$$x_4 = 2{,}45 \quad \frac{5{,}463 - 5{,}45}{2{,}76} = 2{,}4453$$

$$x_5 = 2{,}4453 - \frac{5{,}4457 - 5{,}4453}{2{,}78} = \underline{2{,}4452.}$$

Ha $x_1 = 3$-mal kezdtünk volna, ugyanehhez az értékhez jutottunk volna.
Ennek az egyenletnek másik gyöke -3 körül van, a pontosabb gyököt szintén a fenti képlettel kaphatjuk meg.

E. Az iteráció pontossága

Fejtsük sorba az $f(x) = 0$ egyenletet az x_1 közelítőérték közelében:

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)\,(x-x_1) + \frac{f''(\xi)}{2}\,(x-x_1)^2 = 0$$

Rendezzük az aláhúzott x-re:

$$x = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} - \frac{f''(\xi)}{f'(x_1)} \cdot \frac{(x - x_1)^2}{2}$$

Itt ξ értéke x és x_1 között van és ha $x - x_1$ már elég kicsi, helyettesíthetjük x_1-gyel. $x - x_1 = \varepsilon$ és azért az elkövetett hibát mindig nyomon követhetjük. A hiba:

$$- \frac{f''(x_n)}{f'(x_n)} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2}$$

amit az eredményhez hozzá kellene adni.
Ahol viszont a hozzáadás megváltoztatja a tizedesjegyet, ott az eredmény pontosságának határa.

Az $\frac{f''}{f'}$ értékét elég logarléc pontossággal számolni, sőt ez az érték előbb utóbb állandónak vehető.

Pl. az A pontban szereplő harmadfokú egyenletnél

$$x_3 - x_4 = \quad = 0{,}00061\ldots$$

$$\frac{f''}{f'} = \frac{6x - 8}{3x^2 - 8x - 1} \qquad \text{és} \qquad \text{igy a hiba}$$

$$- \frac{f''(3{,}77)}{f'(3{,}77)} \cdot \frac{0{,}00061^2}{2} = - 1{,}27 \cdot 0{,}00000018$$
$$= - 0{,}00000023,$$

tehát az x_4 hetedik tizedesjegyét kellene 2-vel csökkenteni.

F. Gyakorlati megfontolások

Az $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

iterációs képlet a lehető legjobb, ha figyelembevesszük az

$x = g(x)$ -re vonatkozó kikötést:

$$/g'(x)/ < 1,$$

aminek teljesülni kell a gyök környezetében. Ugyanis

$$g'(x) = \left(x - \frac{f}{f'}\right)' = 1 - \frac{f'^2 - f f''}{f'^2} =$$

$$= \frac{f f''}{f'^2} = 0, \text{ mivel } \quad f(x) = 0, \text{ ha } \quad x = \text{gyök}.$$

A hiba képlete alapján pedig mondhatjuk, hogy minden iterálás után a pontos tizedesjegyek száma mértani sorozat szerint növekszik.

Ha viszont véletlenül nem rendelkezünk zseb-elektronikus számológéppel, akkor a gyakorlati végrehajtásnál a sokszor bonyolult képletekbe helyettesítéssel sok idő elmegy.

Keressünk ezért az egyenletek megoldásához egyszerűbb képleteket.

Ha az $\quad x = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} \quad$ egyenletet kicseréljük az

$$x = x - \frac{f(x)}{h(x)} \quad \text{egyenletre,}$$

akkor rendezés után szintén $f(x) = 0$ egyenlet megoldásáról lesz szó. Csak arra kell vigyázni, hogy $/f'(x_n) - h(x_n)/ \approx 0$ legyen.

a/ Foglalkozzunk újra az

$$x^3 - 4x^2 - x + 7 = 0 \quad \text{egyenlettel.}$$

Az iterációs egyenlet:

$$x = x - \frac{x^3 - 4x^2 - x + 7}{3x^2 - 8x - 1}$$

Ha $x_n = 3{,}77$, akkor

$$3x_o^2 - 8x_o - 1 = 11{,}48$$

és írjunk $f'(x)$ helyett $h(x) = x^2 - 2{,}73$-at, mert

$$h\,(2{,}73) = 11{,}48\ .\quad \text{Tehát:}$$

$$x\ 1\quad x - \frac{x^3 - 4x^2 - x + 7}{x^2 - 2{,}73} = 4 - \frac{1{,}73\ x - 3{,}92}{x^2 - 2{,}73}$$

egyszerűbb kifejezést kapjuk.

Ha ezzel számolunk $x_1 = 4$ után $x_2 = 3{,}77$, $x_3 = 3{,}7734$-et kapunk.

b/ Keressünk képletet a

$$3^x \sin 5x + 2x^2 \cos 3x - 1 = 0$$

egyenlet megoldására.

Az interációs egyenlet:

$$x = x - \frac{3^x \, . \sin 5x + 2x^2 \cos 3x - 1}{3^x\,(5 \cos 5x + \ln 3\ .\ \sin 5x) + 4x \cos 3x - 6x^2 \sin 3x}$$

Némi nehézségbe ütközne első rápillantásra a gyököt megmondani. De ha a számlálóban lévő $f(x)$-et ábrázoljuk, a rajzról leolvashatjuk, hogy $x \approx 3$. Helyettesítsük ezt a nevezőben lévő $f'(x)$-be. A műveletek elvégzése után kapjuk: $f'(3) = -106{,}5$.

$f'(x)$-et cseréljük ki $h(x)$-re úgy, hogy $h(3) = -106{,}5$. Legegyszerűbben most úgy járhatunk el, ha az egész nevező helyett

–106,5-öt írunk. Igy kapjuk a sokkal egyszerűbb kifejezést:

$$x = x + \frac{3^x \sin 5x + 2x^2 \cos 3x - 1}{106{,}5}$$

Ha $x_1 = 3$, akkor $x_2 = 3{,}0014\ldots$

Ha egy másik gyököt keresnénk, akkor természetesen $h(x_o) = -106{,}5$ értéket a másik gyöknek megfelelő helyettesítési értékkel cserélnénk ki.

c/ Ha az egyszerűsített képletek által kapott sorozatok konvergenciáját vizsgáljuk, akkor a következőket tapasztaljuk:

Ha az x_1 közelítőérték hibája ε_1, mekkora lesz a helyettesítés után kapott x_2 hibája és hogyan teljesül $/g'(x)/ < 1$ feltétel?

Egy helyettesítésnél az új hiba:

$$\varepsilon_2 = g(x + \varepsilon_1) - g(x) \approx g'(x) \cdot \varepsilon_1$$

De mivel $g(x) = x - \frac{f}{h}$ és

$$g'(x) = \frac{h^2 - f'h - fh'}{h^2}$$

továbbá $f'(x_n) = h(x_n) + \eta$, ezért

$$/\varepsilon_2/ = /\frac{h^2 - h^2 - h - 0}{h^2} \cdot \varepsilon_1/ = /\frac{\eta}{h} \cdot \varepsilon_1/ = /g'(x) \cdot \varepsilon_1/$$

Ebből látható, hogy annál jobb a képlet, minél kisebb az eltérés f' és h között (η), minél nagyobb $f' \approx h$ helyettesítési értéke. Igy $/g'(x)/ = /\frac{\eta}{h}/ < 1$ feltétel általában könnyen teljesíthető.

Az ilyen képleteknél viszont, amint látható, a pontos tizedesjegyek száma számtani sorozat szerint növekszik.