Gyermeknevelés
2. évf. 2. szám 8–17. (2014)

A méhek csodálatos élete az alsó tagozaton – (nem csak) matematikaórákra

Ambrus Gabriella – Anke Wagner – Jürgen Tautz
ELTE Budapest – PH Ludwigsburg – Universität Würzburg

A különböző tárgyak tanításában a tárgyközi kapcsolatok feltárása és megfelelő beépítése fontos oktatási feladat. Ennek megvalósításához nagy segítséget jelentenek a körülöttünk levő világ megfigyeléséből adódó adatok, tapasztalatok. Az adott korosztály számára megfelelő vizsgálódást és alkalmazást meghatározzák egyrészt a gyerekek élményvilágába illeszthető témák és az oktatási dokumentumokban meghatározott általános és tantárgyi fejlesztési célok, műveltségi tartalmak. Emellett természetesen figyelembe kell venni a rendelkezésre álló lehetőségeket is.

A kisiskolás korosztály esetében természetesen adódik a közvetlen környezet megfigyelése és a tapasztalatok felhasználása, így gyakran kerül sor a vásárlással, iskolai élettel, könnyen elvégezhető kísérletekkel kapcsolatos tapasztalatok feldolgozására. A gyerekek élményvilágában a növények és állatok élete fontos szerepet kap, de ezzel kapcsolatban a megfigyeléseknek erősen határt szabnak a lehetőségek.

A kisgyerekek általában csodálattal tekintenek a nagyon kicsi, illetve az igen nagy állatokra, sokan szívesen is foglalkoznak velük, ám gyakran inkább csak „elméletben", könyvek filmek segítségével. Például a méhek élete igen izgalmasnak ígérkezik, de megfigyelésükre – különösen a kaptárok zárt világa miatt nemigen van mód. A tanulmányban bemutatunk egy lehetőséget arra, hogy internet segítségével hogyan végezhetnek akár már kisiskolás gyerekek is a méhek életével kapcsolatos megfigyeléseket. Vizsgáljuk, hogy ilyen megfigyelések hogyan hasznosíthatók a német és magyar oktatásban, elsősorban a matematika tanításában és a vizsgálódások hogyan egészíthetők ki egyéb, a témához tartozó feladatokkal.

***Kulcsszavak**: méhek, megfigyelés, matematikafeladatok, természettudományok, geometria*

Elméleti háttér

A természeti ismeretek, a környezeti tapasztalatok oktatásba történő beépítése segít csökkenteni a távolságot az iskola valósága és az iskolán kívüli világ között. Ez fontos, hiszen az iskolai szituációban megtanult ismeretek gyakorlati alkalmazhatóságát erősen megnehezíti, hogy a tanultak osztálytermi körülményekhez kötöttek. *Renkl* (1996) szerint a megszerzett ismeretek akkor nem alkalmazásképesek, ha túl nagy a tanulási és az alkalmazási szituáció közötti különbség. Kiemeli, hogy az alkalmazásképes tudás egyik fontos feltétele, hogy tanulási szituáció a lehető legközelebb álljon az alkalmazási szituációhoz. Mivel tehát a szükséges transzfer nem jön létre automatikusan, így nem véletlenül kerülnek előtérbe a különböző tantárgyi ismereteket összekapcsoló, illetve a tanulók élményvilágát bekapcsoló tanulási tartalmak.

A tantárgyi kapcsolatok mélységére és sokszínűségére utal például az is, hogy a természettudomány tanítása jó hatással lehet a matematikai gondolkodás fejődésére, a gondolkodási folyamatokhoz tapasztalati alapot és „gyakorlóterepet" biztosítva (*Nunes és Csapó*, 2011).

Míg azonban például a biológia, a környezetismeret esetében természetes, hogy a vizsgálódásokhoz és kiértékelésükhöz némi matematika is szükséges, ez visszafelé már korántsem ilyen magától értetődő: a matematika tantárgyban a biológia és környezet tárgyakat alig említjük. Az újabb tankönyvek gyakorló, alkalmazó feladatai esetében, illetve új anyagrészek bevezetésekor már tapasztalható törekvés a valós környezet szituációinak többféle beépítésére. E tekintetben pozitív példák a *Vancsó*-féle[1] felső tagozatos tankönyvek, ahol sok ilyen jellegű példa található.

A matematika tanulása különböző célokkal készített feladatok segítségével történik, amelyek nagy része gyakorlásra, alkalmazásra való. A feladatok egy (kisebb) része valós szituációkra épül. Ezeket többféleképpen is lehet csoportosítani, például aszerint, hogy mennyire zártak. Eszerint alapvetően két különböző típus különíthető el:

1. megfigyelésekre, valós adatokra épülő zárt feladatok,
2. modellezési (nyitott, valós szituációra épülő, komplex, autentikus) feladatok.

Tekintsük a szöveges feladatok egy tanulói gondolkodási (és modellezési) folyamatra összpontosító rendszerét, melynek kategóriái röviden:

- valós tartalom szempontjából értelmetlen feladatok,
- kontextusból kiemelt feladatok, ahol a kontextusnak valójában nincs szerepe,
- standard alkalmazási feladatok: a szükséges matematika valóságos szituációba ágyazva, de az eljárás (még) meglehetősen standard,
- valódi modellezési feladatok, ahol a probléma „matematizálását" legalább részben a modellezőnek kell elvégezni (*Galbraith* és *Stillman,* 2001*; Verschaffel,* 2006 idézi *Csíkos* és *Verschaffel,* 2011. 81. o.*).*

Látható, hogy a valós szituáción alapuló feladatok két alapvetően különböző típusa gyakorlatilag megfelel az utolsó két kategóriának. A kategóriarendszer négy eleme határozottan elkülönül egymástól, de elképzelhető további finomítás, amely a kategóriák között „átmeneteket" tartalmaz. Például az utolsó két kategória „között" lehetne a helyük olyan komplexebb feladatoknak, amelyek valamely valós szituációt „járnak körül" zárt alkalmazási és egyszerűbb modellezési részfeladatokkal például feladatlap formájában (*Ambrus,* 2007*). Ebben a tanulmányban további példát mutatunk valós tartalmat felhasználó szöveges feladatok egy további lehetséges csoportosítására, azon az alapon, hogy a feladat milyen mértékben kapcsolódik közvetlen megfigyeléshez.*

Miért éppen a méhek?

A méhekkel minden gyerek igen hamar találkozik, a virágokon szorgoskodó állatok látványa, és méztermelő képességük gyakran felkelti érdeklődésüket. Bár sok minden olvasható a méhekről, a közvetlen megfigyelést a méhek életének közelebbi megismerését semmi sem pótolja. Ha van rá lehetőség, és sikerül eljutni egy méhészetbe, láthatják a kaptárokat, ezekbe esetleg be is nézhetnek, megismerik a méhviasz szerkezetét, látnak üres, pollennel, illetve nektárral teli sejteket és szemügyre vehetik, milyen például a dolgozó, a here vagy a királynő (*Tautz,* 2013*). Ilyen látogatás aligha alkalmas azonban adatok gyűjtésére a méhek életével kapcsolatban.*

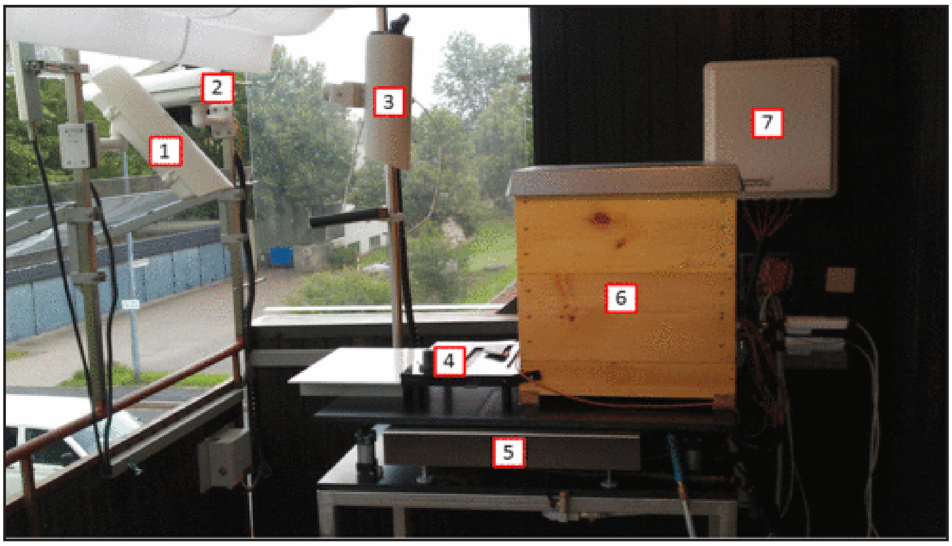
Megfigyelésekhez, adatok gyűjtéséhez alkalmas eszköz található az interneten is: egy interaktív, tanulói felület, középpontjában egy méhcsaláddal, mely a nap 24 órájában megfigyelés alatt áll (HOBOS, Honey Bee Online Studies[2]). Különböző kamerák és érzékelők segítségével lehetőség van a méhek életének és a környezetnek igen pontos megfigyelésére (lásd 1. ábra[3]). Elhelyezésre került a kaptár bejára-

[1] Vancsó Ödön (2012, szerk.): *Matematika körülöttünk, 5–8*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

[2] www.hobos.de/de/studenten/hobos-daten/bienenstock.html

[3] www.hobos.de/de/studenten/hobos-daten/bienenstock.html

tánál egy infravörös megvilágítású kamera, egy hőképkamera, a kaptár belsejében két endoszkópkamera mikrofonnal, valamint egy külső kamera, amely éjjel-nappal a környezeti és időjárásviszonyokról gyűjt adatokat (vö. *Gerstner, Heyne* és *Renninger,* 2012*). A kamerák felvételeit videoarchívumban tárolják.*



1. ábra:
A HOBOS központi része: 1. Kamera (infravörös) a kaptár bejáratánál 2. Kerti kamera az időjárási és környezeti viszonyok felvételéhez 3. Hőképkamera a bejáratnál 4. Kétirányú fény-sorompó amely minden egyes méhet érzékel aszerint is, hogy kijön vagy bemegy 5. Kaptármérleg 6. Kaptár érzékelőkkel 7. Mérési adatokat tároló készülék

A felvételek és tárolt adatok az interneten visszamenőleg is elérhetők és felhasználhatók, így alapul szolgálhatnak különféle vizsgálatokhoz, akár projektekhez is.

Egy közelmúltban végzett vizsgálat eredményeképpen például fény derült a méhek rajzásának körülményeire. Mint ismeretes, miután a méhek kirajzottak a kaptárból egy közeli fán fürtszerűen lógva várakoznak, míg visszatérnek a hírnökök, akik azzal a céllal repültek el, hogy a méhrajnak új helyet keressenek. Ekkor az egész raj egyszerre felkerekedik, elképesztő jelenség. Egyszerre mintegy 20 000 méh indul el, de az induláshoz fel kell előbb melegedniük több mint 30º C-ra. Honnan tudja meg a fürt belsejében levő méh, hogy indulni fognak? A hírnök méhek miután visszatértek, vad repkedésbe kezdenek a fürt körül, és többször is átrepülnek a fürtön a méhek között. Eközben zümmögő hangot adnak ki és az ezt érzékelő méhek megkezdik a felmelegedést. Néhány perc alatt az egész méhsereg indulásra kész lesz és elindulnak. De hogyan készültek fel a méhek a kaptárból való kirajzásra? Erre eddig senki sem tudott válaszolni. A HOBOS segítségével derült ki a kutatók számára, hogy az együttes indulás előtti 10 percben több mint 1 kg mézet fogyasztanak el, hogy a magas hőmérsékletet rövid idő alatt el tudják érni.

A HOBOS használatához nem szükséges előismeret, és bár a honlap német nyelvű, ez nem okozhat különösebb gondot a videókat, illetve tárolt adatokat felhasználóknak.

A méhek világa az oktatásban

A méhek életmódja valóságos kis társadalomnak tekinthető, ahol a különböző feladatokat elosztva végzik. Ez gyakorlatilag rengeteg kérdést vet fel, amelyek többféle tárgyat is érintenek. Ezek közül számos kérdés más a kisiskolás gyerek számára is érdekes és vizsgálható a HOBO adatbank segítségével:

- Mennyire kell kint világosnak lennie ahhoz, hogy a méhek kirepüljenek?
- Hány órakor repülnek ki az első dolgozók?
- Vajon ugyanannyian jönnek-e vissza, ahányan kirepültek?
- Milyen napszakban repül ki a legtöbb méh?
- Mit csinálnak télen a méhek?
- Milyen meleg van télen a kaptár belsejében?
- Legkésőbb mikor térnek vissza a méhek a kaptárba, ha vihar közeleg?
- Mennyivel lesz nehezebb egy kaptár, ha már lakói behordták a télre szánt élelmiszerkészletet?

A világ tele van mintákkal, ez a méhek világára is érvényes. Ha a méhviaszra tekintünk, feltűnik szabályos hatszögszerkezete. Ez további vizsgálódásra is lehetőséget ad minden korosztálynak. A méhek életében azonban más minták is fellelhetők, például életmódjuk ritmusa: nappal kirepülnek, de az éjszakát a kaptárban töltik.

A méhek életének vizsgálatát, az összefüggések feltárását a matematika és más természettudományok együtt, egymással kölcsönhatásban segíthetik. A kisiskolások esetében a természettudományok tanulása nálunk az ember és természet műveltségi terület keretében, Németországban a *Menuk – Mensch, Natur und Kultur* tárgy révén történik.

A magyar NAT-ban megfogalmazódik, hogy *a tanulókat meg kell ismertetni a tervszerű megfigyeléssel és kísérletezéssel, az eredmények ábrázolásával, a sejtett összefüggések matematikai formába öntésével.* A műveltségi terület kisiskolások számára előírt fejlesztési feladatai között pedig megtalálható: *Megfigyelések, egyszerű kísérletek elvégzéséhez szükséges készségek megalapozása, Néhány természeti jelenség megfigyelése, egyszerű magyarázatkeresés kísérlet segítségével.*

A német oktatási törvény szerint (*Ministerium für Kultus, Jugend und Sport,* 2004) a tanulóknak technikákat kell tanulniuk és felhasználniuk természeti megfigyelésekhez és a negyedik osztály végére el is kell jutniuk oda, hogy a gyűjtött tapasztalatokat dokumentálják, saját kérdéseket tegyenek fel, ehhez egyszerű kísérleteket tervezzenek, végezzenek, megvitassanak, kiértékeljenek és optimalizáljanak. Ugyancsak szerepel a dokumentumban, hogy a tanulókat fogékonnyá kell tenni mindennapi szituációk és jelenségek, valamint problémák matematikai tartalmára és arra irányítani őket, hogy ezeket matematikai eszközökkel meg is oldják.

Összevetve a magyar és a német oktatási célokat a természettudományos tantárgyak esetében sok hasonlóság látható, például hogy a célok eléréséhez feltétlenül szükségesek a megfelelő matematikai képességek és ismeretek.

(Matematikai) feladatok, amelyek közelebb hozzák a méhek világát

A világ dolgainak megismeréséhez szükség van matematikára, a méhek élete is érthetőbbé válik, ha becsléseket, összehasonlításokat végeznek a gyerekek, esetleg egyszerűbb modelleket is készítenek. A NAT szerint is szükséges ilyen tevékenységek végzése a matematika órákon. Az „Alapelvek, Célok” között a következőket olvashatjuk:

„A tanulók matematikai fejlődése és a tanulási folyamat során alapvető, hogy ki tudják választani és alkalmazni tudják a természeti és társadalmi jelenségekhez illeszkedő modelleket, gondolkodásmódokat (analógiás, heurisztikus, becslésen alapuló, matematikai logikai, axiomatikus, valószínűségi, konstruktív, kreatív stb.), módszereket (aritmetikai, algebrai, geometriai, függvénytani, statisztikai stb.) és leírásokat. Ugyanakkor fontos a modellek érvényességi körének és gyakorlati alkalmazhatóságá-

nak eldöntését segítő készségek kialakítása, valamint az ezeket megalapozó képességek fejlesztése.” (*NAT* 2012, 61. o.)

A méhek életével kapcsolatba hozható feladatok csoportosíthatók például aszerint, hogy a feladat milyen mértékben kapcsolatos közvetlen megfigyelésekkel, tapasztalatokkal. A továbbiakban három típust különítünk így el, amelyek között lehetnek átfedések:

- közvetlen megfigyelésen alapuló feladatok,
- elsősorban (szak)irodalmi adatokon alapuló feladatok,
- feladatok a léppel kapcsolatban.

Az első kategóriába tartozó feladatokhoz képest a másodiknál a megfigyelések és tapasztalatok sokkal kevésbé, esetenként egyáltalán nem jutnak szerephez. A harmadik kategória feladatai már nem alapulnak közvetlen méréseken, a matematikai tartalmak kerülnek előtérbe. Bármely más valós témán alapuló feladat elhelyezhető az előbbi három kategória valamelyikében, ha az utolsó kategóriát „általánosítjuk”. A lép helyett más valósággal kapcsolatos objektumot választva („Feladatok valamilyen valóságos objektummal kapcsolatban”).

a) Közvetlenül megfigyelésen alapuló feladatok

A méhekkel kapcsolatos megfigyelésekhez, mint említettük a természetben szerzett tapasztalatokon túl nagy segítségre lehet a HOBOS tanulói labor adatbankja. A következő két példából az első azonban egy alkalmas kép segítségével is feladható.

- A képen egy lép részlete látható. Hogyan tudnád megszámolni, hány sejt van rajta? Tudsz jobb módszert is megadni?
- A képen egy lép részlete látható méhekkel. Hogyan tudnád megszámolni, hány méh van rajta? Tudsz jobb módszert is megadni?

A második feladat a tanulók számára sokkal nehezebb, hiszen becslési stratégiák szükségesek hozzá (*Blankenagel,* 1983a, 1983b). A becslés során kapott eredményt (méhek száma) már meglevő reprezentánssal kellene gondolatban összehasonlítani (*Franke*, 2003) de ez itt nem áll rendelkezésre. Ezért más módszer keresendő, például felosztható a lép bizonyos nagyságú négyzetekre, ezeken leszámolhatók majd összegezhető a méhek száma.

*T*ovábbi példákhoz adatokat szolgáltathat a HOBOS. Megfigyelhető például hogy *hány méh repült be, illetve ki a kaptárból*. A megfigyelés adatainak rögzítése többféleképpen történhet, például vonásokkal, táblázatban. Itt mindjárt adódik a kérdés, hogy *hogyan változnak ezek az adatok különböző körülmények között, például esős időben, különböző hónapokban*. Azaz szükséges a kísérlet körülményeinek megadása.

A Würzburgi egyetem videoarchív felvételeit felhasználva, készült a következő táblázat:

időszak (óra)	16:00-17:00	17:00-18:00	18:00-19:00	19:00-20:00	20:00-21:00	21:00-22:00	22:00-23:00	23:00-24:00
berepülések száma	1314	1303	1082	712	479	50	218	150
kirepülések száma	1564	1374	1008	690	516	58	227	191

időszak (óra)	0:00-1:00	1:00-2:00	2:00-3:00	3:00-4:00	4:00-5:00	5:00-6:00	6:00-7:00	7:00-8:00
berepülések száma	16	16	16	8	5	3	59	269
kirepülések száma	21	16	23	10	4	4	101	316

időszak (óra)	8:00-9:00	9:00-10:00	10:00-11:00	11:00-12:00	12:00-13:00	13:00-14:00	14:00-15:00	15:00-16:00
berepülések száma	1018	1960	1670	1678	1898	1727	1067	1768
kirepülések száma	1250	2060	1801	1914	2212	1691	1264	2299

1. táblázat: A kaptárból ki és berepülő méhek száma 2011. augusztus elsején.

A táblázat ebben a formájában egy olyan adathalmaz, amely bár rendezett, de még feldolgozásra vár. Ennek során egyrészt további információk olvashatók ki a közölt számokból, például megkérdezhető, hogy:

- *Hány méh repült ki és be összesen ezen a napon?*

Másrészt reflektálni lehet a kapott eredményekre, amelyeket tanári vagy tanulói kérdések segíthetnek például a következők:

- *Miért repült ki több méh, mint amennyi visszaérkezett? Mi történhetett a távolmaradókkal – esetleg másik kaptárban alszanak?*
- *Előfordulhat, hogy valamikor kihal a kaptár?*

A kérdésekre többféle válasz adható, például, hogy elpusztulnak, eltévednek útközben; ez utóbbi elég valószínűtlen, ugyanis speciális illatanyaguk segítségével kiválóan tájékozódnak és saját kaptárukba térnek vissza. A különbség főleg abból adódik, hogy néhány méh elpusztul útközben. Ez a szám a koratavasszal a legnagyobb, amikor a telet túlélő méhek mind elpusztulnak. Az is előfordul néha, hogy a szorosan egymás mellett beérkező méheket a számláló egynek számlálja, azaz számolási hiba is adódhat.

A kaptár kihalása gyakorlatilag lehetetlen, hiszen egy egészségesen működő méhcsaládban naponta mintegy 2000 méh jön a világra.

A mérési adatok összehasonlításra is alkalmasak:

- *Keress tavasz és őszi hasonló adatokat egy-egy napról, foglald őket táblázatba és hasonlítsd össze a három táblázat adatait.*

Lehetőség van más méhekkel kapcsolatos adatok mérésére és feladatok készítésére is például ilyeneket ad meg *Gerstner, Heyne* és *Renninger* (2012) *és Tautz, Ruppert* és *Wörler* (2013).

b) Irodalmi adatokon alapuló feladatok

A dolgozó méhek rövid életük folyamán nektárt és pollent gyűjtenek fáradhatatlanul, de ők állítják elő a lépek építéséhez szükséges méhviaszt is. Ahhoz, hogy érzékelhessék a gyerekek milyen komoly munkáról is van szó, érdemes különféle számításokat végezni, esetleg modelleket készíteni. A feladatok kapcsán további kérdések is felmerülnek, amelyek részben a feladatokban szereplő fogalmakból adódnak (Például: Mi a nektár? Mi a pollen?), részben a kíváncsi ember természetes kérdései (Például: Ha van dolgozó méh, akkor van nem dolgozó is?)

A következőkben olyan feladatokra mutatunk példákat, amelyek esetében a feltett kérdés megválaszolásához különféle számítások és becslések szükségesek.

- *A dolgozó méhek pollent és nektárt gyűjtenek. Egy dolgozó tömege körülbelül 70 mg és mintegy 40 mg terhet képes cipelni. Körülbelül hány kilogrammot kellene cipelned ha méh volnál?*

Megjegyzés: Ez egy nyitott feladat, a kérdésre adható válasz nemcsak a tanuló tömegétől függ, hanem attól is, hogy milyen modell szerint számol. Például elhanyagolva az 5 mg különbséget, gondolhat arra, hogy legalább az ő tömegének felét, tehát legalább 15–20 kg-t is cipelnie kellene. Egy 35 kg-os tanuló arra a következtetésre is juthat, hogy ha ő egy kis 35 mg-os méhecske lenne, akkor 20 mg-t kellene cipelnie, így ez „embergyerekként”, körülbelül 20 kg-t jelentene.

- *Egy méhcsaládtól évente körülbelül 30–40 kg méz vehető el, a többi saját szükségleteiket fedezi. Ehhez kétszeres mennyiségű nektárt kell a kaptárba cipelniük. Körülbelül hány kirepülés szükséges a mennyiség begyűjtéséhez?*

Megjegyzés: A feladat jó lehetőség a nagy számokkal kapcsolatos műveletek és az átváltások gyakorlására. Például 40 kg mézzel számolva mintegy 2 millió kirepülés szükséges a megfelelő mennyiségű nektár begyűjtéséhez. Ez az eredmény a szakirodalmi adatok alapján elfogadható, az ellenőrzéshez az internet is segítséget nyújthat.

- *A méhviasz fontos alapanyag kozmetikai és gyógyászati termékek gyártásánál. Egyetlen dkg viasz előállításához azonban körülbelül 1500 méh teljes viasztermelése szükséges, azaz az összes viasz, amit rövid életük alatt készítettek. Egy dolgozó 35 napos élete során nagyjából 10 napig tud viaszt termelni. Mennyi viaszt termel körülbelül 1500 dolgozó naponta?*

Megjegyzés: Egy nap alatt körülbelül az 1 dkg tizedrészét állítják elő.

Mivel az apró méhek életének vizsgálatánál kicsi mennyiségek is szerepelnek, természetesen szükség van az alsó tagozaton előírt dkg és kg használatán kívül kisebb egységek ismeretére is (a német oktatási dokumentumok a g, kg és t ismeretét írják elő). Azonban példák, modellek segítségével nem gond kisebb mértékegységek megismerése sem és ezzel az alapismeretek is bővülnek. A következő modell „kézzelfoghatóvá” teszi a kisiskolás számára is, hogy mekkora egy méh tömege:

- *Ha gondolatban kétkarú mérlegen az egyik serpenyőbe méheket, a másikba egy kis gumimacit tennél, vajon hány méhre lenne szükség, hogy a mérleg egyensúlyban legyen? Egy gumimaci tömege körülbelül 2 g.*

El lehet azon is tűnődni, hogy mit jelent az, hogy egy méh tömege körülbelül 70 mg és akár ennek alapján az átlag jelentésén is.

Feladatok készítéséhez felhasználható többféle méhekkel kapcsolatos szakirodalom például a magyar nyelven is elérhető (*Tautz,* 2013), de ugyanúgy hasznosak lehetnek, azaz internet megfelelő oldalai is.

c) Feladatok a léppel kapcsolatban

A méhek által készített viaszépítmény, a lép, felülnézetben szabályos hatszögekből épül fel. Ez is példa a természetben oly gyakran megtalálható szimmetriára, valamilyen szabályt követő felépítésre és ez a mintázat számos matematikai kutatás kiindulópontja is lehet kisiskolások számára (*Wittmann – Müller,* 2007).

A következő feladatok ötleteket adhatnak a matematika órán elvégzendő különféle vizsgálódáshoz.

Az első két feladat a síkidomok tulajdonságaihoz, és a geometriai transzformációk területére vezetnek.

- *Rajzolj le egy kis cellát a lépről egy papírra, és vágd ki. Fogalmazz meg tulajdonságokat a cellával kapcsolatban! Hogyan neveznéd ezt az alakzatot?*
- *Rajzolj le egy kis cellát a lépről kartonpapírra, vágd ki és próbálj vele lefedni „parkettázni” egy írólapot. A kép elkészítéséhez mindig rajzold körül a kis hatszöget. Figyeld meg, hogyan mozgathatod a kartonból kivágott kis hatszöget a rajzolás során!*

Megjegyzés: A tanulók az eszközt nem készen kapják a vizsgálódáshoz, így lehet, hogy ha túl kicsi vagy túl pontatlan cellát vágtak, akkor meg kell ismételni a „kivágást” – ez nem gond, a vizsgálódás folyamatához ez az „eszköztervezés” is hozzátartozik.

Megfigyelhető tulajdonságok például, hogy a cella oldalai egyenlő hosszúak, hat oldala van, szögei egyenlő nagyságúak. Ezek a tulajdonságok a kivágott hatszögön

„ellenőrizhetők”, és megkereshetők a szimmetriatengelyek is, hajtogatással. A hajtogatás során keletkező élek segítségével megfigyelhető a hatszög többféle felépítési lehetősége is síkidomokból pl. szabályos háromszögekből. A parkettázás során a kis hatszöget sokféleképpen lehet mozgatni úgy, hogy újabb hatszöget rajzolhassunk, lehet eltolni, „átfordítani” vagyis tükrözni valamelyik oldalára, egyik csúcsa körül mindkét irányba elforgatni akkora szöggel, mint az egy belső szöge.

A cella sokféleképpen elnevezhető; lehet, hogy például a méhekkel kapcsolatos lesz a név, de előfordulhat, hogy a tanulók már ismerik a „hatszög” elnevezést.

A következő feladatok a hatszögekkel parkettázott sík egy részletével, az úgynevezett szabályos hatszögtáblákkal foglalkoznak. Ezeket aszerint nevezzük el, hogy hány kis hatszög alkotja egy-egy oldalukat (ld. 2. ábra), de lehetne, akár a sakktábláknál, 2 x 2-es, 3 x 3-as tábláról beszélni itt is.

- *A lép egy részletét láthatod a rajzokon, ezeket hatszögtábláknak neveztük el. Adj módszereket arra, hogyan keletkezhet a kettes-táblából a hármas, a hármas-táblából a négyes-tábla. Tudnád folytatni?*

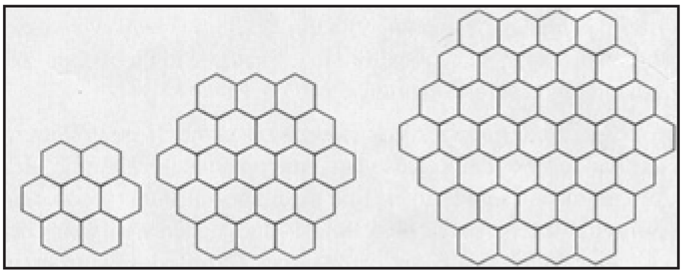
Megjegyzés: Egy lehetőség, hogy megfelelő (kis hatszögekből álló) gyűrűket rakunk rendre a táblákra ahhoz, hogy a következő tábla létrejöjjön.

- *Nézd meg hány cella (kis hatszög) van a felrajzolt táblákon, és add meg az ötös és hatos táblán található cellák számát a táblák felrajzolása nélkül!*

Megjegyzés: Ez például a következőképpen tehető meg: a kettes táblán 1 + 6 = 7 cella van, a hármas táblán 7 + 6 x 3 – 6 = 19 (hiszen 6 db 3-as léc rakható körbe, de le kell vonni a kétszer szereplő 6 cellát), a négyes táblán 19 + 6 x 4 – 6 = 37, az ötös táblán 37 + 6 x 5 – 6 = 61, a hatos táblán 61 + 6 x 6 – 6 = 91 cella van.

- *A 3. ábrán egy 1 x 3-as lécet látsz. A 2. ábrán látható három táblát próbáld meg lefedni 1 x 3-as léceket. Mit tapasztalsz?*

Megjegyzés: Egyik sem fedhető le, ugyanis a cellák száma a táblákon nem osztható 3-mal, azaz mindig lesz kimaradó cella.



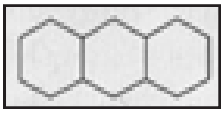
2. *ábra*: Kettes- hármas- és négyes hatszögtáblák

- *Színezd feketére a középső mezőt az előbbi három hatszögtáblán és próbáld meg lefedni a lécekkel a fehéren maradt táblarészt. Mit tapasztalsz?*

Megjegyzés: A fehér részen a cellák száma osztható 3-mal, így a lefedés létrejöhet és könnyen látható, hogy meg is valósítható az első (kettes) tábla kivételével.

- *Hány színnel tudsz kiszínezni egy hatszögtáblát úgy, hogy egymás melletti cellák (kis hatszögek) különböző színűek? Emlékeztet ez a színezés egy ismert másik tábla színezésére?*

Megjegyzés: Két színnel nyilvánvalóan nem megy a színezés az adott módon, viszont hárommal már igen. Kezdjük például a színezést a tábla közepén. Az analógia a sakktáblával mindenképpen megteremthető, amiről viszont már tudható, hogy két színnel is színezhető.



3. *ábra*: 1x3-as léc

A sakktáblával való hasonlóságból, adódhat az a gondolat is, hogy a bűvös négyzet mintájára készítsünk bűvös hatszögtáblás feladatokat.

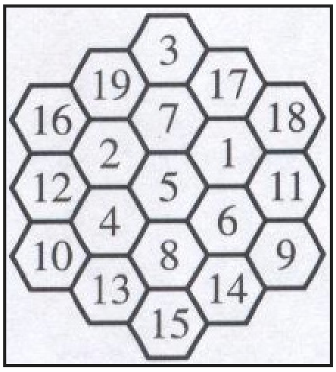
A bűvös hatszögtáblában 1-től kezdődően az egymást követő pozitív egész számok szerepelnek olyan elrendezésben, hogy a beírt számok összege minden egyenes mentén ugyanannyi. A kettes tábla esetében elég hamar belátható, hogy nem létezik ilyen kitöltés. Viszont a hármas tábla 19 mezője kitölthető ilyen módon.

Belátható, hogy ez a kitöltés a szimmetriáktól eltekintve egyértelmű. Meglepő viszont az a tény, hogy ennél nagyobb méretű bűvös hatszögtábla nem létezik. (*Tóth*, 1994).

A hármas tábla említett kitöltésének megtalálása nehéz feladat, de néhány értéket előre beírva már könnyebben *folytatható* a kitöltés. Attól függően, hogy hány szám és mely helyeken kerül megadásra, többféle és különböző nehézségű feladat készíthető. A következő egy egyszerű változata ennek a feladatcsaládnak.

- *A bűvös négyzetek kitöltéséhez hasonlóan próbáld meg kitölteni az alábbi bűvös hatszög üres celláit. A bűvös négyzeteknél minden oszlopban, sorban és az átlókban a számok összege ugyanannyi. Itt mire fogsz ennek alapján figyelni a kitöltésnél?*

Megjegyzés: A középső oszlopból kiderül, hogy a számok összege oszloponként és soronként 38. Ezt követően többféleképpen is el lehet járni a kitöltésnél, mindig keresve azokat a sorokat vagy oszlopokat, ahol csak egyetlen szám hiányzik.



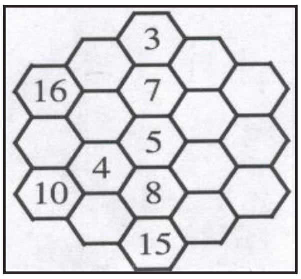
4. ábra: „Bűvös" hármas hatszögtábla kitöltve

A táblákkal további, összetettebb vizsgálatok is végezhetők; jó kutatási lehetőség felsőbb osztályokban is (*Ambrus,* 1997*; Tóth* 1994).

További geometriai feladatok találhatók a méhsejttel kapcsolatban, de inkább az idősebb korosztálynak (*Tautz, Ruppert* és *Wörler,* 2013).

A matematikán belüli kapcsolatok megmutatásán és ezek tanítása mellett az előbbi a feladatok a megismerés fejlesztési feladaton belül az alsó tagozatosok számára előírt *pontos megfigyelés, egyszerűsített rajzkészítés, kirakás, tapasztalati függvények, sorozatok alkotása, változó helyzetek megfigyelése* tevékenységeket támogatják elsősorban.

A német tantervi előírásokban külön kompetenciaként szerepel az alsó tagozaton a „Minták és struktúrák". Ezen belül egyszerű geometriai és aritmetikai minták, szabályszerűségek vizsgálatát, leírását és folytatási lehetőségek adását, minták egyéni létrehozását és függvényszerű viszonyok felismerését, leírását és ábrázolását (*Wittmann és Müller*, 2007. 42. o.) segíthetik az előbbi feladatok.



5. ábra: Segítség a „bűvös" hármas hatszögtábla kitöltéséhez

Befejező gondolatok

Ha beletekintünk a NAT-ban megfogalmazott matematikán belüli fejlesztési feladatokba, akkor elmondható, hogy a jelzett 7 fő területből 6 esetében (tájékozódás, megismerés, az ismeretek alkalmazása, problémakezelés és megoldás, alkotás és kreativitás, matematikai tapasztalatszerzés, a matematika épülésének elvei) szerepelnek tevékenységek a méhekkel kapcsolatos példaként bemutatott feladatok megoldása során. Ha a feladatok megoldásának osztálytermi szervezését tekintjük, az előbbiekben nem szereplő 6. fő fejlesztési feladat tevékenységeiből (kommunikáció, együttműködés, motiváltság, önismeret, önértékelés, reflektálás, önszabályozás) is megjelenik néhány.

Nemcsak a természettudományok tanulása kapcsolódik össze a matematika tanulásával, hanem a matematika esetében előírt fejlesztési feladatok teljesítéséhez is fontos a természettel kapcsolatos témák különféle feldolgozása. Ez nem is olyan különös, ha meggondoljuk, hogy a matematika fejlődéséhez hogyan járultak hozzá a természettudományok (vö. *Sain,* 1986). Az oktatási dokumentumokban megfogalmazott követelmények teljesítésén túl fontos kiemelni, hogy a gyerekek élményszerű ismeretszerzéshez és alkalmazásképes tudásához juthatnak a nem matematikai témán alapuló feladatok feldolgozása során.

Irodalom

Ambrus Gabriella (2010): *A hétköznapok matematikája, munkafüzet 4. osztályosoknak*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Ambrus Gabriella (2007): V*alóságközeli matematika (munkafüzet és tanári segédkönyv CD).* Műszaki Könyvkiadó, Budapest.

Ambrus Gabriella (1996): Újabb eredmények hatszögtáblán, *A Matematika Tanítása*, **I**. 14–21.

Blankenagel, Jürgen (1983a): Schätzen, Überschlagen, Runden. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, **8**. 278–284

Blankenagel, Jürgen (1983b): Schätzen, Überschlagen, Runden. *Sachunterricht und Mathematik in der Primarstufe*, **9**. 315–322.

Csíkos Csaba és Verschaffel, Lieven (2011): A matematikai műveltség és a matematikatudás alkalmazása, In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.) *Tartalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 59–95.

Franke, Marianne (2003): *Didaktik des Sachrechnens*. Spektrum, Heidelberg, Berlin.

Gerstner, Sabine, Heyne, Thomas és Renninger, Lioba (2012): Live aus dem Bienenstock. Multimedialer Biologieunterricht mit echten Bienen. *Praxis Schule*, **4**. 11–17.

Ministerium für Kultus, Jugend und Sport (2004): *Bildungsplan Grundschule*, Ditzingen, Baden-Württemberg.

Nunes, Terezinha, Csapó Benő (2011): A matematikai gondolkodás fejlesztése és értékelése, In: Csapó Benő és Szendrei Mária (szerk.) T*artalmi keretek a matematika diagnosztikus értékeléséhez*. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest. 17–57.

Renkl, Alexander (1996): Träges Wissen: Wenn Erlerntes nicht genutzt wird. *Psychologische Rundschau*, **47**. 78–92.

Sain Márton (1986): *Nincs királyi út.* Gondolat Kiadó, Budapest.

Tautz, Jürgen (2013): A *természet csodája a mézelő méh*. Apiliteratura Hungarica Kiadó.

Tautz, Jürgen, Ruppert, Markus és Wörler, Jan (2013): Die Mathematik der Honigbiene. In: Ruppert, M. és Wörler, J. (Hrsg.) T*echnologieeinsatz im Mathematikunterricht*. Springer, Heidelberg, Berlin. 201–216.

Tóth Sándor (1994): Ismét a hatszögtábláról. *A Matematika Tanítása*, **4**. 10–15.

Vancsó Ödön (2012, szerk.): *Matematika körülöttünk*, 5–8. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest.

Wittmann, Erich Christian és Müller, Gerhard (2007): Muster und Strukturen. In: *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* 42–65.

NAT 2013, 2012. június 4., *Magyar Közlöny* http://www.magyarkozlony.hu/

ABACUS folyóirat, 2008 októbere.