FADIAGRAMOK ALKALMAZÁSA A VALÓSZÍNŰSÉG-SZÁMÍTÁS TANÍTÁSA SORÁN

DEBRENTI EDITH

Összefoglalás

A világról szerzett információink nagy részét a szemünk segítségével fogadjuk be, a vizualításnak nagy szerepe van az életünkben. Így a tárgyi és képi reprezentációknak fontos szerepe van a tanulási folyamatban, a szemléletes oktatás segít a fogalmak mélyebb megértésében, ezt számos pszichológiai kutatás is bizonyítja. Az emberek jobban emlékeznek egy fogalom vizuális aspektuaira, mint az analitikus szempontokra.
A nemzetközi matematikadidaktikai szakirodalomban erősödik az a felfogás, hogy a vizuális reprezentációkat a felsőfokú oktatásban is alkalmazni kell, ezzel is segítve a megértést.
A klasszikus valószínűség-számítás tanítása során jól használhatók a fadiagramok, melyek főleg többlépcsős kísérleteknél, sokkal áttekinthetőbbek, jól észrevehető, látható rajtuk az összes kimenetel.
Egy gyökértől kiindulva különböző utakat rajzolunk az egymást kizáró eredményekkel, amelyek a kísérlet első lépcsőjében fellépnek, és ellátjuk a megfelelő valószínűségekkel. Onnan a további lépcsők következnek. Jól szemléltethető fadiagrammal a teljes valószínűség tétele és a Bayes-tétel is. Az előadásban a valószínűség-számítás tanítása során észlelt tapasztalataimról is szó esik.

Kulcsszavak: *valószínűségszámítás, matematikaoktatás, reprezentációk, fadiagramok, döntési fák*

Using of the tree diagrams in teaching of the probability theory

Abstract

We collect the most part of the information from the world around us with the help of our eyes. Our visual ability plays an important role in man's life. Thus the visual and symbolic representations are of great help in learning. The use of visual aids in the process of teaching leads to a better understanding of the concepts. The same fact has been proved by many psychological experiments, too.
In teaching the probability theory we can use with great success the three diagrams which, mainly in the case of multilevel experiments, can give us a much clearer view of the problem, they are easy to look over or grasp their view and can show us an overall representation of the case. Starting from the same root, we can draw different ramifications which can be marked with their appropriate value of probability. Hence the next stages continue. The total probability's theorem and Bayes' theorem can be clearly represented on a tree diagram.
In my lecture I shall also deal with the experiences I had in teaching the probability theory.

Keywords: *probability theory, teaching of the mathematics, representations, tree diagrams, decision trees*

Bevezetés

A gazdalkodási és közgazdasági alap- és mesterszakok tanterveiben számos matematikai tárgy szerepel, többek közt a valószínűségszámítás is. A modern tudományos eredmények között számtalan olyan törvényszerűség van, amely valószínűségi összefüggéseken alapszik, az atomelmélet, a statisztikus fizika, a modern biológia, a genetika, szociológia területén nincs komoly előrelépés statisztikus és valószínűségi fogalmak nélkül. „A modern tudomány felfedezte, hogy az ún. valószínűségi szemléletmód magyarázza meg helyesen a bennünket körülvevő világegyetem alapvető jelenségeit és az élővilágban lezajló folyamatok nagy részét is ez írja le jól." (Kosztolányi *et al*, 2007).
„A valószínűségi és korrelatív gondolkodás a pszichológiában is viszonylag újabb kutatási területek közé tartozik. Az elmúlt évszázadok tudományos világképét a mechanikus, az előre eldöntött, kiszámítható, determinisztikus szemlélet dominálta, e század természettudományos eredményei viszont nagyobb részben a véletlenszerű jelenségekhez, a bizonytalanságban fellelhető szabályszerűségekhez kapcsolódnak." (Csapó, 1998)
Piaget szerint a véletlenszerűség fogalmát ugyanúgy tanulnunk kell, mint sok más gondolkodási elemet. (Piaget, 1975)
„Azt tapasztaltam, hogy a valószínűségszámítás matematikai elméletében való elmélyedéshez és annak eredményes felhasználásához nem elegendő (bár persze nélkülözhetetlen) a matematikai elmélet a célnak megfelelő mértékben való megértése és megtanulása: emellett szükséges a valószínűségszámítás sajátos gondolkodásmódjának elsajátítása is."(Rényi, 1973) Rényi szerint két dolog szükséges ehhez: az egyik a konkrét alkalmazásokkal való közelebbi megimerkedés, valamint az elvi kérdések alapos megértése.

Reprezentációk

„A matematika műveléséhez, matematikai gondolkodáshoz és kommunikációhoz valamilyen módon reprezentálnunk kell a matematikai struktúrák elemeit. A kommunikáció külső reprezentációt kíván nyelvi eszközök, írott szimbólumok, ábrák, tárgyak formájában." (Lesh, Post és Behr, 1987) A külső reprezentációk lehetnek: tárgyi (materiális), képi (vizuális) és szimbólikus (beszélt nyelv, írott nyelv, szimbólumok).
Ahhoz, hogy egy matematikai fogalomról gondolkodjunk, annak belső (mentális) reprezentációjára van szükség, hogy agyunk operálni tudjon ezen reprezentációkkal. A külső reprezentációval szemben a belső reprezentáció nem hozzáférhető, közvetlenül nem kutatható. A kognitív pszichológia kutatóinak két hipotézise van a reprezentációkkal kapcsolatban: 1) Létezik kapcsolat egy fogalom külső és belső reprezentációi között. A belső reprezentációkra, azok minőségére a külső reprezentációkkal végzett manipulációkból következtethetünk.
2) A belső reprezentációk kapcsolatban állnak egymással, egy hálózatot alkotnak, ez a matematikai fogalmak, elvek kapcsolatát, összefüggéseit jelenti. A köztük lévő kapcsolat szimulálható a megfelelő külső reprezentációk közötti kapcsolatok kiépítésével, létrehozásával. (Ambrus, 2000) „A külső matematikai reprezentációk, például az ábrák, a szöveges meghatározások befolyásolják a belső reprezentáció természetét. a kapcsolat fordíva is igaz: az a mód, ahogy egy tanuló tudását megjeleníti, külsőleg reprezentálja, az feltár valamit abból, ahogy ő belsőleg reprezentálta az információt. (Dobi, 1998)

A külső reprezentációk közül a szimbolikus fejezi ki legtömörebben és legabsztraktabban az adott elvet, fogalmat. Viszont a tárgyi és a képi reprezentációk segítségével a tanulók jobban megértik a fogalom, az elv lényegét, jelentőségét, értelmes lesz számukra (sensemaking). A konkrét, vizuális reprezentációhoz való visszatérés segítheti a megértést. Az emberek jobban emlékeznek egy fogalom vizuális aspektusaira, mint az analitikus szempontokra, mert az emlékezet jobban tud operálni képekkel, mint szavakkal. (Ambrus, 2000) A háromféle külső reprezentáció spirálszerű használata lenne célszerű az oktatásban. Sikeresebb a tanulási folyamat, ha különböző kognitív módszerekre támaszkodik, ha integrálja a verbális, elemző és vizuális tevékenységeket. Dienes Zoltán a *többszörös megtestesítés elvének* nevezi és ezalatt azt érti, hogy egy absztrakt fogalom megértéséhez szükséges annak többféle konkrét reprezentációja és a velük való manipulációk birtoklása. (Dienes, 1973)

A vizuális reprezentáció gyakran segít egy probléma felfogásában, megértésében. A vizuális reprezentációk használatára tudatosan kell nevelni a tanulókat, sok gyakorlattal, türelemmel. A jó problémamegoldók éppen azzal tűnnek ki, hogy a feladatnak legjobban megfelelő reprezentációs módot választják ki, rugalmasan áttérnek algebrai feladatoknál a geometriai reprezentációra. (Ambrus, 2000)

„Konkrét és vizuális reprezentációk használata nem csak az ún. lassú tanulók, illetve az alsóbb osztályú tanulók számára szükségesek. E fajta reprezentációk fontosak minden tanuló számára és hasznosak a teljes tanulmányi folyamat során.”(Wittmann, 1998)

A hagyományos didaktikai felfogás szerint a vizuális és tárgyi reprezentációknak az alsóbb osztályokban van jelentősége, a felsőbb osztályokban a szimbolikus reprezentációknak kell dominálniuk. A nemzetközi matematikadidaktikai szakirodalomban erősödik az a felfogás, hogy a vizuális reprezentációkat a felsőbb osztályokban, sőt a felsőfokú oktatásban is alkalmazni kell. (Ambrus, 2000)

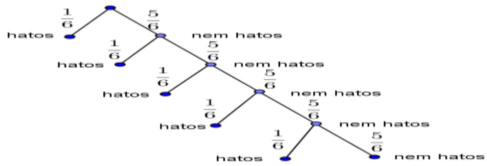
„Egyik fajta reprezentáció sem tudja kielégíteni egy probléma megoldásához, illetve egy szituáció kezeléséhez szükséges feltételeket, követelményeket. Általában többféle reprezentáció alkalmazása szükséges. a matematikai tevékenység sokkal hatékonyabb, ha a tanuló többféle reprezentációt párhuzamosan használ és összekapcsolja azokat. A matematika ereje a reprezentációktól független tulajdonságokban és a reprezentációk közötti kapcsolatokban rejlik.” (Dreyfus, Eisenberg, 1996)

Feladatok megoldása fadiagramok segítségével

1. Feladat: A „Ki nevet a végén?” nevű társasjátékban a játékba való belépés feltétele, hogy a dobókockával hatost dobjunk. Mennyi az esélye annak, hogy valakinek legkésőbb az ötödik körben sikerül hatost dobnia?

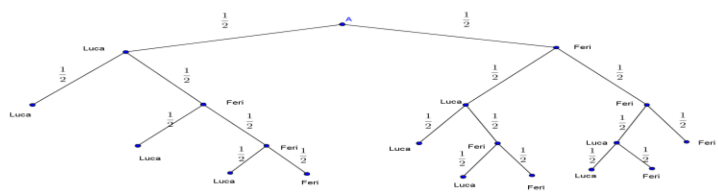
Megoldás: a teljes valószínűség tételét alkalmazzuk, összegezzük az összes esélyt arra, hogy az első 5 körben bekerülhessünk a játékba, azaz lecsúszunk minden ágán a gráfnak, amely hatoshoz vezet.

$$p(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cdot \frac{1}{6} = 0{,}5981\,.$$



1.ábra: Az 1. feladat fadiagramja
Forrás: Saját szerkesztés

2.Feladat: Egy játék fordulókból áll, és aki a fordulót megnyeri, az kap egy pontot. Hogyan osztozkodjon két egyformán képzett játékos, Luca és Feri a játék tétjén a játék félbeszakadása esetén, ha tudjuk, hogy a játék megnyeréséhez Lucának 2 pontra, Ferinek pedig 3 pontra lenne szüksége? Játsszuk le pénzfeldobással a játék hiányzó fordulóit, és ebből becsüljük meg az osztozkodás arányát!
Megoldás: Legyen egy feldobás egy forduló, ha fej, akkor Luca nyer, ha írás, akkor pedig Feri. A játékot a továbbiakban a gráfon követjük nyomon, ahol azt vizsgáljuk meg, hogy mekkora valószínűséggel nyerné Luca a játékot, illetve mekkora valószínűséggel Feri. Minden fordulóban két lehetőség van, vagy Luca nyer vagy Feri. Minden pontból két elágazás van, a végpontokon látható annak a neve, aki nyer. Az élekre ráírjuk annak valószínűségét, hogy az él kezdőpontjából az él végpontjába jutunk. Pénzfeldobás esetén egyenlőek az esélyek, azaz mindkettő $\frac{1}{2}$ -ed valószínűséggel nyeri a fordulót. A gráf csak addig ábrázolja a játékot, amíg valamelyik játékos meg nem nyeri. Ha a fa gyökerétől az ágakon végigsétálva a fa leveléig összeszorozzuk az élekre írt valószínűségeket, megkapjuk, hogy mekkora valószínűséggel nyer valaki (szorzási szabály).



2.ábra: A 2. feladat fadiagramja
Forrás: Saját szerkesztés

Számoljuk össze Luca nyerési esélyeit! $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{8} + 3\cdot\frac{1}{16} = \frac{11}{16}$.
Feri nyerési esélye: $\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{11}$.
A nyereményen tehát Luca és Feri 11:5 arányban kell osztozkodjon a játék félbeszakadása esetén.

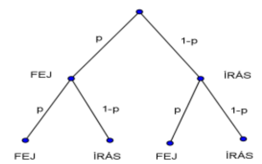
Megjegyzés: fontos, hogy a gráf bármelyik elágazásánál megjelenő két esemény (fejet vagy írást dobnak) teljes eseményrendszert alkot, ez azért fontos, hogy a fa ágai között ne legyenek átfödések. Az esélyek összegzése egy játékos esetén tulajdonképpen a teljes valószínűség tételének az alkalmazása alapján történt.

3.Feladat (Matlap 1012/4. szám): Egy pénzérmét úgy cinkeltek meg, hogy a fej dobásának valószínűsége $\frac{1}{2}$–nél kisebb legyen. Ha a pénzérmét kétszer egymás után feldobjuk, $\frac{1}{3}$ annak valószínűsége, hogy pontosan egy fej jelenjen meg. Mennyi a fej dobásának valószínűsége?

Megoldás: A fej dobásának valószínűségét nem ismerjük, ezért jelöljük *p*-vel. Így az írás dobásának esélye *1-p*.

p(pontosan egy fej)= $p \cdot (1-p) + (1-p) \cdot p = 2 \cdot p \cdot (1-p) = \frac{1}{3}$.

A másodfokú egyenlet megoldásai $p_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{6} > \frac{1}{2}$, illetve $p_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \cong 0{,}2$. Tehát a fej dobásának valószínűsége 0,2.



3.ábra: A 3. feladat fadiagramja

Forrás: Saját szerkesztés

4. Feladat: Egy gyárban 10 gép ugyanazt az alkatrészt gyártja: 2 gép esetén a selejt 3%, 5 gépnél 1,5% és 3 gépnél 1%. Feltételezve, hogy bármelyik kész alkatrészt ugyanakkora valószínűséggel választhatjuk ki: a) mennyi az esélye, hogy selejtes darabot választunk? b) mennyi az esélye, hogy egy selejtes darabot éppen az első gépcsoport gyártotta (éppen az a két gép, melynél a selejt 3%)?

Megoldás: a) $p(S) = 0{,}2 \cdot 0{,}03 + 0{,}5 \cdot 0{,}015 + 0{,}3 \cdot 0{,}01 = 0{,}0165$,

a teljes valószínűség tételét alkalmaztuk, lecsúszva minden ágán a gráfnak, amely selejteshez vezet (szorzási szabály).

b) Ha az első gráfot fejreállítjuk, kapjuk a második gráfot, azaz a feladat adatait a selejtesség szempontjából nézzük és erre épül rá a gépek szerinti megoszlás. (Bayes-tételét szemléletesen tudjuk megjeleníteni gráfok segítségével.)

$p(G_1|S) = \frac{p(G_1) \cdot p(S|G_1)}{p(S)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}03}{0{,}0165}$=0,36.

1.ábra: A 4. feladat fadiagramja
Forrás: Saját szerkesztés

Következtetések

A matematika minden ága felmerül a közgazdasági alkalmazások során. A döntéselméletben a döntési fa, mint kvantitatív módszer segíti a döntéshozót a választáshoz készülődve az alternatívák elemzésében és a lehetséges következmények értékelésében. (Zoltayné, 2005)

Az idei tanévben 48 elsőéves közgazdász hallgatómnak egy féléves valószínűségelmélet tárgy keretében, előadásokon és a gyakorlatokon is fadiagramok segítségével tanítottam a tárgyat, ezek segítségével vizualizáltuk az adatokat, a gráfon reprezentáltuk a klasszikus valószínűségelmélet alapösszefüggéseit (a szorzási szabályt, a teljes valószínűség tételét, Bayes-tételét, események függőségét, illetve függetlenségét, stb.)

Az évvégi teszt során összefüggésvizsgálatot készítettem, tíz megoldandó feladat során azt mértem, hogy a hallgató hány feladat megoldásánál használ gráfot, illetve hogy ez hogyan függ össze a hallgató százalékos teljesítményével e teszt esetén. A vizsgált mennyiségek közötti Person-féle korrelációs együttható r = 0,4311. Ez az érték egy mérsékelten szoros kapcsolatra utal. (A hallgatók fadiagram- alkalmazási gyakorisága és az általuk kapott jegy közötti korreláció r = 0,4451, a jegy alakulását 20%-ban határozza meg, hogy használt vagy sem gráfot a megoldás során.)

Saját tapasztalatom, ha kontrollcsoportként a tavalyi hallgatóimat tekintem, hogy a megértésben sokat segítettek a gráfok, a hangsúly nem a gépies, rutinszerű alkalmazásokon volt, hanem a megértésen, az önálló gondolkodáson. A korrelációs együttható jól jellemzi azt, hogy mennyire szorosan függenek össze a teszteredmények és az, hogy a hallgatók milyen gyakorisággal használták a gráfokat egy problémamegoldás során:

a hallgatók 91,66%-a legalább egy feladat esetén alkalmazott fadiagramot, közel 29,16% pedig legalább háromszor alkalmazott gráfot.

Ha változatossá szeretnénk tenni módszereinket, a fadiagram olyan módszer, eszköz, mely segíti a tanárt abban, hogy érdekesebbé tegye a matematikaórát, hol önállóan, hol együttműködve lehet újabb és újabb tapasztalatokat szerezni, alkalmazásuk lehetővé teszi az adatok, a feladatok jobb átláthatóságát, fejlődik a tanulók problémamegoldó képessége, elősegíti a diák aktív részvételét a tanórán.

Hivatkozott források:

Ambrus A. (2000): Az integráció elve a matematika tanításában, A Matematika Tanítása, VIII. évfolyam, 2000 március, 6-13.

Csapó B. (szerk.) (1998): Az iskolai tudás, Osiris Kiadó, Budapest, 1998, 170.

Dienes Z. (1973): Építsük fel a matematikát!, Gondolat Kiadó, Budapest, 1973

Dobi J. (1998): Megtanult és megértett matematikatudás. In : Csapó Benő: Az iskolai tudás, Osiris Kiadó, Budapest, 1998, 23., 29

Dreyfus, T. - Eisenberg, T. (1996): Different sides of mathematical thinking, In: *The nature of mathematical thinking*, (eds. Stenberg, R.J.) Lawrence Erlbaum Mahwah, 1996.

Kosztolányi J. - Kovács I. - Pintér K. - Urbán J. - Vincze I. (2007): Sokszínű matematika 10, Mozaik Kiadó Szeged, 2007, 229.

Lesh, R., Post, T., Behr, M. (1987): Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In: Janvier, C. (szerk): *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Lawrence Erlbaum, Hillsdale, NJ. , 1987, 33-40.

Piaget, J. - Inhelder, B. (1975): The Origin of the Idea of Chance in Children, Routledge& Kegan Paul, London, 1975.

Rényi A. (1973): Ars Mathematica, Magvető Könyvkiadó, Budapest, 1973, 318.

Zoltayné Paprika Z. (2005): Döntéselmélet, Alinea Kiadó, Budapest, 2005, 524.

Wittmann, E. Ch. (1998): Standar Number Representations, In: *Journal für Didaktik der Mathematik*, 1998, 19(2-3), 149-178.

Szerző:

Debrenti Edith, PhD
egyetemi adjunktus
Partiumi Keresztény Egyetem Nagyvárad, Közgazdasági Kar (Partium Christian University Oradea, Faculty of Economic Sciences) Oradea str. Primariei nr. 36 Romania
edit.debrenti@gmail.com