Bolyai János kézirata a Sturm-tételről

Oláh-Gál Róbert

Babeş-Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár,
Csíkszeredai Főiskola[1]

Abstract

In the paper a manuscript is presented that proves János Bolyai's knowledge and comments on the theorem of Sturm.

Sturm tételét numerikus analízisben tanítják és arra szolgál, hogy vele megbecsüljük egy algebrai egyenlet gyökeinek számát. De ezt a tételt e sorok írója szimbolikus és numerikus számítások tantárgyban is elmondja, ugyanis nagyon hasznos algoritmika szempontjából is.

A gyökök szétválasztására középiskolában főleg Rolle tételét tanítják, mert könnyen átlátható és bizonyítható. Rolle tételében arról van szó, hogy egy algebrai egyenletből képzett polinom függvény gyökeit, a deriváltjának gyökei szétválasztják. Nos, ez igen hasznos ismeret, de nem használható a számítógépi matematikában. Ugyanis egy n-ed fokú algebrai egyenlet megoldását „rábízza” egy (*n-1*)-ed fokú algebrai egyenlet megoldására. Ha az n nagy, ezzel sokat nem nyertünk és nem jutottunk tovább a megoldásban. (Gondoljuk csak el, egy 100-ad fokú egyenlet megoldása helyett meg kell oldanunk egy 99-ed fokú algebrai egyenletet.)

Sokkal célravezetőbb az ún. Sturm-sorozat alkalmazása algebrai egyenletek valós gyökeinek szétválasztására. Noha ennek elméleti hátterét nehezebb és hosszadalmasabb bebizonyítani mint a Rolle sorozatét, számítógépi, de akár klasszikus kalkulus kiszámíthatóság szempontjából is célravezető. Vagyis egy jól algoritmizálható probléma. A háttérben az euklideszi-algoritmusra is támaszkodik, mégpedig annak polinomokra való alkalmazását használjuk fel. Így arra is kitűnő példa, hogy az euklideszi algoritmus, egy mai modern követelményeknek is eleget tevő, gyors és hatékony eszköz. (Az eratosztenészi szitával ellentétben, aminek mára csak elvi és történelmi jelentősége van. Mellesleg megemlítem, hogy Bolyai János ezt is ismerte és úgy nevezte, hogy eratosztenészi rosta).

Meghatározás

$P_0, P_1, \ldots, P_s$, $s \geq 1$ polinomok sorozatát [a, b] intervallumon Sturm sorozatnak nevezzük, ha eleget tesz a következő négy feltételnek:

I. P_0-nak csak egyszeres gyökei vannak az [a, b] intervallumon

II. $P_0(a).P_0(b) \neq 0$;

III. P_s nem tűnik el [a, b]intervallumon (előjeltartó az [a, b] intervallumon);

IV. Ha $P_k(r)=0$, akkor $P_{k-1}(r).P_{k+1}(r)<0$, $1 \leq k \leq s-1$.

Legegyszerűbben a következőképpen állíthatunk elő Sturm sorozatot: legyen egy valós együtthatós P polinom, amelynek csak egyszeres gyökei vannak. Legyen a és b két valós szám, melyek P-nek nem gyökei és a<b.

P_0 legyen P, és P_1 legyen P' (P polinom deriváltja).

Osszuk el P_0 -polinomot P_1 polinommal maradékos osztással:

$P_0(X) = P_1(X).Q_1(X) + R_1(X)$, és legyen $P_2(X) = -R_1(X)$.

Továbbá osszuk el maradékosan P_1-et, P_2-vel:

$P_1(X) = P_2(X).Q_2(X) + R_2(X)$, és legyen $P_3(X) = -R_2(X)$.

Általában, megkapjuk a $P_0, P_1, \ldots, P_k$, polinomok sorozatát és a P_{k+1}-et megkapjuk, ha P_{k-1}-et elosztjuk maradékosan P_k-val:

$P_{k-1}(X) = P_k(X).Q_k(X) + R_k(X)$, és legyen $P_{k+1}(X) = -R_k(X)$.

[1] Emai: olahgal@topnet.ro

Mivel a fenti eljárásban P_{k+1} foka < P_k foka, ezért előbb-utóbb maradéknak egy konstans polinomot kapunk:

$P_{s-2}(X) = P_{s-1}(X).Q_{s-1}(X) + R_{s-1}(X)$, és legyen $P_s(X) = -R_{s-1}(X)$, és így P_s állandó.

Ez az eljárás, eltekintve az előjel-váltogatásoktól, hatékonyan alkalmazható az euklideszi algoritmus P és P' polinomok legnagyobb közös osztójának meghatározására.

Sturm tétele

Ha $P_0, P_1, ..., P_s$, $s \geq 1$ polinomok sorozata [a, b] intervallumon Sturm sorozatot alkot, és $P_1 = P'_0$ és a, b nem gyökei a sorozat egyetlen elemének sem, akkor

[a, b] intervallumon P_0 valós gyökeinek száma egyenlő

$P_0(a), P_1(a), ..., P_s(a)$ és $P_0(b), P_1(b), ..., P_s(b)$ előjelváltások különbségével, vagyis

előjelváltás$(P_0(a), P_1(a), ..., P_s(a))$ - előjelváltás$(P_0(b), P_1(b), ..., P_s(b))$.

Most lássuk Bolyai János eredeti kéziratát. Jelölése, fogalmazása rendkívül modern:[2]

„Sturm tétele (melyek által is, minek is én más módját is már rég adtam) a' géber[3] egy(enle)tek +, - , sőt tehát al-utiás[4] gyökű száma 's nyíje[5] is, legalább eléggé vagy kívánt szigorral, meg-közelítődik. Legyen

$$f_0 x = \sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... a_{m-1} x^{m-1} + x^m;$$

$$f_1 x = D_x f_0 x$$

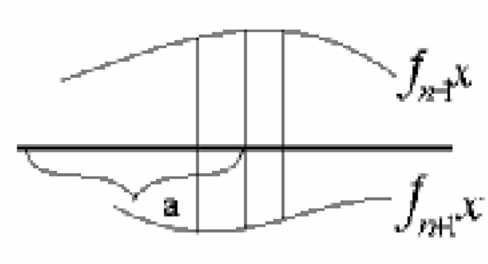
$$f_0 x = q_0 f_1 x - f_2 x;$$

$$f_1 x = q_1 f_2 x - f_3 x;$$

...

$$f_{m-2} x = q_{m-2} f_{m-1} - f_m x$$

$$f_{m-1} x = q_{m-1} f_m x$$



Hol bármely q_n az $f_n x$ -re osztási egész mértársa[6], vagy-is $f_{n+1} x$ géber egy-idomú[7] egész $f : x$ bármely következő $f_n x$ pedig legalább eggyel alsóbb rangú $f : x$, (sőt bármely két (mint – helyzés által meglátszik, kiviláglik) mint az előbbi $f_{n-1} x$. Itt már, ha valamely (két egymás után) $f_n x$, $f_{n+1} x$ -nek x -es közosztója van: könnyű látni: hogy ez osztó itt bármely fx -xel közös (mind föl- mind alá-felé) az $f_0 x$ és $f_1 x$ -et is ossza, 's hogy tehát $f_0 x$ -nek több(ször)ös vagy ismégyelt[8] gyökjei vannak; és, hogy tehát ha ez már nincs (-ha oly volt, megszabadítandott, ollyá levődött, úgy egymás után egy pár fx -nek sem lehet közosztója. Ha már valamelyik $f_n x$ -et=0, hol n>0: úgy nyilván (a'fölöbbi egy(enletek)ből) $f_{n-1} a = -f_{n+1} a$, tehát $f_{n-1} a, f_{n+1} a$ ellenesek vagy ellenjegyűők; de k (lehet) van oly kicsi: hogy itt $f_{n-1}(a-k), f_{n-1} a, f_{n-1}(a+k)$

$f_n(a-k), f_n a, f_n(a+k)$ az első sorbeliek egyenjegyűök, az utolsó sorba: $f_{n+1}(a-k), f_{n+1} a, f_{n+1}(a+k)$, levék, hasonlólag; de tovább ezen kitűnő, excelens, finom, éles, mely, ügyös, derék, gyönyörű" (egy jel a folytatáshoz, melyet nem kaptunk meg)

(Jelzete BJ 757/1 Teleki – téka [2])

Amint az olvasó is láthatja a mellékelt eredeti fénymásolaton, az ábra is Bolyai János munkája. Nagyon világosak Bolyai János gondolatai.

A fenti kéziratból jól kiolvasható, hogy Bolyai János nagyon jól ismerte Sturm tételét, sőt ahogy a bevezetőben írja, ő is adott egy Sturm tételével azonos megoldást. Vagyis Bolyai Jánost, ahogy ezt már Kiss Elemér professzor kimutatta [3] igen mélyen foglalkoztatta az algebrai egyenletek megoldhatósága. Látszik ebből az a körültekintő tudományos hozzáállás, amely minden alapos kutatót jellemez, a feladat minden oldalról való megközelítése. Ugyanis Sturm tétele arról szól, hogyan kell megbecsüljük egy algebrai egyenlet gyö-

---

[2] Bolyai János által használt szavak megfejtésénél felhasználtam Kiss Elemér könyvében található szótárt („Bolyai által használt műszavak és jelölések" 195-199 old.) [3]

[3] algebrai

[4] komplex

[5] nagysága, mennyisége

[6] hányados, „osztótárs"

[7] egy változós algebrai egyenlet

[8] többszörös gyök

keit. Vagyis milyen intervallumban találhatók az összes valós gyökök, majd ezeket válasszuk szét kis intervallumokra olyan formában, hogy egy kis intervallumban az algebrai egyenletnek egy és csakis egy gyöke legyen. Amint láttuk, erre ma is, számítógépes szempontból is, a legjobb módszer a Sturm-sorozat.

Bolyai János kézirata megszakad, illetve, lehet, hogy a további alapos kéziratkutatás kideríti, hogy a 14000 oldalon hol folytatódik(hat) Sturm tételének kommentálása. Bár úgy néz ki, csak egy kis felelevenítés volt, mert a gondolatsort János, a rá jellemző lelkesedéssel zárja. „Gyönyörű eszmének”, „nagyszerű gondolatsornak” tartja Sturm tételét. Ide is ráillik János sokat emlegetett vélekedése a matematikáról: „Hőn ‘s hősön szeretett tanom”.

Irodalom

[1] MTA Könyvtárának Kézirattára, Bolyai Gyűjtemény

[2] Teleki Téka, Bolyai Gyűjtemény

[3] Kiss Elemér: Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából, Akadémiai Kiadó és Typotex KFT., Budapest, 1999

[4] Móricz Ferenc: Numerikus analízis, I, II. JATE, Tankönyvkiadó, 1991.

[5] George-Daniel Mateescu, Ileana-Carmen Mateescu: Analiză numerică, Editura Petrion, 1995