

Egyszerű számítási módszer bolygók és kisbolygók  
pályájának meghatározására

A bolygók és kisbolygók pályájának analitikus meghatározása rendszerint több éves egyetemi előtanulmányokat igényel. Ennek oka az, hogy a gyakorlatban Laplace és Gauss precízen kidolgozott módszerét ismerik meg a hallgatók. Az irodalomban ismeretes azonban Kepler régi módszere is, amely középiskolai végzettséggel is könnyen kezelhető eljárás a pálya közelítőleg pontos meghatározására.

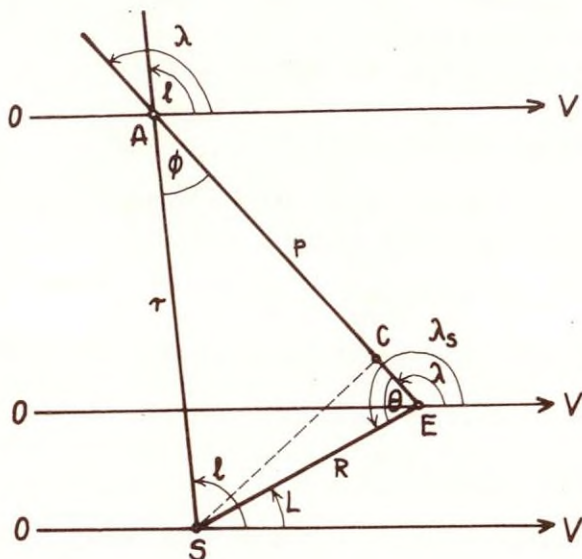
A következő módszer a rádiuszvektor meghatározására szolgál, amelyet két --időben közelálló-- észlelés segítségével számolhatunk ki. Számítási módszerünk eredményességéhez alapvetően fontos, hogy a két észlelés között a Föld-Nap és kisbolygó-Nap távolság, valamint a Földnek és a kisbolygónak pályamenti sebessége keveset változzon. Módszerünk tulajdonképpen a nem perturbált kéttest probléma leegyszerűsített esete.

Jelölések:

- $\alpha$  : a kisbolygó rektaszncenziója,
- $\delta$  : a kisbolygó deklinációja,
- $\lambda$  : a kisbolygó geocentrikus hosszúsága,
- $\ell$  : a kisbolygó heliocentrikus hosszúsága,
- $\lambda_s$  : a Nap geocentrikus hosszúsága,
- $L$  : a Föld heliocentrikus hosszúsága,
- $\beta$  : a kisbolygó geocentrikus szélessége,
- $r$  : a Nap-kisbolygó távolság /csill.egységben/,
- $\rho$  : a Föld-kisbolygó távolság                    "
- $R$  : a Föld-Nap távolság                            "
- $\epsilon$  : az ekliptika ferdesége,
- $M_p$  : a kisbolygó tömege,
- $M_e$  : a Föld tömege,
- $M$  : a Nap tömege

/ A hosszúságok és szélességek mind ekliptikai koordináták./

Jelöljük az 1. ábrán a Föld, a Nap és a kisbolygó pillanatnyi helyzetét E, S, A betűkkel. Húzzuk meg az AES háromszöget, valamint bocsássunk merőlegest az S pontból az EA oldalra. Húzzuk meg az A, E, S pontokon keresztül az O-V-vel jelölt párhuzamosokat, amelyek mutassanak a távasszpont irányába. Ekkor könnyen bejelölhetjük a jelöléseinknek megfelelő adatokat az ábrára.



1. ábra.

Az ábrán bejelölt  $\phi$  és  $\theta$  szögekre igaz:

$$\phi = \lambda - \epsilon \quad \text{ill.} \quad \theta = \lambda_s - \lambda$$

Az AES háromszögben írjuk fel a szinusztételt:

$$r \sin \phi = R \sin \theta$$

Vezessük be a következő jelölést:

$$R \sin \theta = C$$

Igy 
$$\phi = \arcsin C/r$$

Ha két észlelési adat van:  $\phi_1 = \arcsin C_1/r$  ill.

$$\phi_2 = \arcsin C_2/r$$

A kettő különbségét képezzük:

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \arcsin C_2/r - \arcsin C_1/r$$

Most kapott formulánkat később felhasználjuk.

Kiszemelt bolygónkat a gravitációs vonzóerő tartja pályáján.

Ez egyenlő a centripetális erővel:

$$\text{A bolygóra: } M_p V_p^2/r = G M_p M/r^2$$

$$\text{A Földre: } M_b V_e^2/R = G M_e M/R^2$$

Itt  $V_p$  és  $V_e$  a bolygó, ill. a Föld pillanatnyi sebessége.

Utóbbi két egyenletünkből kapjuk:

$$V_p^2 r = V_e^2 R$$

A következő formula az egyetlen, amelyet középiskolában nem tanítanak:

$$V_p^2 = r^2 \left( \frac{\Delta\ell}{\Delta t} \right)^2$$

$$\text{ill. a Földre: } V_e^2 = R^2 \left( \frac{\Delta L}{\Delta t} \right)^2$$

/Ennek helyességéről könnyen meggyőződhetünk./ Utóbbi két egyenletünket az előzőbe helyettesítjük:

$$r^3 = R^3 (\Delta L)^2 / (\Delta\ell)^2$$

Az 1. ábráról könnyen leolvasható, hogy  $\Delta L = \Delta\lambda_s$  valamint

$$\text{az első egyenletünkből: } \Delta\ell = \Delta\lambda - \Delta\phi$$

Ezeket helyettesítsük be  $r^3$  jobb oldalába:

$$r^3 = \frac{R^3 (\Delta\lambda_s)^2}{[\Delta\lambda - (\arcsin C_2/r - \arcsin C_1/r)]^2}$$

Ez az a végső egyenlet, amelyből az ismeretlen  $r$  paraméter meghatározható. Mielőtt az egyenlet megoldásának módszerét ismertetnénk, tekintsük át az egyenlet egyes tagjainak kiszámítását.

$\lambda_s$ -et az évkönyvek tartalmazzák, hasonlóképpen R is ugyanott megtalálható.  $\Delta\lambda$  a kisbolygó mozgásának vetülete az ekliptikára. Mivel az észlelések időpontjai egymáshoz közel állnak, valamint mivel a bolygók és kisbolygók pályái az ekliptika síkjával kis szöveget zárnak be  $\Delta\lambda$  nagyon jó közeli-téssel egyenlő a bolygó két helyzetének égbolton mért szögtávolságával. A  $C_1$ ,  $C_2$  együtthatók tartalmazzák a bolygó ekliptikai koordinátáit, így azokat számítással kell meghatározni, hiszen a megfigyelési eredményeket a csillagtérképpel összevetve csak az  $\alpha$  és  $\delta$  értékeket ismerjük.  $\beta$ -t és  $\lambda$ -t az ismert transzformációs egyenletek adják meg:

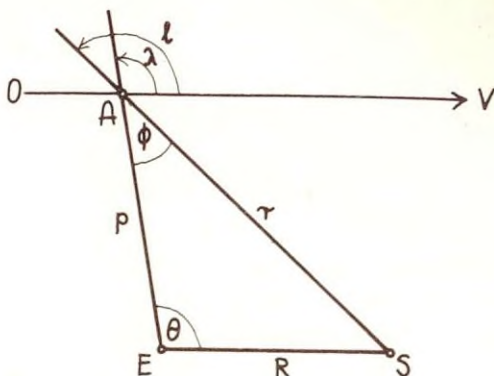
$$\begin{aligned}\sin \beta &= \sin \delta \cos \epsilon - \cos \delta \sin \epsilon \sin \alpha \\ \cos \lambda &= \cos \delta \cos \alpha / \cos \beta\end{aligned}$$

Előbb az első egyenletből  $\beta$  -t határozzuk meg, majd ezt a másodikba helyettesítve  $\lambda$  is könnyen kiadódik.  $\epsilon$  értékét itt pontosan megadjuk:

$$\epsilon_{1900} = 23^{\circ} 27' 8,26'' - 46,84 T$$

Az ismeretlen  $r$ -t tartalmazó egyenletet un. szukcesziv approximációval oldhatjuk meg a legegyszerűbben. Erre a célra nagyon előnyös egy olyan kézi számológép használata, amelyen a szükséges trigonometrikus függvények rendelkezésre állnak. A módszer lényege, hogy először  $r$ -re valamilyen észszerű feltevést teszünk. Legyen pl. 2 CS.E.. Ezt behelyettesítjük az összefüggés jobb oldalába és kiszámítjuk a tört értékét. Ebből köbgyököt vonva  $r$ -re egy új értéket kapunk, amely nem egyezik meg az előző 2 CS.E.-el, hanem attól eltérő, ez már egy pontosabb közelítés. Most az így kapott  $r$  értéket helyettesítjük a jobb oldalba, és így tovább. A számítást addig végezzük, amíg az újonnan kiszámolt  $r$  érték csak elegendően kevésbé tér el az előzőtől. A gyakorlatban néhány lépés után már kielégítő eredményre jutunk.

A továbbiakban pontositanunk kell egyenletünket, mivel a Föld-Nap-bolygó konfiguráció nem csak olyan lehet, mint ahogyan az 1. ábrán rajzoltuk.



2.ábra

Könnyen belátható, hogy a két esetet összevonva egyenletünk a következő alakba írható:

$$r^3 = \frac{R^3 (\Delta \lambda_3)^2}{[\Delta \lambda \pm (ae \sin e_2/r - ae \sin e_1/r)]^2}$$

ahol mínusz előjel van, ha az elrendeződés olyan mint az 1. ábrán és +, ha hasonló a 2. ábráéhoz. Ha már  $r$  értékét ismerjük,  $p$  értékét is meghatározhatjuk:

$$p_1 = r \cos \phi_1 \pm R \cos \theta_1$$

$$p_2 = r \cos \phi_2 \pm R \cos \theta_2$$

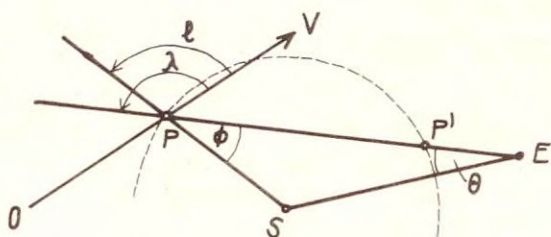
ahol az előjelek a fentieknek megfelelően értendők.

Célszerű még meghatározni a rádiusz vektor  $z$  komponensét is, amely megadja, hogy az illető bolygó milyen távolságra van az ekliptikától:

$$z_1 = p_1 \sin \beta_1$$

$$z_2 = p_2 \sin \beta_2$$

Még egy különleges esetet kell megvizsgálnunk, amikor az égitest "belső bolygó", ld. 3. ábra.



3. ábra

Ebben az esetben el kell döntenünk, hogy a bolygó a  $P$ , vagy a  $P'$  pontban van-e. Belátható, hogy ezt egyszerűen a következőképpen lehet megállapítani: Tudjuk  $\theta_1$  és  $\theta_2$  értékét. Ha  $\theta_1$  nagyobb mint  $\theta_2$ , akkor a kisbolygó a távolabbi  $P$  pontban, ha  $\theta_1$  kisebb mint  $\theta_2$ , akkor a kisbolygó a közelebbi  $P'$  pontban található.

#### A pályaelemek meghatározása

Ha elegendően sok megfigyelés áll rendelkezésünkre, megrajzolhatjuk a kisbolygó valódi pályáját is. Ha a pályaelemekre vagyunk kíváncsiak, térben kell ábrázolnunk a pályát. Ezt könnyen megtehetjük úgy, hogy egy sima deszkalapra rajzlapot fektetünk, és gombostűket helyezünk el a megfelelő naptávolságra. Olyan mélyen nyomjuk bele a tűt, hogy a kiálló darab a kiszámított  $z$  komponenssel legyen arányos. A tábla jelenti az ekliptika síkját, a gombostűk fejére illesztett sík pedig a kisbolygó pályasíkjának felel meg. A két sík hajlásszögét - a pályahajlást - így könnyen mérhetjük. A tavaszpont irányát kijelölve pedig megkaphatjuk a pálya egyéb paramétereit is. Az itt közölt táblázat egy effektíve elvégzett mérés sorozat eredményét mutatja a jól ismert Vesta kisbolygóra. Jól látható, hogy az A oszlopban található mérési eredmények csak kevéssé térnek el a B oszlop megfelelő pontos irodalmi értékeitől.

pályaelemek	jele	A	B	%
pályahajlás	i	7.10°	7.137°	5 %
a felszálló csomó hossza	$\Omega$	104.4°	103.63°	7
excentricitás	e	0.135	0.088	53
fél-nagy tengely	a	2.384	2.3619	9
apohélium távolság	Q	2.703	2.571	5
perihélium távolság	q	2.065	2.1528	4 %
a perihélium argumentuma	$\omega$	163°	148.932°	9
keringési periódus	P	3.68 év	3.63 év	1

+ /A cikk a csillagászati szakkörvezetők esztergomi találkozásán elhangzott előadás írásos anyaga./

Tóth László

. . .

#### PLEIONE 14.

Ezuttal sorravesszük az 1977-es év első felében maximumba ért hosszúperiódusú változókat, de a többi típus egy-egy jellegzetes képviselőjét is bemutatjuk. A feldolgozásokat félszabályos, eruptív és cepheida görbék teszik színe-  
sebbé.

Az 1977-es mira maximumok felsorolása előtt törlesztünk egy múlt évi adósságot: az "06év" utolsó fényes mira maximuma az R And-hoz fűződik. Előrejelzés szerint december 5-én átlagosan 6.9 mg-val kellett tetőznie. Közvetlenül a jelzett idő előtt, dec.3-án fénye 6.7 mg-nál volt - annyi tehát biztos, hogy a maximum fényesebb volt az átlagosnál, de pusztán a leszálló ág ismeretében nem lehet kellő biztonsággal kijelölni a fénygörbe csúcspontját.

Január 22-én az átlagos 6,5 mg-val ért maximumba az