

Kepler és a Mars

A bolygók mozgását tanulmányozó csillagászok az ókor óta mintegy másfél ezer évig hiába törték a fejüket, nem sikerült a Naprendszerrel olyan modellt alkotniuk, amelynek segítségével a bolygóhelyzeteket pontosan előre lehetett volna jelezni. Ennek talán a püthagoreus hagyomány volt a legfontosabb oka; eszerint ugyanis a bolygók pontosan gomb alakúak, és egyenletes körmozgással mozognak. A csillagászok elfogadták az egyenletes körmozgás követelményét, noha azt a megfigyelt mozgások korántsem támasztották alá, s legfolyjebb azon vitáztak, mi a körök középpontja: a Föld, a Nap vagy valamely más pont. Így volt ez még *Kopernikusz* világgképében is, aki eredetileg a Napot, majd később egy líktív, mozgó, a Naphoz elég közeli pontot tett meg középpontnak. De sem eredeti feltevése, sem ez az új, kompromisszumos ötlet nem tette lehetővé, hogy a bolygók pozícióit a régi ptolemaioszi táblázatoknál pontosabban előre kiszámítsák. *Kopernikusz* ezért nem is akarta kiadni a *De revolutionibus*-t, hiszen napközéppontú világgképe nem oldotta meg a régi csillagászati problémát.

Kopernikusz *Rheticus* (1514–1576) osztrák származású matematikus vette rá, hogy művét mégis engedje kinyomtatni. Ez a *Rheticus* maga is foglalkozott a Mars mozgásával, de nem sokra jutott. *Kepler* egy helyütt ezt írta róla: „Az atyáink idejében élt *Georg Joachim Rheticus*ről, *Kopernikusz* nagybíró tanítványáról... a következő történetet meséli: Amikor egy ízben belezavarodott a Mars pályájának számításába, és képtelen volt továbbhaladni, végső elkeseredésében őrangyalához folyamodott tanácsért. A gomba angyal megragadta *Rheticus* haját, és fejét többször a szoba mennyezetéhez verte, és nundamintyiszor hagyta, hogy a tudós a padlóra zuhanjon; a kezelés közben pedig ezt a kinyilatkoztatást tette: Íme a Mars mozgása! A szöbeszédnek éles nyelve van... Azt azonban könnyen elhiszi az ember, hogy *Rheticus* a munkában és a töprengésben megrekedve, haragjában maga verte a falba a fejét.”

Johannes Kepler (1571–1630) fiatal kora óta foglalkozott a bolygópályák kérdésével. A kopernikuszi világgképből indult ki, vagyis a bolygópályákat a Nap körüli köröknek gondolta. A heliocentrikus világgkép még korántsem volt kétséget kizáróan bizonyítva, de mellette szót néhány megfigyelés; így pl. hogy a Mars (de a többi bolygó is) erősen változtatja látszó fényességét. Ezt leggyorsrúbben úgy lehetett magyarázni, hogy változik a bolygó távolsága a Földtől. A változást a geocentrikus világgkép lényegében nem tudta értelmezni, a heliocentrikus elképzelés alapján viszont természetesen következik.

Arra a kérdésre, hogy miért épp akkorák a pályasugarak amekkorák, és miért éppen hat bolygó van, *Kepler* egy meglehetősen fantasztikus ötlet alapján próbált felelni. Föltette, hogy a hat bolygó pályasugarának megfelelő méretű gömbhőjak közé éppén befér az öt szabályos test (a Merkúr és a Vénusz közé



Johannes Kepler (1571–1630)

oktaéder, a Vénusz és a Föld közé ikozaéder, aztán dodekaéder, tetraéder és végül kocka). Ezt az elképzelést a *Mysterium Cosmographicum*-ban közölte. Maga is rájött azonban, hogy az így kapott pályasugarak nem egyeznek a bolygók megfigyelt pályadataival, és az eltérést mindenféle mesterkedéssel igyekezett eltüntetni. Könyve azonban tartalmaz egy sokkal érdekesebb ötletet is: a bolygókat a Naphól kisugárzó valamiféle erő tartja meg pályájukon, és ez a hatás a Naptól mért távolsággal csökken. A tudomány történetében talán ez volt a gravitációs törvény első megsejtése. (Kepler később még közelebb jut az általános gravitáció felismeréséhez, de a legutolsó lépést már nem tudja megtenni, az Newtonra marad.)

Kepler kiváló matematikus volt, sokat foglalkozott pl. a kúpszeletekkel; az analízis egyik úttörőjeként terület- és térfogatszámítási feladatokat is tanulmányozott. Ebben nem törekedett teljes matematikai precizitásra, inkább Arkhimédész gondolatmenetének gyökerei érdekelték. Munkájának egy fontos eredménye volt a soroshordók legcélszerűbb alakjának meghatározása (1615); egy másik a II. Kepler-törvény (1609).

A bolygópályákra vonatkozó elméletének továbbfejlesztésére, illetve új elmélet kidolgozására mindaddig nem volt mód, amíg nem álltak rendelkezésére pontosabb adatok a bolygók észlelt pozícióiról. Ezekhez akkor jutott hozzá, amikor *Tycho Brahe* (1546–1601) meghívására 1601-ben Prágába költözött és Tycho egyik segédje lett. Tycho ugyanis akkor már hosszú évtizedek óta végezte igen pontos bolygó-észleléseit, mert felismerte, hogy ezek nélkül nem lehet a bolygóprobléma megoldásához közelebb jutni.

Tycho azonban nem volt kopernikánus, sőt megvetette a lengyel kanonokot, mivel az „csupán” elméleti kutató volt, észleléseket alig végzett. Tycho felelevenítette egy régi görög pithagoreus csillagász, Héraclidész elméletét, amely szerint a világ közepe a Föld, körülötte kering a Nap és a Hold; a bolygók viszont a Nap körül keringenek.

Alig érkezett meg Kepler Prágába, a két csillagász összeveszett. Természetük olyanra különböző volt, hogy együttműködésükre alig volt remény. Tycho azonban tél év múlva meghalt, a Rudolf-császár Keplert nevezte ki utódjául. Tycho örökosei ugyan számtalan nehézséget támasztottak, de végül Keplernek sikerült megszereznie Tycho legfontosabb hagyatékát, az annyira áhított adatokat.

Kepler megérkezésekor Tycho és egyik kedvence munkatársa, *Longomontanus* (1564–1647) már rég bajlódott a Mars pályájának vizsgálatával, de sehogyan sem boldogultak vele. Kepler magabiztosan fogadást kötött, hogy ha rá bízzák a Marsot, nyolc nap alatt megoldja a problémát. Így hát Longomontanus a Holddal kezdett foglalkozni, Kepler pedig nekiláthatott a Marspálya meghatározásának. A fogadást elvesztette ugyan, mégis szerencséje volt, hiszen az akkor ismert bolygók közül a Mars pályája teret el legjobban a körtől (hiszen a kutatók mindaddig épp ezért nem tudtak vele mit



A bolygópályák távolságairányát szemléltető nevezetes ábra a *Mysterium cosmographicum*-ból

kezdeni), tehát az eltérés kimutatása és tanulmányozása a bolygó esetén volt viszonylag a legegyszerűbb. Így is több évre munkát adott Keplernek, de a csillagász végül győzedelmeskedett. Munkáját egy levelében a görög mondabéli hős, Hérahklész egyik feladatához, Augiász istállójának kitakarításához hasonlította.

Kepler is úgy fogott hozzá a feladathoz, mint eddig mindenki más: megpróbálta az észlelt adatokat összeegyeztetni a feltevésével, hogy a bolygó körpályán kering. Így azonban nem jutott eredményre ő sem, tehát megállapította: új utat kell keresnie. Elődeitől eltérően Kepler mindjárt a jelenségek okain, magyarázatán is gondolkodott, ami pedig új, mai fogalmaink szerint fizikai jellegű megfontolásukhoz vezetett; végső soron ez tette lehetővé a sikert.

Először is bebizonyította, hogy a bolygó pályasíkja áthalad a Napon, és az ekliptikával mintegy $1^{\circ}50'$ szöget zár be. A napközéppontú körpálya helyett, még mindig elődei nyomán haladva, föltelepte, hogy a körpálya geometriai középpontján kívül van egy pont (az ekváns), ahonnan nézve a Mars mozgása egyenletesnek látszik, és egy másik pont ugyanazon átmérő mentén, amelyben a Nap helyezkedik el. Azért van szükség az ekvánsra – érvelt –, mert a Nap nem a pálya középpontjában áll, s mivel a Naptól ered a bolygót mozgató hatás, ennek erősebben kell érvényesülnie, amikor a bolygó napközvetben van. Mozgása tehát nem egyenletes, ha a pálya középpontjából nézzük. Következően lépésben ezt a két feltételezett pontot határozta meg a Tycho-tól örökölt adatok felhasználásával. Olyan pozícióadatokból indult ki, amelyek a Mars oppozícióira vonatkoztak. Öt évi munkával sikerült a célt elérnie, közben néhány lényeges számítási hibát is elkövetve, melyek azonban szerencsére lényegében kompenzálták egymást. Kiszámította a marspálya sugarát és az említett két pont helyét, ezek alapján az észlelt és a számított oppozíciók mintegy két szögperccel tértek el csupán. Az oppozíciókon kívüli helyzetekre azonban nem kapott helyes eredményeket, s a modell változtatásával a legjobb esetben is még mindig nyolc tized másodperc hiba lépett föl. Tycho pontos megfigyeléseihöz képest ez a hiba megengedhetetlen, a rendszer tehát hibás – állapította meg Kepler.

Megvizsgálva a bolygó sebességének változását, fölismerte a területi sebesség állandóságának elvét (ma impulzusmomentum-megmaradás néven ismerjük) a Mars mozgása esetére. Ez lett a II. Kepler-törvény. Sokkal nehezebb volt a pálya alakjának meghatározása. Tulajdonképpen nem is lett volna olyan nehéz, de Kepler, mint minden kortársa, annyira a régi, misztikával és irracionális elemekkel átszőtt világképben tanult meg gondolkodni, hogy az egyre világosabban kirajzolódó evidencia ellenére sem volt képes felismerni az ellipszist. Mindentféle furcsa görbét próbált ki, például a perihéliumban hegyesebb, aphéliumban laposabb tojás alakút; de természetesen nem volt képes ezeket a megfigyelt adatokhoz illeszteni. Többször is eljutott az ellipszishez, míg végre, egy hirtelen (matematikai jellegű) fölismérés nyomán rádőbbsent a megoldásra. Kájött, hogy a pályagörbe ellipszis!

A pálya megszerkesztését egy rá jellemzően zseniális ötlet alapján végezte el. Először is szüksége volt a Mars sziderikus keringési idejére, amit akkoriban még nem ismertek, mivel az a Nap körül keringő Föld mozgása miatt közvetlenül nem mérhető. Tycho megfigyeléseiből azonban pontosan kiderült a bolygó szinodikus keringési ideje: két oppozíció közt kb. 780 nap telik el.

Ismerve mármost a Föld sziderikus és a Mars szinodikus keringési idejét, könnyen ki lehet számítani a Mars sziderikus keringési idejét is. Tekintsük ugyanis ismét a bolygók mozgását egyenletes körmozgásnak! Képzeljük el, hogy éppen oppozícióban

van egy külső bolygó, pl. a Mars! Legyen a Föld keringésének szögsebessége $\omega_1 = 2\pi / T_1$, ahol $T_1 = 1$ év; legyen a külső bolygó keringésének szögsebessége $\omega_2 = 2\pi / T_2$, és itt T_2 a külső bolygó keresett sziderikus keringési ideje. Tudjuk az elemi fizikából, hogy a vezérsugár szögelfordulása t idő alatt $\varphi = \omega t$, és keringés közben a Föld gyorsabban halad a külső bolygónál, tehát akkor következik be ismét az oppozíció, amikor a Föld egyszer „lekörözi” a külső bolygót, azaz amikor egy körrel többet futott be, mint amaz. A két bolygó vezérsugara által megtett szögelfordulás különbsége tehát $\omega_1 t - \omega_2 t = 2\pi$. Beírva ebbe az ω_1 és ω_2 definícióját, majd 2π -vel elosztva az egyenletet, kapjuk: $1 / T_1 - 1 / T_2 = 1 / t$.

Ebbe az ismert T_1 és t értéket beírva ki tudjuk számítani a keresett T_2 -t. Esetünkben (két tizedes pontossággal számolva) $T_1 = 365,24$ nap, $t = 779,86$ nap; ezekkel $T_2 = 686,98$ nap, azaz ennyi a Mars sziderikus keringési ideje.

A Mars tehát kb. 687 nap elteltével pályája ugyanazon pontjára jut vissza, a Föld azonban nem. Ezért a Földről a bolygó a két időpontban nem ugyanazon csillagok irányában látható, bár a térben ugyanott van. Papíron meg tudjuk szerkeszteni mindkét időpontra a bolygó látóirányát; s a két felegyenes metszéspontja megadja a bolygó valódi térbeli helyzetét. Ez volt az a zseniális ötlet, amely Keplert képessé tette a marspálya megszerkesztésére. Tycho mért adatai közül sok olyan párt lehetett kiválasztani, amelyek 687 napnyi különbséggel készültek. Minden ilyen pár megadott egy-egy pontot a pályán, amely így szépen kirajzolódott a papíron. Miután, lapultságának egy bizonyos mértéke alapján, fölismerte a görbét, Keplernek már csak meg kellett fogalmaznia a törvényt: a Mars pályája ellipszis, melynek egyik gyújtópontjában áll a Nap. S ha a Mars pályája ellipszis, feltehetőleg a többi bolygóé is az!

Az első két törvényt Kepler az 1609-ben megjelent *Astronomia nova* c. könyvében közölte, amelyben módszert is adott a bolygóhelyzetek előre megadására. Ugyanitt az égémechanikában ma is használatos ún. Kepler egyenletet is leírta.

További évtizedes munkával számos matematikai összefüggést talált a Naprendszer tagjainak mozgásában. Ezek egy része véletlen, más részét ma rezonanciaeffektusként ismerjük, megint mások a gravitációs törvény következményei. Vannak köztük mai szemmel nézve eléggé furcsák is, mint pl. a bolygók „dallamai”, amelyek szerinte a püthagoreusok által „szférák zenéjé”-nek nevezett állítólagos harmóniáknak felelnek meg, és amelyeket Kepler gondosan leköttázott. Mindezt az 1619-ben kiadott *Harmonices mundi*ban találhatjuk meg. A kötetben a legfontosabb eredményt Newton találta meg, ezt ma III. Kepler-törvény néven ismerjük: a bolygók keringési idejének négyzete úgy aránylik egymáshoz, mint pályaelepszisük fél nagytengelyének köbé. Az összefüggés nemcsak a Naprendszer bolygóira, hanem bármely közös gravitációs vonzócentrum körül keringő testek rendszerére is igaz.

Ez a törvény, akárcsak az első kettő, Keplernél egyszerű tapasztalati törvény, indoklás nélkül. Az indoklást majd Newton adja meg, levezetve mindhármát a mechanika alaptörvényeiből és a gravitációs törvényből. Sőt Newton e törvényeket általánosítja is; munkája nyomán ma nemcsak a Naprendszer, hanem pl. a kettőscsillagok vizsgálata során is használjuk őket (gondoljunk pl. az ún. dinamikus parallaxismeghatározásra!).

Keplert ezek a felfedezései a tudománytörténet legnagyobbjai közé emelik. Rajta kívül talán csak Einstein volt képes arra, hogy fölismerve saját világgépének hibás voltát, túllépve rajta, új, korát messze megelőzően modern világgépet dolgozzon ki.

CSABA GYÖRGY GÁBOR