A FOGASKEREKES HAJTÓMŰVEK FOKOZATSZÁMÁNAK MEGHATÁROZÁSA

DEFINITION THE NUMBER OF STAGES BY GEAR UNITS

*Dr. Stampfer Mihály**

ABSTRACT

In the early stage of designing gear units, one must make a decision about the number of stages of the wanted speed ratio. The literature gives experience-based recommendation about this problem. In this paper a new method for definition is presented where the number of stages are determined by the basis of two aspects: (1) by the minimal requested volume of the gear units, (2) by the minimal moment of inertia of the gear units.

BEVEZETÉS

A hajtóműtervezés korai szakaszában dönteni kell abban a kérdésben, hogy egy kívánt áttételt hány fokozattal (egy, kettő stb.). valósítsunk meg. A probléma megoldására az irodalomban tapasztalatokon alapuló javaslatok találhatók. Ebben a cikkben olyan matematikai összefüggéseket mutatok be, amelyek alapján megállapítható az egy fokozatban megvalósítható áttétel optimális értéke két célfüggvény esetére: (1) a hajtómű legkisebb helyigénye, (2) a hajtómű legkisebb tehetetlenségi nyomatéka.

1. A FOGASKERÉKPÁR FŐMÉRETEI

Egy fogaskerépár főméretei a tengelytáv (a_w) és a fogaskerekek szélessége (b) *(1. ábra)*. E két méret határozza meg a kerékpár helyigényét [1]. További fontos paraméterek még a modul (m) és a fogszámok (z_1, z_2).

A felsorolt paramétereket a fogaskerékpár előtervezésekor ill. méretezésekor kell meghatározni.

A tengelytávot a fogfelületen jelentkező Herzfeszültség alapján határozzuk meg:

$$a_w \geq \sqrt[3]{\frac{250 \cdot T_1}{\xi \cdot \sigma_{HP}^2} \frac{(u+1)^4}{u} \cdot Z^2 \cdot K_H} \qquad (1)$$

Ahol:

T_1 forgatónyomaték a kiskeréken

$\sigma_{HP} = \dfrac{\sigma_{H\lim} \cdot Z_{NT}}{S_{H\min}}$ a megengedett Hertz-feszültség

$\sigma_{H\lim}$ a Hertz-feszültség határértéke

Z_{NT} élettartamtényező,

S_{Hmin} biztonsági tényező. Értéke 1,2 és 1,8 (2) között vehető fel.

$Z = Z_E Z_H Z_\varepsilon Z_B Z_\beta$ összesített fogfelületi tényező

Z_E rugalmassági tényező.

Z_H gördülőkör-tényező,

Z_ε kapcsolószám-tényező.

Z_B egyfogpár-kapcsolódási tényező. Előtervezésnél az értéke 1,2– 1,3.

$Z_\beta = \sqrt{\cos\beta}$ fogferdeség-tényező.

$K_H = K_A K_v K_{H\beta} K_{H\alpha}$ összesített terhelés-tényező,

K_A üzemtényező,

K_v dinamikus tényező, előtervezésnél értéke 1,5 és 2 között választható,

$K_{H\beta}$ fogszélesség menti terheléseloszlás-tényező,

$K_{H\alpha}$ homlok terheléseloszlás-tényező felületi teherbírásra,

$\xi = \dfrac{b}{d_{w1}}$ a fogszélesség-tényező. Kétoldalt csapágyazott kerékre 0,9…1,2 közötti értékre vehetjük föl, konzolosan ágyazott kerékre pedig legfeljebb 0,7-re.

b a fogaskerekek szélessége

d_{w1} a kiskerék gördülőkör átmérője.

u a szükséges fogszám-viszonya

Az a_w meghatározása után a szükséges fogszélesség:

$$b = \xi \cdot d_{w1} = \frac{2\xi \cdot a_w}{u' + 1}. \qquad (2)$$

A modul értékét a fogtőfeszültség alapján határozzuk meg: $m_n \geq \dfrac{2000 \cdot T_1}{b \cdot d_{w1} \cdot \sigma_{FP}} \cdot Y \cdot K_F$.

Ahol: $\sigma_{FP} = \dfrac{\sigma_{F\lim} \cdot Y_{NT}}{S_{F\min}}$

a megengedett fogtőfeszültség,

$\sigma_{F\lim}$ a fogtőfeszültség határértéke,

Y_{NT} élettartam tényező,

*Pécsi Tudományegyetem, Pollack Mihály Műszaki Kar, egyetemi docens

S_{Fmin} biztonsági tényező. Értéke 1,6 és 2 között vehető fel.

$Y = Y_{Fa}Y_{Sa}Y_{\varepsilon}Y_{\beta}$ összesített fogtő-tényező

Y_{Fa} a fogalaktényező. Előtervezésnél 2,3-ra vehető.

Y_{Sa} a feszültségkoncentrációs tényező. Előtervezésnél 1,5 és 1,7 között vehető fel.

Y_{ε} a kapcsolószám-tényező. Előtervezésnél 0,7-re vehető fel,

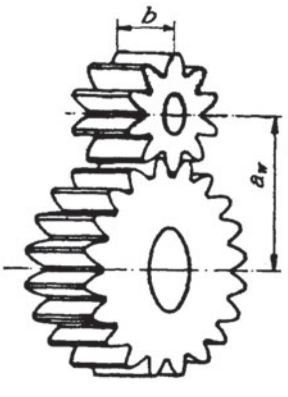
Y_{β} a fogferdeségi tényező,

$K_F = K_A K_v K_{F\beta} K_{F\alpha}$ összesített terhelés-tényező a fogtőre nézve

K_A és a K_v értéke megegyezik a tengelytáv meghatározásnál már felvett értékekkel.

$K_{F\beta}$ fogszélesség menti terheléseloszlás-tényező fogtő teherbírásra. E tényező értéke kisebb, mint a $K_{H\beta}$ értéke. Előtervezésnél vehetjük azonos vagy valamivel kisebb értékűre.

$K_{F\alpha} = K_{H\alpha}$ homlok terheléseloszlás-tényező fogtő teherbírásra.



1. ábra. A fogaskerékpár főméretei

A szükséges fogszámösszeg kiszámításánál feltételezzük, hogy $\alpha_{wt} \cong \alpha_t$

$$\Sigma z = \frac{2a_w \cdot \cos\beta}{m_n} \cdot \frac{\cos\alpha_{wt}}{\cos\alpha_t}$$

A két kerék fogszáma $z_1 = \dfrac{\Sigma z}{u+1}$ $\quad z_2 = \Sigma z - z_1$

Mindkét fogszámot a legközelebbi egész számra kell kerekíteni.

2. A FOKOZATSZÁM MEGHATÁROZÁSA A HAJTÓMŰ LEGKISEBB HELYIGÉNYE SZERINT

A fogazat helyes kapcsolódását az áttétel nem korlátozza, így az egy fokozatban megvalósítható legnagyobb áttételnek a fogaskerékpár helyigénye szab határt. A hajtómű méreteivel általában egyenesen arányos a hajtómű tömege- és a gyártási költsége is. Az egy fokozatban megvalósítható legnagyobb áttétel értékére az irodalomban tapasztalatokon alapuló javaslatok találhatók. Ezek értéke 8 (10) [4], 6 (8) [2], 6 (8) [6]. Ebben a fejezetben matematikai összefüggést mutatok be, amely alapján megállapítható az egy fokozatban megvalósítható áttétel optimális értéke a hajtómű helyigénye szempontjából.

2.1 A HAJTÓMŰHÁZ SZÜKSÉGES TÉRFOGATA

2.1.1 A térfogatigény egy fogaskerékpár esetére

Egy fogaskerékpár helyigényét egy olyan téglatesttel határozhatjuk meg, amelybe a kerékpár *belehelyezhető (1. ábra):* $V_{12} = b_{12} \cdot 2a_w \cdot d_{w2}$.

Ahol: $d_{w2} = u \cdot d_{w1} = 2a_w \dfrac{u}{u+1}$, $d_{w1} = 2a_w \dfrac{1}{u+1}$.

és ezzel a térfogat kifejezése: $V_{12} = 4 \cdot b_{12} \cdot a_w^2 \cdot \dfrac{u}{u+1}$.

A fenti kifejezésből látható, hogy a szükséges térfogat elsősorban a tengelytáv függvénye. Ha megvizsgáljuk az 1.1 fejezetben ismertetett tengelytáv-képletet, megállapítható, hogy a tengelytáv értékét a terhelés, az áttétel, a kerekek anyagának szilárdsági jellemzői, az összesített fogfelületi tényező és az összesített terhelés-tényező befolyásolják. Tekintettel arra, hogy az elemzésünk célja az optimális fokozatszám meghatározása, a tengelytáv felírható a következő formában:

$$a_w \geq \sqrt[3]{\frac{250 \cdot T_1}{\xi \cdot \sigma_{HP}^2} \frac{(u+1)^4}{u} \cdot Z^2 \cdot K_H} \qquad a_w = C \cdot \sqrt[3]{T_1 \frac{(u+1)^4}{u}} \quad (4)$$

Ahol:

$C = \sqrt[3]{\dfrac{250}{\xi \cdot \sigma_{HP}^2} \cdot Z^2 \cdot K_H}$, adott esetben állandónak tekinthető.

Ezzel az egyszerűsítéssel élve, a fogaskerékpár térfogatigénye: $V_{12} = 4 \cdot b_{12} \cdot C^2 \cdot \left(T_1 \dfrac{(u+1)^4}{u} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \dfrac{u}{u+1}$

$$V_{12} = 4C^2 \cdot T_1^{\frac{2}{3}} \cdot b_{12}(u+1)^{\frac{5}{3}} \cdot u^{\frac{1}{3}} = V_{h1} \quad (5)$$

Ez egyben az egyfokozatú hajtómű térfogatigényének (V_{h1}) felel meg.

2.1.2 A kétfokozatú hajtómű térfogatigénye

A kétfokozatú hajtóművek esetén megkülönböztetünk párhuzamos- és koaxiális tengelyelrendezésű hajtómű kialakítást. A koaxiális elrendezés kompaktabb hajtóművet eredményez, ezért az elemzés erre a típusra vonatkozik. A kétfokozatú hajtóműbe két pár kereket kell beépíteni, így a helyigény felírható mint:

$$V_{h2} = V_{12} + V_{34} \qquad V_{12} = 4 \cdot b_{12} \cdot a_{w1}^2 \cdot \frac{u_1}{u_1+1},$$

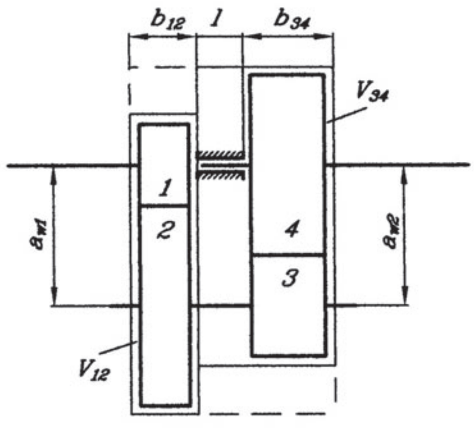
$$V_{34} = 4 \cdot (b_{34} + l) \cdot a_{w2}^2 \cdot \frac{u_2}{u_2+1}$$

ahol: l a csapágyazás szélessége *(2. ábra)*

a_{w1}, a_{w2} az első- ill. második fokozat tengelytávolsága

b_{12}, b_{34} az első- ill. második fokozat kerékszélessége

u_1, u_2 az első- ill. második fokozat áttétele.



2. ábra. A kétfokozatú koaxiális elrendezésű hajtómű vázlata

A 2.ábrán látható elrendezés szerint a hajtómű térfogata akkor legkisebb, ha a tengelytávok megegyeznek:

$$a_{w1} = a_{w2} \,.$$

Ebben az esetben a kétfokozatú hajtómű térfogata:

$$V_{h2} = 4 \cdot b_{12} \cdot a_{w1}^2 \cdot \frac{u_1}{u_1+1} + 4 \cdot (b_{34}+l) \cdot a_{w1}^2 \cdot \frac{u_2}{u_2+1}$$

$$V_{h2} = 4 \cdot a_{w1}^2 \left[b_{12} \cdot \frac{u_1}{u_1+1} + (b_{34}+l) \cdot \frac{u_2}{u_2+1} \right] \qquad (6)$$

2.1.2.1 A fokozatok áttétele

A hajtómű áttétele megegyezik a kerékpárok áttételeinek szorzatával:

$$u = u_1 \cdot u_2 \,. \qquad (7)$$

A hármas kerék forgatónyomatéka:

$$T_3 = u_1 \cdot T_1 \,. \qquad (8)$$

A tengelytávok:

$$a_{w1} \geq C \cdot \sqrt[3]{T_1 \frac{(u_1+1)^4}{u_1}} \,,$$

$$a_{w2} \geq C \cdot \sqrt[3]{T_1 \cdot u_1 \frac{(u_2+1)^4}{u_2}}$$

Az $a_{w1} = a_{w2}$ feltételből írható fel a következő összefüggés:

$$\frac{(u_1+1)^4}{u_1} = u_1 \frac{(u_2+1)^4}{u_2} \qquad (9)$$

A fenti kifejezés (9) segítségével összefüggés állapítható meg az első és a második kerékpár áttételei között.

illetve $\dfrac{(u_1+1)^4}{u_1^2} = \dfrac{(u_2+1)^4}{u_2}$ $\quad \dfrac{(u_1+1)^2}{u_1} = \dfrac{(u_2+1)^2}{\sqrt{u_2}}$,

$u_1 + \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{(u_2+1)^2}{\sqrt{u_2}} - 2$, ha a $\dfrac{(u_2+1)^2}{\sqrt{u_2}} - 2 = z$ jelölést alkalmazzuk, a fenti egyenlet a következő formában írható fel:

$$u_1^2 - z \cdot u_1 + 1 = 0$$

A másodfokú egyenlet gyökei:

$$(u_1)_{1,2} = \frac{z \pm \sqrt{z^2-4}}{2} = \frac{z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1}$$

Mivel u_1 értéke egynél nagyobb, az első gyökértéket fogadjuk el és így

$$u_1 = \frac{z}{2} + \sqrt{\left(\frac{z}{2}\right)^2 - 1} \,, \qquad z = \frac{(u_2+1)^2}{\sqrt{u_2}} - 2 \,.$$

Ezzel megkaptuk az u_1 és u_2 közötti összefüggést függvény alakjában, amelynek grafikus ábrázolása a *3. ábrán* látható. A görbe az $u_2 = 2{,}5 \ldots 4$ tartományban egyenes vonallal helyettesíthető, amelyet a következő formában írhatunk fel:

$$u_1 \approx 2u_2 \qquad (10)$$

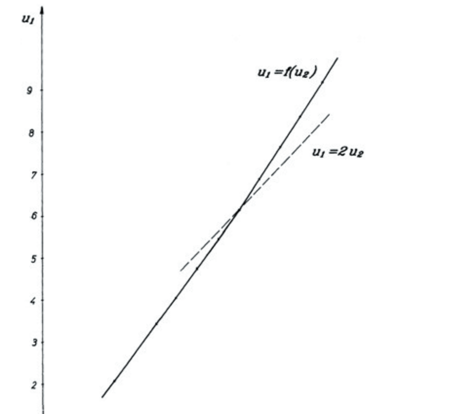
Az ebből adódó hiba nem haladja meg a három százalékot.

Ha ezt az összefüggést behelyettesítjük a hajtómű áttételének képletébe, úgy az egyes fokozatok áttételét kifejezhetjük a hajtómű áttételével:

$$u = u_1 \cdot u_2 = 2u_2 \cdot u_2 = 2 \cdot u_2^2$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{u}{2}} = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{2}} = 0{,}71\sqrt{u} \qquad (11)$$

$$u_1 = 2 \cdot u_2 = 2 \cdot \sqrt{\frac{u}{2}} = \sqrt{2u} = 1{,}42 \cdot \sqrt{u} \qquad (12)$$



3. ábra. Az u_1 függvény grafikus ábrázolása

2.1.2.2 A kerékszélesség az első és a második fokozatnál

A kerekek szélessége meghatározható a (2) összefüggés szerint:

$$b_{12} = \frac{2\xi_1 \cdot a_{w1}}{u_1 + 1}, \qquad b_{34} = \frac{2\xi_2 \cdot a_{w2}}{u_2 + 1}$$

Ha feltételezzük, hogy $\xi_1 \cong \xi_2$, és $a_{w1} = a_{w2}$, valamint figyelembe vesszük a (10) és (12) egyenleteket, akkor a két kerékszélesség között az alábbi összefüggés írható fel:

$$b_{34} = b_{12} \cdot \frac{2\sqrt{u} + \sqrt{2}}{\sqrt{u} + \sqrt{2}} \qquad (13)$$

2.1.2.3 A térfogatigény függvénye

Meglévő hajtóművek elemzése alapján, a csapágyazás szélessége megközelítően az első fokozat kerékszélességével megegyezik: $l \approx b_{12}$

Ezt feltételezve, valamint figyelembe véve a kerekek szélességére és a fokozatok áttételeire felírt összefüggéseket, a kétfokozatú hajtómű térfogatigényére a következő összefüggés írható fel:

$$V_{h2} = 4 \cdot a_{w1}^2 \left[b_{12} \cdot \frac{u_1}{u_1 + 1} + \left(b_{12} \cdot \frac{2\sqrt{u} + \sqrt{2}}{\sqrt{u} + \sqrt{2}} + b_{12} \right) \cdot \frac{u_2}{u_2 + 1} \right]$$

$$V_{h2} = 4 \cdot a_{w1}^2 \cdot b_{12} \left[\frac{\sqrt{2u}}{\sqrt{2u} + 1} + \frac{3u + 2\sqrt{2u}}{\left(\sqrt{u} + \sqrt{2}\right)^2} \right],$$

$$a_{w1}^2 = C^2 \cdot T_1^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{\left(\sqrt{2u} + 1\right)^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{2u}}$$

$$V_{h2} = 4 b_{12} \cdot C^2 \cdot T_1^{\frac{2}{3}} \frac{\left(\sqrt{2u} + 1\right)^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{2u}} \left[\frac{\sqrt{2u}}{\sqrt{2u} + 1} + \frac{3u + 2\sqrt{2u}}{\left(\sqrt{u} + \sqrt{2}\right)^2} \right] \qquad (14)$$

2.2 AZ OPTIMÁLIS FOKOZATSZÁM MEGHATÁROZÁSA A HELYIGÉNY SZEMPONTJÁBÓL

Az egyfokozatú- és a kétfokozatú hajtómű helyigényeinek összehasonlításával meghatározhatók az áttétel tartományok, amelyekben előnyösebb egy- ill. kétfokozatú hajtómű alkalmazása. Az (5) és (14) egyenletek felhasználásával a kétfokozatú és egyfokozatú hajtóművek helyigényének hányadosa a (15) egyenlettel fejezhető ki:

$$\frac{V_{h2}}{V_{h1}} = \frac{\frac{\left(\sqrt{2u} + 1\right)^{\frac{8}{3}}}{\sqrt[3]{2u}} \left[\frac{\sqrt{2u}}{\sqrt{2u} + 1} + \left(\frac{3u + 2\sqrt{2u}}{\left(\sqrt{u} + \sqrt{2}\right)^2} \right) \right]}{\left(u + 1\right)^{\frac{5}{3}} \cdot u^{\frac{1}{3}}} \qquad (15)$$

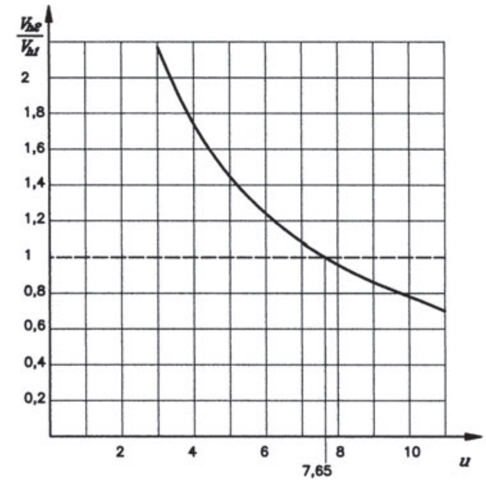
A fenti kifejezés értékének elemzésével döntés hozható a tekintetben, hogy egy vagy kétfokozatú hajtóművet célszerű tervezni, a következők szerint:

$\frac{V_{h2}}{V_{h1}} > 1$ kedvezőbb az egyfokozatú kivitel

$\frac{V_{h2}}{V_{h1}} < 1$ kedvezőbb a kétfokozatú kivitel

$\frac{V_{h2}}{V_{h1}} = 1$ határeset, amikor mindkét esetre azonos a térfogatigény

A térfogatigények viszonyát az áttétel függvényében a *4. ábra* mutatja.



4. ábra. A térfogatigények viszonya

Az elvégzett elemzés alapján megállapítható, hogy u>8 esetén kétfokozatú hajtómű kialakítása célszerű, ill. u<8 esetén egyfokozatú hajtómű kialakítása kedvezőbb.

3. A FOKOZATSZÁM MEGHATÁROZÁSA A HAJTÓMŰ LEGKISEBB TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKA SZERINT

Fogaskerekes hajtóművek esetében a tehetetlenségi nyomatékot a forgó alkatrészek adják, ennek értéke elsősorban a fogaskerekek méretétől és azok elrendezésétől függ.

3.1 A FOGASKERÉKPÁR TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKA

A tehetetlenségi nyomaték legyőzéséhez szükséges forgatónyomatékot, a súlyponton áthaladó tengely körül forgó test esetében, a tehetetlenségi nyomaték és a szöggyorsulás szorzataként határozzuk meg:

$$M_z = J_z \cdot \dot{\omega}$$

A kapcsolódó fogaskerékpár szükséges forgatónyomatéka:

$$M = M_1 + M_2 = J_1 \cdot \dot{\omega}_1 + J_2 \cdot \dot{\omega}_2 = \dot{\omega}_1 (J_1 + \frac{\dot{\omega}_2}{\dot{\omega}_1} J_2)$$

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = i, \quad \omega_1 = i \cdot \omega_2 \qquad \text{illetve} \qquad \dot{\omega}_1 = i \cdot \dot{\omega}_2$$

$$M = \dot{\omega}_1 (J_1 + \frac{1}{i} J_2) = \dot{\omega}_1 \cdot J_{12}$$

ahol: J_{12} a kapcsolódó fogaskerékpár tehetetlenségi nyomatéka.

$$J_{12} = J_1 + \frac{1}{i} J_2 \tag{16}$$

Reduktor esetén $i = u$

A tehetetlenségi nyomaték meghatározásánál a fogaskereket hengernek tekinthetjük, melynek átmérője a fogaskerék osztókörével egyenlő.

A henger tehetetlenségi nyomatéka:

$$J = m \cdot \frac{r^2}{2}$$

Ahol:

$m = \rho \cdot V$ a henger tömege

ρ az anyagsűrűség

$V = r^2 \cdot \pi \cdot b$

ezzel $m = \rho \cdot \pi \cdot b \cdot r^2 = k \cdot b \cdot r^2$,

ahol:

$k = \rho \cdot \pi$ adott anyag esetére állandónak tekinthető.

Ezzel a henger tehetetlenségi nyomatéka

$$J = k \cdot b \cdot \frac{r^4}{2} \approx k \cdot b \cdot \frac{r_w^4}{2} \tag{17}$$

Ezt behelyettesítve a (16) egyenletbe, a kapcsolódó fogaskerékpár tehetetlenségi nyomatékára a következő kifejezést kapjuk:

$$J_{12} = k \cdot b \cdot \frac{r_{w1}^4}{2} + \frac{1}{u} \cdot k \cdot b \cdot \frac{r_{w2}^4}{2}$$

$$J_{12} = \frac{k \cdot b}{2} (r_{w1}^4 + \frac{1}{u} r_{w1}^4 \cdot u^4) = \frac{k \cdot b}{2} r_{w1}^4 (1 + u^3),$$

illetve ha a gördülősugarat a tengelytávval fejezzük ki

$$J_{12} = \frac{k \cdot b}{2} \cdot a_w^4 \cdot \frac{1 + u^3}{(u+1)^4} \tag{18}$$

3.2 A FOGASKEREKES HAJTÓMŰ TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKA

Egy kívánt áttétel megvalósítható egyfokozatú, kétfokozatú, háromfokozatú, stb. hajtóművel, az áttétel pedig a fokozatok, ill. a fogaskerékpárok áttételének szorzata lesz:

két fokozat esetén: $u = u_{12} \cdot u_{34}$,

három fokozat esetén $u = u_{12} \cdot u_{34} \cdot u_{56}$.

3.2.1 Az egyfokozatú hajtómű tehetetlenségi nyomatéka

Ha a tengelyek tehetetlenségi nyomatékát elhanyagoljuk, akkor az egyfokozatú hajtómű tehetetlenségi nyomatéka a fogaskerékpár nyomatékával megegyezik (18).

$$J_{h1} = J_{12} = \frac{k \cdot b}{2} \cdot a_w^4 \cdot \frac{1 + u^3}{(u+1)^4} \tag{19}$$

3.2.2 A kétfokozatú hajtómű tehetetlenségi nyomatéka

Az *5. ábra* jelöléseit felhasználva a hajtómű inercianyomatéka a következő kifejezéssel írható fel:

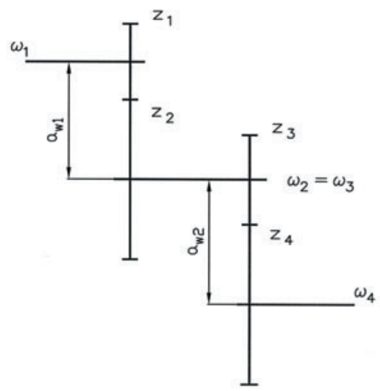
$$M = J_1 \cdot \dot{\omega}_1 + (J_2 + J_3) \cdot \dot{\omega}_2 + J_4 \cdot \dot{\omega}_4$$

$$M = \dot{\omega}_1 \left[J_1 + \frac{1}{u_{12}} \cdot (J_2 + J_3) + \frac{1}{u_{14}} \cdot J_4 \right] = \dot{\omega}_1 \cdot J_{h2}$$

ahol: J_{h2} a kétfokozatú hajtómű tehetetlenségi nyomatéka,

$$J_{h2} = J_{14} = J_1 + \frac{1}{u_{12}} \cdot (J_2 + J_3) + \frac{1}{u_{14}} \cdot J_4, \tag{20}$$

J_1, J_2, J_3, J_4 *a* kerekek egyenkénti tehetetlenségi nyomatéka.



5. ábra. Kétfokozatú hajtómű egyszerűsített vázlata

A fogaskerekek egyenkénti tehetetlenségi nyomatéka az előző fejtegetések szerint:

$$J_j = k \cdot b_j \cdot \frac{r_{wj}^4}{2}, \text{ ahol } j = 1, 2, 3, 4$$

Az egyszerűbb írásmód érdekében bevezetjük a következő jelöléseket:

$$u_{12} = u_1, \quad u_{34} = u_2, \quad u_{14} = u = u_1 \cdot u_2.$$

Ezzel a kétfokozatú hajtómű tehetetlenségi nyomatéka a következő formában írható fel:

$$J_{h2} = k \cdot b_1 \cdot \frac{r_{w1}^4}{2} + \frac{1}{u_1} \cdot k \cdot b_2 \frac{r_{w2}^4}{2} + \frac{1}{u_1} k \cdot b_3 \cdot \frac{r_{w3}^4}{2} + $$

$$+ \frac{1}{u_1 \cdot u_2} \cdot k \cdot b_4 \cdot \frac{r_{w4}^4}{2} \tag{21}$$

Általában egy-egy kerékpár kerekeinek szélessége azonos, illetve $b_1 = b_2 = b_{12}$, $b_3 = b_4 = b_{34}$.

A gördülősugarakat a tengelytávval fejezzük ki, illetve

$$r_{w1} = \frac{a_{w1}}{u_1 + 1}, \quad r_{w2} = u_1 \cdot \frac{a_{w1}}{u_1 + 1}$$

$$r_{w3} = \frac{a_{w2}}{u_2 + 1}, \quad r_{w4} = u_2 \cdot \frac{a_{w2}}{u_2 + 1}.$$

Ezeket behelyettesítve, a kétfokozatú hajtómű tehetetlenségi nyomatéka a következő alakban írható fel:

$$J_{h2} = \frac{k}{2}\left[b_{12} \cdot a_{w1}^4 \frac{1 + u_1^3}{(u_1 + 1)^4} + \frac{1}{u_1} b_{34} \cdot a_{w2}^4 \frac{1 + u_2^3}{(u_2 + 1)^4}\right] \quad (22)$$

Hasonló módon eljuthatunk a háromfokozatú hajtómű tehetetlenségi nyomatékának kifejezéséhez, de itt csak az egy- és kétfokozatú hajtómű elemzésére szorítkozunk.

3. 3 AZ OPTIMÁLIS FOKOZATSZÁM A HAJTÓMŰ TEHETETLENSÉGI NYOMATÉKA SZERINT

Az egyfokozatú- valamint a kétfokozatú hajtómű tehetetlenségi nyomatékát leíró kifejezések elemzésével megállapítható, hogy a tehetetlenségi nyomatékot a legnagyobb mértékben a tengelytáv befolyásolja (a negyedik hatványon) valamint a kerekek szélessége és az áttétel.

Ha megnézzük a tengelytávot meghatározó képletet (1), láthatjuk, hogy a tengelytáv értéke is függ az áttételtől.

A tengelytáv képletében szereplő mennyiségek a forgatónyomaték és az áttétel kivételével, adott anyagpárosítás és üzemfeltételek mellett, esetünkben állandónak tekinthetők és így a tengelytáv egyszerűsítve felírható:

$$a_w^3 \geq C \cdot T_1 \cdot \frac{(u+1)^4}{u} \quad (23)$$

ahol: $C = \dfrac{250}{\xi \cdot \sigma_{HP}^2} \cdot Z^2 \cdot K_H$.

Kétfokozatú hajtómű esetén a tengelytáv számítását külön végezzük az első- ill. második fokozatra. Figyelembe véve fokozatok áttételei, valamint a forgatónyomatékok közötti összefüggéseket (7), (8), a tengelytávok kifejezései a következők lesznek:

$$a_{w1}^3 \geq C \cdot T_1 \cdot \frac{(u_1 + 1)^4}{u_1} \quad (24)$$

$$a_{w2}^3 \geq C \cdot T_1 \cdot u_1 \cdot \frac{(u_2 + 1)^4}{u_2}. \quad (25)$$

Ezeket a kifejezéseket behelyettesítjük a tehetetlenségi nyomatékok képletébe (19), (22), így azok a következő alakban írhatók fel:

$$J_{h1} = \frac{k}{2} \cdot (T_1 \cdot C)^{4/3} \cdot b \cdot \frac{1 + u^3}{u^{4/3}} \cdot (u + 1)^{4/3}$$

$$J_{h2} = \frac{k}{2}(T_1 C)^{4/3}\left[b_{12} \frac{1 + u_1^3}{u_1^{4/3}}(u_1 + 1)^{4/3} + b_{34} \frac{1 + u_2^3}{u_2^{4/3}}(u_2 + 1)^{4/3} \cdot u_1^{1/3}\right]$$

Célunk a tehetetlenségi nyomatékok összehasonlítása, amikor az áttételt egy- vagy kettő fokozattal valósítjuk meg. A *T_1, C* és *k* ismeretlenek kiiktatása céljából vizsgáljuk a két egyenlet hányadosát:

$$\frac{J_{H2}}{J_{H1}} = \frac{u^{4/3}}{1 + u^3} \cdot \frac{1}{(u + 1)^{4/3}} \cdot \left[\frac{b_{12}}{b} \cdot \frac{1 + u_1^3}{u_1^{4/3}} \cdot (u_1 + 1)^{4/3} + \frac{b_{34}}{b} \cdot \frac{1 + u_2^3}{u_2^{4/3}} \cdot (u_2 + 1)^{4/3} \cdot u_1^{1/3}\right] \quad (26)$$

A fenti kifejezés értékének elemzésével döntés hozható a tekintetben, hogy egy vagy kétfokozatú hajtóművet célszerű tervezni, a következők szerint:

$\dfrac{J_{h2}}{J_{h1}} > 1$ kedvezőbb az egyfokozatú kivitel

$\dfrac{J_{h2}}{J_{h1}} < 1$ kedvezőbb a kétfokozatú kivitel

$\dfrac{J_{h2}}{J_{h1}} = 1$ határeset, amikor mindkét esetre azonos a tehetetlenségi nyomaték

A (26) kifejezésben szerepelnek a kerekek szélességének viszonyai, ezek kifejezhetők az áttételek függvényeként, felhasználva a (2), (23), (24) és (25) összefüggéseket.

A fogszélesség-tényező értékét vegyük egyenlőnek: $\xi = \xi_{12} = \xi_{34}$,

$$b = \xi \cdot \frac{2 \cdot a_w}{u + 1} = 2\xi \cdot (C \cdot T_1)^{1/3} \cdot \left(\frac{u + 1}{u}\right)^{1/3}$$

$$b_{12} = \xi_{12} \cdot \frac{2 \cdot a_{w1}}{u_1 + 1} = 2\xi \cdot (C \cdot T_1)^{1/3} \cdot \left(\frac{u_1 + 1}{u_1}\right)^{1/3}$$

$$b_{12} = \xi_{12} \cdot \frac{2 \cdot a_{w1}}{u_1 + 1} = 2\xi \cdot (C \cdot T_1)^{1/3} \cdot u_1^{1/3} \cdot \left(\frac{u_2 + 1}{u_2}\right)^{1/3}$$

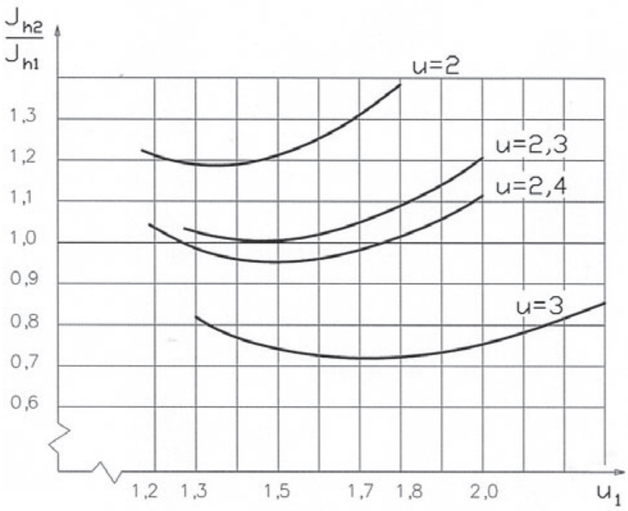
$$\frac{b_{12}}{b} = \left[\frac{u \cdot (u_1 + 1)}{u_1 \cdot (u + 1)}\right]^{1/3}$$

$$\frac{b_{34}}{b} = u_1^{1/3} \cdot \left[\frac{u \cdot (u_2 + 1)}{u_2 \cdot (u + 1)}\right]^{1/3}$$

A második fokozat áttételét kifejezhetjük a (7) összefüggésből, ill.: $u_2 = \dfrac{u}{u_1}$

Így két ismeretlenes igen bonyolult egyenleteket kapunk. Az u és u_1 értékeket felvéve a tehetetlenségi nyomatékok hányadosa meghatározható és ez egy térgörbével grafikusan ábrázolható. Ha az *u* áttétel értékére különböző konstans értékeket veszünk fel, akkor az *u_1* változó függvényében egy görbenyalábot kapunk *(6. ábra).*

Ezek kiértékelésével megállapítható, hogy amikor az áttétel, $u = 2{,}4$ felett van, akkor a tehetetlenségi nyomaték tekintetében kedvezőbb a kétfokozatú hajtómű.



6. ábra. A tehetetlenségi nyomatékok viszonya

ÖSSZEFOGLALÓ

A cikkben két analitikai összefüggéseken alapuló módszer került bemutatásra a fokozatok számának meghatározására. Az elemzés csak az egy- és kétfokozatú fogaskerekes hajtóművekre terjed ki.

Az elvégzett elemzés eredményeként megállapítható, hogy a hajtómű legkisebb helyigénye tekintetében, $u > 8$ esetén kétfokozatú hajtómű kialakítása célszerű, ill. $u < 8$ esetén egyfokozatú hajtómű kialakítása kedvezőbb.

Abban az esetben, amikor a kitűzött cél a legkisebb tehetetlenségi nyomaték, akkor, $u = 2{,}4$ felett a hajtóművet célszerű kétfokozatúra tervezni.

CONCLUSION

In this paper the possibility for definition the number of stages on the basis of analytical dependencies is presented. The analysis covers only gear units with one and two stages.

On the basis of fulfilled analysis it can be established that by the minimal requested volume of the gear units by $u > 8$, two stages is recommended, while in cases when $u < 8$, the gear unit design with one stages is fair.

In cases when the goal is the minimal moment of inertia of the gear units, then over the ratio value $u = 2{,}4$ it is practical to design the gear unit with two stages.

IRODALOM

[1] ERNEY GY.: Fogaskerekek, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1983.

[2] HABERHAUER H., BODENSTEIN F.: Maschinenelemente, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

[3] STAMPFER M.: Optimisation the number of stages by gear units, Gépészet 2008, SIXT CONFERENCE ON MECHANICAL ENGINERING, Budapest, 2008

[4] ROLOFF H., MATEK W.: Maschinenelemente, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1994.

[5] DORMÁN L.: Gépelemek III, Atlantis, Újvidék, 1999.

[6] MILTENOVIĆ V.: Mašinski elementi, Grafika-Galeb, Niš, 2001.

[7] DIN 3990 Teil 1.