

# ÉRZÉKENYSÉGI VIZSGÁLATOK EGY NUMERIKUS SZEMLELETŰ ANYAGJELLEMZŐ MÉRÉSI MÓDSZER KIÉRTÉKELÉSÉHEZ

## SENSITIVITY ANALYSIS FOR THE EVALUATION OF A THERMOPHYSICAL PROPERTY MEASUREMENT METHOD WITH NUMERICAL APPROACH

Czél Balázs\*, Gróf Gyula\*\*

A numerikus szemléletű hőfizikai anyagjellemző mérési módszerekről akkor beszélünk, ha a mérési folyamatot leíró matematikai modell csak numerikus úton oldható meg. Az ilyen mérési módszerek esetén a hővezetés egyenes feladatára nézve elméletileg szinte semmilyen korlát nincsen (tetszőleges geometria, inhomogén kezdeti és peremfeltételek, hőmérsékletfüggő anyagjellemzők), viszont a kiértékelés jóval bonyolultabbá válik az analitikus szemléletű módszerekhez képest. A kiértékelés egy inverz hővezetési feladat megoldását jelenti. Érzékenységi számításokkal megvizsgálható, hogy a kijelölt ismeretlen paraméterek becslése elvégezhető-e az inverz feladat megoldásával.

*Thermophysical property measurement methods with numerical approach have a mathematical model which can be solved by numerical methods. Considering such type of measurement methods, the direct problem of heat conduction has no restrictions (any kind geometry, inhomogeneous initial and boundary conditions, temperature dependent thermophysical properties), but the evaluation becomes very difficult compared to the analytical approach. The evaluation requires the solution of an inverse heat conduction problem. With sensitivity analysis, the possibility of the estimation of the unknown parameters through the inverse solution can be examined.*

### 1. BEVEZETÉS

A numerikus szemléletű hőfizikai anyagjellemző mérési módszerek nagy előnye, hogy a mérési módszer tervezésekor előnyben részesíthetők a mérés-technikai szempontok (minél egyszerűbb berendezés, minél pontosabban betartható peremfeltételek, minél pontosabb hőmérsékletmérés, minél kevesebb mérendő mennyiség), továbbá lehetőség nyílik a mérés univerzalizálásának növelésére (több paraméter párhuzamos meghatározása, hőmérsékletfüggés közvetlen meghatározása). Ezáltal

\* doktorandusz, BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék

\*\* egyetemi docens, BME Energetikai Gépek és Rendszerek Tanszék

egy jól megtervezett berendezés egyszerűbb, pontosabb, gyorsabb és univerzálisabb lehet. A numerikusan kezelhető egyenes feladat<sup>1</sup> nagy hátránya viszont, hogy a kiértékelés egyáltalán nem triviális. Az egyenes feladat megoldását diszkrét pontokban kapjuk meg, nem függvény alakban. Emiatt nincs esély a keresett anyagjellemző(k) képletszerű kifejezésére. A kiértékelés általában egy összetett szélsőérték keresési, optimalizációs feladattá válik. A bonyolult kiértékeléshez általában jelentős számítási idő párosul. Emiatt már a tervezési fázisban érdemes megvizsgálni, hogy a megoldandó inverz hővezetési feladat esetén a mért hőmérsékletgörbék mennyire érzékenyek az ismeretlen paraméterek megváltozására.

Az inverz hővezetési feladatokkal kapcsolatos érzékenységi vizsgálatok részletes, elméleti és gyakorlati összefoglalása [1]-ben található. Garcia [2] az érzékenységi vizsgálatokat hőfizikai anyagjellemző mérő berendezés optimalizálására alkalmazta doktori kutatásai során.

### 2. AZ INVERZ FELADAT

Az inverz feladatot a Kiss László által javasolt numerikus szemléletű mérési módszer [3] kiértékelési feladatának megfelelően definiáltuk. Az inverz feladat a  $\lambda(T)$  és  $\rho c_p(T)$  anyagjellemző függvények meghatározása a három rétegű (mag – próbatest – palást) hengeres rendszerben elhelyezett próbatest belső ( $r=R_1$ ) és külső ( $r=R_2$ ) palástfelületénél, egy lehűlési folyamat során tapasztalt tranziens hőmérsékletgörbék alapján. Az inverz feladat megoldásával kapcsolatos eredményeket a [4], [5] cikkekben foglaltuk össze. Ezen cikk célja a fenti inverz feladat esetén elvégzett érzékenységi vizsgálatok eredményeinek bemutatása az anyagjellemzők lineáris hőmérsékletfüggése (4 paraméter) továbbá tetszőleges, függvényenként 11 adatponttal definiált hőmérsékletfüggése (22 paraméter) esetén.

<sup>1</sup>Egyenes feladat esetén a differenciálegyenlet megoldását (hőmérséklet eloszlás) keressük az anyagjellemzők, és határfeltételek ismeretében, inverz feladat esetén a hőmérsékleteloszlás ismeretében becsljük a differenciálegyenlet anyagjellemzőit és/vagy határfeltételeit.

### 3. AZ ÉRZÉKENYSÉGI TÉNYEZŐK MEGHATÁROZÁSA

A kitűzött tranziens inverz hővezetési feladat során  $P_j$ ,  $j=1,2,\dots,J$  paramétert szeretnénk meghatározni  $T(\tau,r)=Y_{k,s}$ ,  $\tau=\tau_k$  ( $k=1,2,\dots,K$ ),  $r=R_s$  ( $s=1,2$ ) hőmérsékletek ismeretében (két hőmérsékletmérés hely van:  $r=R_1$  és  $r=R_2$ ). Az érzékenységi tényező definíció szerint [1] egy adott hőmérséklet adott paraméter szerinti parciális deriváltja (1). Egy adott hőmérsékletmérés helyre vonatkozóan így egy érzékenységi mátrixot kapunk (2). Ha az érzékenységi mátrix oszlopai lineárisan függenek egymástól, akkor a paraméterek inverz meghatározása nehéz, a feladat rosszul kondicionált. Az adott paraméter meghatározása annál könnyebb, minél nagyobb a hozzá tartozó érzékenységi tényező értéke.

$$B_{k,j}^{R_s} = \frac{\partial T(\tau_k, R_s)}{\partial P_j} \quad (1)$$

$$\underset{=R_s}{B}(\bar{P}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial T(\tau_1, R_s)}{\partial P_1} & \frac{\partial T(\tau_1, R_s)}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial T(\tau_1, R_s)}{\partial P_j} \\ \frac{\partial T(\tau_2, R_s)}{\partial P_1} & \frac{\partial T(\tau_2, R_s)}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial T(\tau_2, R_s)}{\partial P_j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial T(\tau_K, R_s)}{\partial P_1} & \frac{\partial T(\tau_K, R_s)}{\partial P_2} & \dots & \frac{\partial T(\tau_K, R_s)}{\partial P_j} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Ha az egyes paraméterek különböző fizikai mennyiségeket takarnak, az összehasonlíthatóság érdekében ajánlott a relatív érzékenységi tényező alkalmazása (3).

$$B_{k,m}^{*R_s} = \frac{\partial T(\tau_k, R_s)}{\partial P_j} \cdot P_j \quad (3)$$

Az érzékenységi tényezők értékét – mivel a megoldandó egyenes feladatnak nem ismert az analitikus megoldása – numerikusan, előrelépő véges differencia sémával határoztuk meg (4).

$$B_{k,j}^{*R_s} = \frac{T(\tau_k, R_s)^{(P_1, \dots, P_j + \varepsilon P_j, \dots, P_j)} - T(\tau_k, R_s)^{(P_1, \dots, P_j, \dots, P_j)}}{\varepsilon P_j} \cdot P_j$$

$$\varepsilon = 10^{-5} \quad (4)$$

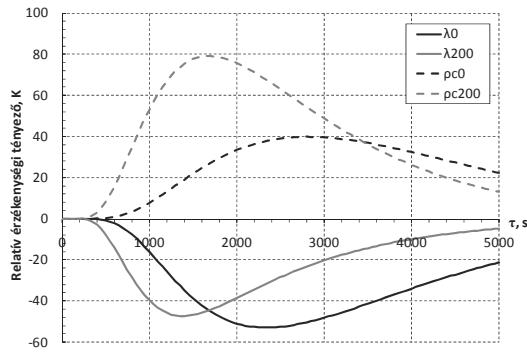
Az érzékenységi vizsgálatokat az 1. táblázatban található adatokkal definiált hővezetési feladat esetén végeztük el. A mag és palást anyagjellemzői konstansak, a próbatest jellemzői lineárisan függenek a hőmérséklettől.

### 4. EREDMÉNYEK 4 ISMERETLEN PARAMÉTER ESETÉN

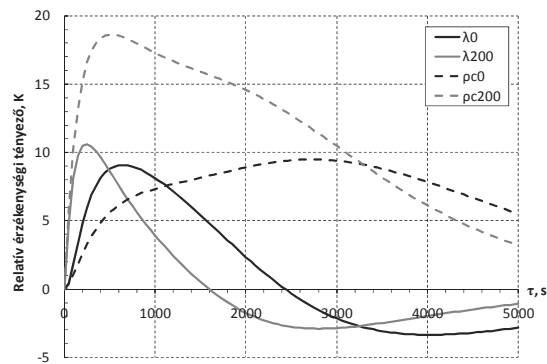
A próbatest anyagjellemzőit összesen  $J = 4$  paraméterrel ( $M_{\rho c} = 2, M_\lambda = 2, \lambda_0, \lambda_{200}, \rho c_{p0}, \rho c_{p200}$ ) adtuk meg értéktáblázatos szemléletben az 1. táblázat adatainak megfelelően. (Az értéktáblázatos szemlélet esetén az adatpontok között lineáris interpolációt alkalmazunk. Ez jelen esetben lineáris hőmérsékletfüggést eredményez.) A relatív érzékenységi tényezők értékét  $r = R_1$  és  $r = R_2$  helyeken, mindkét esetben  $K = 101$  hőmérsékleti pontban határoztuk meg. Az érzékenységi mátrix oszlopai az idő függvényében ábrázolva az 1. és 2. ábrákon láthatók. Megállapítható, hogy  $r = R_1$  helyen (tehát a magnál lévő határpontban) a hőmérsékletek mind a 4 paraméter változására érzékenyebbek, mint  $r = R_2$  helyen (a paláston lévő határpontban). A relatív érzékenységi tényezők mind a négy paraméter esetében 3-5-ször nagyobbak  $r = R_1$  helyen, mint  $r = R_2$  helyen. A térfogati hőkapacitás változására mindkét helyen érzékenyebbek a hőmérsékletek, mint a hővezetési tényező változására. Mind a négy paraméter hatással van a teljes időtartomány hőmérsékleteire, a folyamat végén mindegyik érzékenysége 0-hoz tart. A kapott függvények a lehűlési folyamat végétől eltekintve lineárisan függetlenek. Ezek alapján jó esély van a keresett 4 paraméter inverz megoldás során történő pontos meghatározására.

1. Táblázat A hővezetési feladat adatai az érzékenységi vizsgálatok során

	mag és palást		próbatest		
	0 °C	200 °C	0 °C	200 °C	
$\lambda$	16,2	16,2	0,24	0,18	W/(mK)
$c_p$	500	500	1833	2350	J/(kgK)
$\rho$	7917	7917	1200	1200	kg/m <sup>3</sup>
$T_0$			200		°C
$T_\infty$			0		°C
$\alpha$			47,6		W/(m <sup>2</sup> K)
$R$			25		mm
$R_1$			3		mm
$R_2$			23		mm
$n_{cs}$			26		-
$\tau_{max}$			5000		s



1. ábra  
4 paraméteres érzékenységi vizsgálat,  $r=R_1$

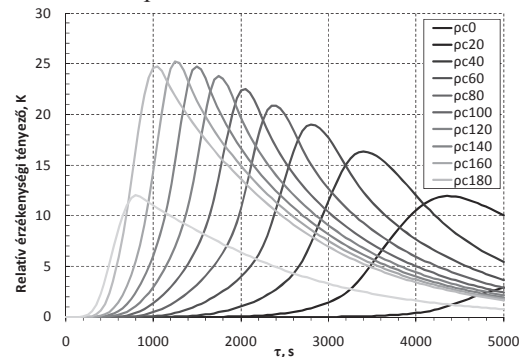


2. ábra  
4 paraméteres érzékenységi vizsgálat,  $r=R_2$

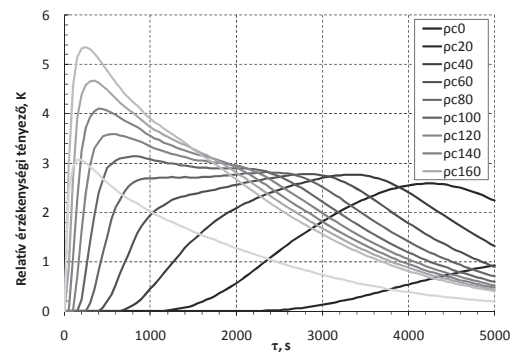
## 5. EREDMÉNYEK 22 ISMERETLEN PARAMÉTER ESETÉN

Ennél a vizsgálatnál a próbatest anyagjellemzőit összesen  $J = 22$  paraméterrel ( $M_{\rho c} = 11, M_{\lambda} = 11$   $\lambda_0, \lambda_{20}, \lambda_{40}, \dots, \lambda_{200}, \rho c_{p0}, \rho c_{p20}, \rho c_{p40}, \dots, \rho c_{p200}$ ) adtuk meg értéktáblázatos szemléletben. Az adatpontok mindkét anyagjellemző esetén az 1. Táblázat adatainak megfelelő egyenesre illeszkednek, tehát a hőmérsékletfüggés jellege itt is lineáris. Az előző vizsgálathoz képest az jelenti a különbséget, hogy itt egy paraméter (adatpont) megváltoztatása az anyagjellemző függvénynek csak egy kis tartományára van hatással (legfeljebb 40 °C). A relatív érzékenységi tényezők értékét  $r = R_1$  és  $r = R_2$  helyeken, mindkét esetben  $K = 101$  hőmérsékleti pontban határoztuk meg. Az érzékenységi mátrix oszlopai az idő függvényében ábrázolva a 3., 4., 5. és 6. ábrákon láthatók. Megállapítható, hogy  $r = R_1$  helyen (tehát a magnál lévő határpontban) a hőmérsékletek mind a 22 paraméter változására 3-5-ször érzékenyebbek, mint  $r = R_2$  helyen (a palásnál lévő határpontban). A 4 paraméteres vizsgálatallal ellentétben mindkét anyagjellemző esetén azonos nagyságrendű relatív érzékenységi tényezők tapasztalhatók. A folyamat

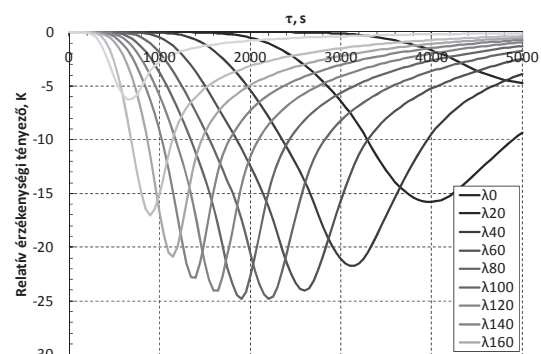
végén mind a 22 paraméter érzékenysége 0-hoz tart. A kapott függvények az adott paraméterre vonatkozó maximum környezetében lineárisan függetlenek, attól távolodva lineárisan nem függetlenek. Ez inverz meghatározásukat jóval nehezebbé teszi, mint a 4 paraméteres feladat esetén. Az egyes paramétereknek, a vártak megfelelően, főként helyi hatása van a hőmérsékleteloszlásra. A kezdeti és környezeti hőmérsékletre tartozó paraméterek megváltozása ( $\lambda_0, \lambda_{200}, \rho c_{p0}, \rho c_{p200}$ ) csekély hatással van a hőmérsékleteloszlásra, a hozzájuk tartozó relatív érzékenységi tényezők maximális értéke kevesebb, mint fele a szomszédos paraméter hasonló értékének.



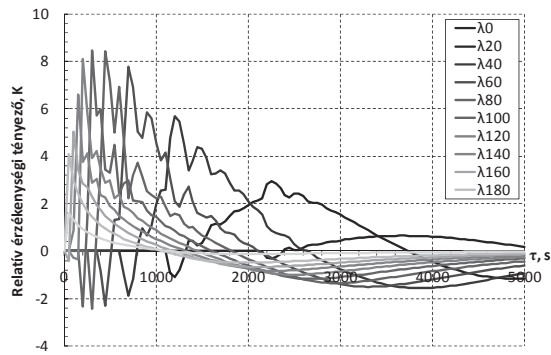
3. ábra  
22 paraméteres érzékenységi vizsgálat  
( $r=R_1$ )



4. ábra  
22 paraméteres érzékenységi vizsgálat  
( $r=R_2$ )



5. ábra  
22 paraméteres érzékenységi vizsgálat ( $r=R_1$ )



6. ábra

22 paraméteres érzékenységi vizsgálat ( $r=R_2$ )

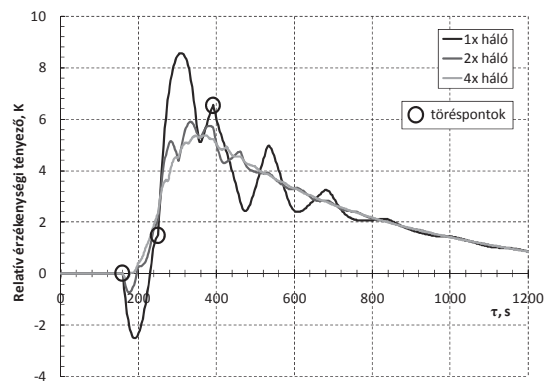
Ez alapján inverz meghatározásuk jóval nehezebb, mint a többi paraméteré. Így egy 0-200 °C-os tartományban elvégzett mérés alapján a 20-180 °C-os tartományban végezhető el megbízhatóan a kiértékelés. (A mérés hőmérséklettartományának alsó és felső 10%-ára vonatkozó becslült anyagjellemzőket figyelmen kívül kell hagyni.)

A 6. ábrán a relatív érzékenységi tényezők oszcilláló viselkedést mutatnak, mely nem felel meg az elvárt fizikai viselkedésnek, ezért itt újabb vizsgálatokra volt szükség. A  $\lambda_{100}$  paraméter érzékenységi vizsgálatát elvégeztük  $K = 2016$  hőmérsékleti pontban. (Vegyük észre, hogy  $\lambda_{100}$  értékét  $\varepsilon\lambda_{100}$ -zal eltolva a függvény már nem lineáris, 80, 100 és 120 °C-nál a görbében töréspont keletkezik, ahol deriváltja ugrásszerűen megváltozik.) Az eredmény a 7. ábrán látható (1x háló<sup>2</sup>). Az oszcilláló jelleg itt is megfigyelhető, azonban 3 töréspont van a görbében, azokban az időpillanatokban, amikor a hőmérséklet átlépi az anyagjellemző függvény töréspontjait. Az oszcilláció csak akkor tapasztalható, ha a  $\lambda(T)$  függvényben töréspont van (tehát deriváltjában ugrásszerű változás van). Az előző két megállapításból arra következtetünk, hogy az oszcilláció oka a  $\lambda(T)$  függvényben lévő töréspont.

Ez azonban a  $\lambda(T)$  függvény értéktáblázatos megadása esetén elkerülhetetlen. Az oszcilláció  $\tau = 1400$  s környékén lecseng, továbbá  $r = R_1$  helyen egyáltalán nem tapasztalható. Az  $\varepsilon$  értékét nagyobbra választva a függvény jellege nem változik, a függvényértékek a változás mértékével arányosan nőnek. Ebből az következik, hogy bizonyos  $\lambda(T)$  függvények esetén a lehülési folyamat során növekvő hőmérséklet is adódhat, ami a helytelen fizikai kép

<sup>2</sup> Az 1x háló az 1. táblázatban definiált hálót jelenti (26 csomópont), a 2x és 4x háló esetén rendre 51 és 101 csomóponttal végeztük a számítást.

mellett numerikus számítási problémákat is okozhat. Az oszcilláció két módon csökkenthető. Egyrészt a háló sűrítésével, de még négyszeres hálósűrítéssel sem szüntethető meg teljesen (7. ábra). A másik megoldás, hogy az inverz megoldás során a  $\lambda(T)$  függvényre bizonyos kritériumokat fogalmazzunk meg. Pontossági vizsgálatokon keresztül megállapítottuk, hogy  $\lambda(T)$  függvény abszolút meredekségére és a meredekség változások összegére vonatkozó határérték bevezetésével az oszcillációs hiba megfelelő mértékben csökkenthető. A  $\lambda(T)$  függvény értéktáblázatos formában történő megadása tehát pontossági problémát vet fel. A négyszeres hálósűrítés esetén négyszer több csomópontban 16-szor több időpillanatban kell elvégezni a számítást, ami 64-szeres számítási időt eredményez, és a hiba még ebben az esetben sem csökken 0-ra. Mivel az oszcillációs hiba a teljes időtartománynak csak egy részében jelentkezik és a magnál lévő határpontban nem tapasztalható, az inverz megoldás során az oszcillációs hiba alacsony tartása érdekében a  $\lambda(T)$  függvényre vonatkozó kritériumok megfogalmazását javasoljuk.



7. ábra

A  $\lambda_{100}$  paraméter érzékenységi vizsgálata különböző hálósűrűség mellett,  $r=R_2$

## 6. ÖSSZEFOGLALÁS

Az érzékenységi vizsgálatok során a  $\lambda(T)$  és  $\rho c_p(T)$  függvényeket értéktáblázatos szemléletben definiáltuk, egyik esetben 2-2, másik esetben 11-11 adatponttal. A 4 paraméteres vizsgálat kapcsán tett legfontosabb megállapítások:

- a relatív érzékenységi tényezők az összes paraméter esetén 3-5-ször nagyobbak  $r = R_1$  helyen, mint  $r = R_2$  helyen,
- a kapott függvények a lehülési folyamat végétől eltekintve lineárisan függetlenek. Ezek alapján jó esély van a keresett 4 paraméter inverz megoldás során történő pontos meghatározására.

A 22 paraméteres vizsgálat kapcsán tett legfontosabb megállapítások:

- a paramétereknek főként helyi hatása van a hőmérsékleteloszlásra, egy 0-200 °C-os tartományban elvégzett mérés alapján a 20-180 °C-os tartományban végezhető el megbízhatóan a kiértékelés, tehát a mérés hőmérséklettartományának alsó és felső 10%-ára vonatkozó becsült anyagjellemzőket figyelmen kívül kell hagyni.
- a kapott függvények a maximum környezetében lineárisan függetlenek, attól távolodva lineárisan nem függetlenek, ez inverz meghatározásukat jóval nehezebbé teszi, mint a 4 paraméteres feladat esetén,
- a  $\lambda(T)$  függvényben lévő töréspont  $r = R_2$  helyen oszcillációt okoz a hőmérsékletben, mely a háló sűrítésével, vagy a  $\lambda(T)$  függvényre megfogalmazott kritériumokkal csökkenthető, a gyorsabb számítás érdekében a kritériumok alkalmazását javasoljuk.

A munka szakmai tartalma kapcsolódik a „Minőségorientált, összehangolt oktatási és K+F+I stratégia, valamint működési modell kidolgozása a Műegyetemen” c. projekt szakmai célkitűzéseinek megvalósításához. A projekt megvalósítását az ÚMFT TÁMOP-4.2.1/B-09/1/KMR-2010-0002 programja támogatja.

A kutatást az OTKA 82024-es számú pályázata támogatta.

## 7. IRODALOMJEGYZÉK

- [1] ÖZISIK, M. N., ORLANDE, H. R. B.: Inverse Heat Transfer: fundamentals and applications, Taylor & Francis, New York, 2000.
- [2] GARCIA, S.: Experimental design optimization and thermophysical parameter estimation of composite materials using genetic algorithms, PhD thesis, 1999.
- [3] KISS L.: Hővezetési anyagjellemzők meghatározása, Kandidátusi értekezés, 1983.
- [4] CZÉL, B., GRÓF, GY.: Genetic Algorithm-Based Method for Determination of Temperature-Dependent Thermophysical Properties, International Journal of Thermophysics, 30/6, 2009.
- [5] CZÉL, B., GRÓF, GY.: A térfogati hőkapacitás hőmérsékletfüggésének meghatározása tranziens hőmérsékletmérésből, Energiagazdálkodás, 50/4, 2009.