ROBOTOK INVERZ FELADATÁNAK MEGOLDÁSA

SOLUTION OF INVERS KINEMATIC PROBLEM OF ROBOTS

Kovács Béla, egyetemi docens, PhD, Miskolci Egyetem, Analízis Tanszék
Nándoriné Tóth Mária, egyetemi docens, PhD, Miskolci Egyetem, Ábrázoló Geometriai Tanszék

ÖSSZEFOGLALÁS (ABSTRACT).

This paper demonstrates an application of algebraic geometric to the real problem of roboting motion planning. We model an abstract robot arm using a system of polynomial equations specifying constraints imposed by the arm's various linkages, and demonstrate techniques for solving them in common situations.

1. BEVEZETÉS

A robotokat széles körben alkalmazzák a hétköznapi életben és az iparban is egyaránt. A robotok karjait merev tagokból álló elemekkel modellezzük úgy, hogy kényszerek kapcsolják őket egymáshoz. Ezek a kényszerek megengednek elcsúszást és elfordulást. Így az elmozdulás nagysága és az elfordulás szöge meghatározzák a robot pillanatnyi helyzetét. A tervezés egyik alapfeladata az, hogy a fenti paraméterek (elmozdulás és elfordulás) segítségével hogyan lehet leírni a robot pillanatnyi helyzetét. A másik alapvető probléma az ún. inverz kinematikai feladat, amikor a robot egy pillanatnyi helyzetéhez határozzuk meg a lehetséges paraméterek (hossz és szögelfordulás) értékeit. Ennek a feladatnak több megoldási is lehetséges. Az ilyen típusú robotok kinematikája többváltozós polinom egyenletek segítségével írhatók le. Először néhány alapfogalmat vezetünk be.

Egy R gyűrű alatt olyan halmazt értünk, amelyben definiálva van összeadás és szorzás, amelyek teljesítik a következő axiómákat:

(1) $(R,+)$ egy *Abel csoport*: $x+y=y+x$ R-nek minden x és y elemére (azaz, az összeadás kommutatív);
$(x+y)+z=x+(y+z)$ R-nek minden x, y és z elemére (azaz, az összeadás *asszociatív*); létezik R-nek egy 0 eleme (nulla elemként ismert) azzal a tulajdonsággal, hogy $x+0=x$ teljesül R minden elemére; R - nek egy tetszőleges x eleméhez létezik egy $-x$ elem, amelyre $x+(-x)=0$ teljesül;

(2) $(R,\cdot)$ egy *félcsoport*: $(xy)z=x(yz)$ R-nek minden x, y és z elemére (azaz, a szorzás *asszociatív*);

(3) a szorzás *disztributív*:
$x(y+z)=xy+xz$ és $(x+y)z=xz+yz$ R-nek minden x, y és z elemére.

Egy R gyűrű *kommutatív*, ha $xy=yx$ minden $x,y\in R$ esetén. Egy R gyűrű egységelemes, ha létezik (szükségszerűen pontosan egy) nem nulla ún. *multiplikatív* egységelem, amit 1-el jelölünk, és teljesíti az $1x=x=x1$ egyenletet minden $x\in R$ esetén.

Egy F kommutatív, egységelemes gyűrűt, testnek nevezünk, ha $F\neq\{0\}$ teljesül, és ezenkívül még

(4) minden $a\neq 0$ F-beli elemhez létezik egy $a^{-1}\in F$ amelyre $a^{-1}a=1$.

Más szavakkal, $F^{\times}=F-\{0\}$ egy *Ábel-csoport* a szorzás műveletére nézve.

Test feletti több határozatlanú polinomok alatt olyan kifejezéseket értünk amelyek az $x_1,x_2,...,x_n$ ún. határozatlanokból és valamilyen F test elemeiből épülnek fel összeadás, kivonás és szorzás segítségével. Ezek tehát $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum a_{m_1,m_2,...,m_n}x_1^{m_1}x_2^{m_2}...x_n^{m_n}$ alakban írhatók fel, ahol $a_{m_1,m_2,...,m_n}$ együtthatók a F test elemei és $m_1,m_2,...,m_n$ nem negatív egészek. Ilyen elemek összességét $F[x_1,x_2,...,x_n]$ módon jelöljük és használjuk a többváltozós polinomok elnevezést is rájuk. Könnyen bizonyítható, hogy ez a halmaz az összeadás és a szorzás műveletére nézve kommutatív egységelemes gyűrű, amit n-határozatlanú F test felett polinom gyűrűnek nevezünk. Az algebrai geometriában nagy jelentőségű az $\mathbb{R}$ valós számok feletti polinom gyűrűnek, amit $\mathbb{R}[x_1,x_2,...,x_n]$-nal jelölünk. Legyen R kommutatív gyűrű. Az R-nek egy nem üres I részhalmaza ideál, ha teljesülnek a következő feltételek:

1. Ha $x, y \in I$ akkor $x + y \in I$.

2. Ha $x \in R$, akkor $y \in I$ $xy \in I$.

Legyen $f_1, f_2,..., f_s \in \mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_n]$. Ekkor az $I = \{x \in R : x = g_1 f_1 + g_2 f_2 + ... + g_s f_s\}$ halmaz minden $g_i \in \mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_n]$ esetén egy ideálja $\mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_n]$ -nek. Ezt az ideált $\langle f_1, f_2,..., f_s \rangle$ -nel jelöljük, ahol s pozitív egész szám.

Hilbert bázistétele szerint egy n-határozatlanú F test felett polinom gyűrűben minden I ideál végesen generált, azaz léteznek olyan ún. generáló elemek $f_1, f_2,..., f_s \in \mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_n]$, amelyekre $I = \langle f_1, f_2,..., f_s \rangle$. Ezeket a generáló elemeket az I ideál bázisának is szokás nevezni.

Ha $n = 1$ vagyis egy-határozatlanú polinomok esetén, $\mathbb{R}[x]$ -ben az x hatványai szerint rendezzük a tagokat sorba, pl: $2{,}5x^4 + 3x^3 - x^2 + 4x + 2$. Az első helyen álló legnagyobb kitevőjű tagot főtagnak nevezzük. Egy n-határozatlanú polinom gyűrűben kicsit bonyolultabb a tagok rendezése. Nevezzük el az $x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}$ polinomokat monomoknak. Értelmezzünk az $\mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_n]$ két $x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n}$ és $x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_n^{p_n}$ monomja között egy $\succ$ teljes rendezést (azért teljes mert bármelyik két monom összehasonlítható) a következőképpen:

$x_1^{m_1} x_2^{m_2} ... x_n^{m_n} \succ x_1^{p_1} x_2^{p_2} ... x_n^{p_n}$ pontosan akkor, ha $(m_1 - p_1, m_2 - p_2,..., m_n - p_n)$ véges sorozatban az első nem zérus tag pozitív. Ezt a rendezést lexikografikus rendezésnek nevezzük. Például: $x_1^2 x_2^4 x_3 \succ x_1^2 x_2^3 x_3^5$ mert a $(0,1,-4)$ véges sorozatban az első nem nulla elem pozitív. A lexikografikus rendezésnek sok jó tulajdonsága van. Például a monomok halmaza ún. jól rendezett halmaz lesz, ami azt jelenti, hogy az $\mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_n]$ monomjainak bármilyen részhalmazában van legkisebb elem. A lexikografikus rendezéssel egy $f \in \mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_n]$ polinom tagjait rendezni tudjuk és a legnagyobb tagot a $\succ$ tagsorrendre nézve főtagnak vagy vezető tagnak nevezzük. Jele: $LT(f)$. Például:

$$f = 6x_1^2 x_2^4 x_3 + 3x_1^2 x_2^3 x_3^5 - 4x_1 x_2^3 - x_1 + 8$$

polinom főtagja $LT(f) = 6x_1^2 x_2^4 x_3$.

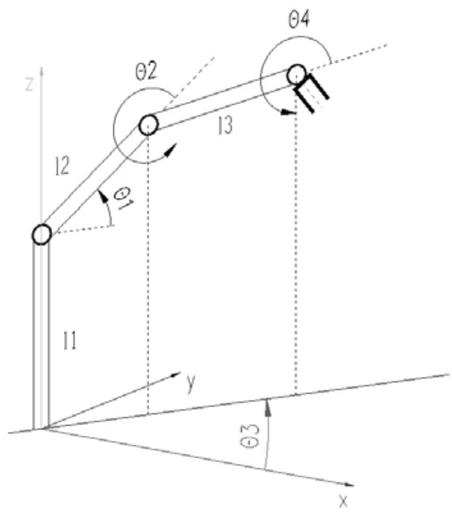
Válasszunk ki egy tetszőleges $I \subset \mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_s]$ ideált, amely nem triviális $I \neq (0)$. Legyenek az I generáló elemei $f_1, f_2,..., f_s \in \mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_s]$ azaz, amelyre $I = \langle f_1, f_2,..., f_s \rangle$. Képezzünk egy új ideált a generáló elemek főtagjaiból: $\langle LT(f_1), LT(f_2),..., LT(f_s) \rangle$ Ezután vegyük az I összes elemének főtagjaiból álló halmazt: $LT(I) = \{LT(f) : f \in I\}$, majd ebből kiindulva képezzük az $LT(I)$ elemei által generált ideált: $\langle LT(I) \rangle$. Könnyen belátható, hogy az utóbbi két ideál között fennáll az $\langle LT(f_1), LT(f_2),..., LT(f_s) \rangle \subset \langle LT(I) \rangle$ reláció. Könnyű példát mutatni arra az esetre, amikor a fordított irányú reláció nem igaz: $\langle LT(I) \rangle \not\subset \langle LT(f_1), LT(f_2),..., LT(f_s) \rangle$. Bizonyítható azonban, hogy bármilyen $I \subset \mathbb{R}[x_1, x_2,..., x_n]$ ideál esetén léteznek az I -nek olyan $(g_1, g_2,..., g_s)$ generáló elemei amelyekre $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), LT(g_2),..., LT(g_s) \rangle$ igaz, és ezeket Gröbner-bázisoknak nevezzük. A Gröbner-bázisnak sok hasznos tulajdonsága van. Például tegyük fel, hogy az I ideál Gröbner-bázisa $(g_1, g_2,..., g_s)$. Ekkor az f polinom pontosan akkor eleme az I ideálnak, ha a $(g_1, g_2,..., g_s)$ rendszerrel maradékosan elosztva a maradék nulla. Itt a többváltozós polinomoknál használt maradékos osztás az egyváltozós polinomoknál tanult maradékos osztás általánosítása. A Buchberger algoritmus segítségével egy tetszőleges ideál valamilyen generátorrendszeréből előállítható az ideál Gröbner-bázisa.

2. ROBOTOK INVERZ FELADATA

Ha a robotok mozgását geometriailag szeretnénk leírni, akkor néhány egyszerűsítő feltétellel kell élnünk. A robotok tagjait (karjait) merev rudakkal modellezzük, amiket kényszerek kapcsolnak össze. A rudak hosszait $l_1, l_2,..., l_m$ jelölik, tehát m db különböző hosszúságú rúdból épül fel a robot. Az első tag legyen rögzített. A jelen dolgozatban csak síkbeli szerkezeteket vizsgálunk, ahol a két tagot síkbeli csukló kapcsol össze, de ez a síkbeli robot az első tag körül körbe tud fordulni (lásd 1.ábra). Általános esetben két tag egymással bezárt szögét $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_m$ fogja jelölni, ahol θ_1 a második tag vízszintessel bezárt szöge, θ_2 pedig a harmadik tag második taghoz viszonyított szöge az óramutató járásával ellentétesen mérve, és így tovább az i -dik és $i+1$ -dik tag egymáshoz viszonyított szöge θ_i. Nevezhetjük az i -dik és $i+1$ -dik tagot összekapcsoló kényszert i -dik síkbeli csuklónak a θ_i szöget pedig a csukló paraméterének amely értékét a $[0,\pi]$ intervallumon változtathatja, jelöljük ezt S^1-el. Megengedünk olyan tagot is amely változtatja a hosszát, nevezhetjük ezt teleszkópos tagnak. Ennek értéke valamilyen minimális értéktől egy maximális értékig változhat, tehát valamilyen I intervallumon adhatjuk meg őket. Jelen példa esetén azonban kismértékben eltértünk ettől az általános jelöléstől, mert θ_3 a robot síkjának az x tengellyel bezárt szögét jelöli és θ_4 pedig az utolsó tagnak a hármas taggal bezárt szöge.

Ha p db különböző teleszkópos tag van és r db síkbeli csuklós kényszer, akkor a robot koordináta terét a $\Im = S^1 \times S^1 \times ... \times S^1 \times I_1 \times I_2 \times ... \times I_p$ Descartes-szorzat adja meg.

Szokták a robotokat nyílt láncú mechanizmusoknak is nevezni, mert a legutolsó tag nem kapcsolódik vissza az első taghoz (állványhoz) mint a zárt láncú mechanizmusok esetén. Robotoknál az utolsó tag végpontja képes arra, hogy valamilyen feladatot végezzen, például meg fog egy tárgyat vagy valamilyen műveletet (pl. hegesztés) végez. Általában nemcsak az előre megadott végpont helyzetét kell a robotnak elérni, hanem megfelelő, szintén előre megadott, irányszöget is fel kell venni a robot utolsó tagjának. Így könnyen el tudja végezni az előírt munkafeladatot. Tehát az utolsó tag végpontjának helyzetét a pont helykoordinátáival és egy iránnyal kell lerögzíteni. Síkbeli robot esetén a végpont helyzete egy pont a síkban $(a,b) \in U, U \subset \mathbb{R}^2$, ahol U a robot végpontjának lehetséges pozíciói. A jelen példa esetén természetesen a térbeli xyz koordinátarendszerben három koordinátát kell megadni. A robot utolsó tagjának szögét pedig egy irányvektorral írjuk le, ami a robot síkjában megadható egy $V = S^1$ síkbeli vízszintessel bezárt szöggel. Így a $\Phi = U \times V$ Descartes szorzatot a robot konfigurációs terének fogjuk nevezni. Mivel a robot merev tagokból áll, a koordináta tér egy adott pontjához egyértelműen meghatározott konfigurációs térbeli állapot tartozik. Máképpen fogalmazva a meghatározható az $f : \Im \to \Phi$ függvénykapcsolat a robot koordinátái és a végpontjának pozíciói között. Inverz kinematikai feladatnak nevezzük azt a problémát, amikor egy adott $c \in \Phi$ végpont pozícióhoz meg kell határoznunk az összes olyan $j \in \Im$ helykoordinátát, amelyre $f(i) = c$ teljesül.



1. ábra A robot térbeli elhelyezkedése

Az 1.ábrán látható robot karjainak hosszai l_1, l_2, l_3 állandók. Mivel a robot szabadsági foka három, (leszámítva a θ_4 szöget, amely segítségével a megfogás szögét adhatjuk meg) így előírhatunk a térben három koordinátát. Legyenek ezek a robot végpontjának x, y és z korordinátái, jelölje ezeket rendre p_x, p_y, p_z. Tehát adottnak tekintjük az l_1, l_2, l_3 , p_x, p_y, p_z értékeket. Ezekkel a jelölésekkel az 1. ábrán látható robot előre megadott p_x, p_y, p_z végpont helyzethez tartozó lehetséges helyzeteit a következő polinom egyenletrendszer írja le:

$$[l_3(c_1c_2 - s_1s_2) + l_2c_1]c_3 - p_x = 0 \qquad (1)$$

$$[l_3(c_1c_2 - s_1s_2) + l_2c_1]s_3 - p_y = 0 \qquad (2)$$

$$l_3(s_1c_2+s_2c_1)+l_2s_1+l_1-p_z=0 \quad (3)$$

$$c_1^2+s_1^2-1=0 \quad (4)$$

$$c_2^2+s_2^2-1=0 \quad (5)$$

$$c_3^2+s_3^2-1=0 \quad (6)$$

ahol $c_i=\cos\theta_i$ és $s_i=\sin\theta_i$ $(i=1,2,3)$.

Az utóbbi polinom egyenleteket az $\mathbb{R}(l_1,l_2,l_3,p_x,p_y,p_z)[c_1,c_2,c_3,s_1,s_2,s_3]$ gyűrűben transzformálhatjuk Gröbner-bázissá. Természetesen meg kell adni, hogy milyen rendezést alkalmazunk. Ha előírjuk a p_x,p_y,p_z értékeket, vagyis a robot végpontjának helyzetét, akkor ebből már θ_3 meghatározható, így c_3 és s_3 is ismert. Két különböző megoldást ismertetünk, amelyek természetesen ugyanazt az eredményt szolgáltatják. Az első megoldásban vezessük be az $a=\dfrac{p_x}{c_3}$ és $b=p_z-l_1$ jelöléseket, ezzel a (1), (3), (4) és (5) egyenleteket átírva a

$$l_3(c_1c_2-s_1s_2)+l_2c_1-a=0$$

$$l_3(s_1c_2+s_2c_1)+l_2s_1-b=0$$

$$c_1^2+s_1^2-1=0$$

$$c_2^2+s_2^2-1=0$$

polinom egyenletrendszert kapjuk, ahol a és b ismertnek tekinthető.

Az utóbbi négy egyenlet Gröbner-bázisa az $\mathbb{R}(l_2,l_3,a,b)[c_2,s_2,c_1,s_1]$ gyűrűben lexikografikus rendezést használva $(c_2\succ s_2\succ c_1\succ s_1)$:

$$c_2-\frac{a^2+b^2-l_2^2-l_3^2}{2l_2l_3}=0 \quad (7)$$

$$s_2+\frac{a^2+b^2}{al_3}s_1-\frac{a^2b+b^3+b(l_2^2-l_3^2)}{2al_2l_3}=0 \quad (8)$$

$$c_1+\frac{b}{a}s_1-\frac{a^2+b^2+l_2^2-l_3^2}{2al_2}=0 \quad (9)$$

$$s_1^2+\frac{a^2b+b^3+b(l_2^2-l_3^2)}{l_2(a^2+b^2)}s_1+\frac{(a^2+b^2)^2+(l_2^2-l_3^2)^2}{4l_2^2(a^2+b^2)}s_1-\frac{2a^2(l_2^2+l_3^2)+2b^2(l_2^2-l_3^2)}{4l_2^2(a^2+b^2)}=0 \quad (10)$$

Az utóbbi egyenletek már lehetővé teszik az inverz kinematikai feladat megoldását. A (7) egyenletből c_2 a (10) egyenletből pedig s_1 meghatározható. Az s_1 ismeretében (8)-ból s_2 (9)-ből pedig c_1 is előállítható.

Legyen például: $l_1=20, l_2=32, l_3=25$, $p_x=34, p_y=34, p_z=25$.

Ekkor $s_3=c_3=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ahonnan a és b értéke könnyen kiszámolható: $a=\dfrac{p_x}{c_3}=34\sqrt{2}$ és $b=p_z-l_1=5$. A (7) egyenletből c_2 meghatározható:

$$c_2=\frac{a^2+b^2-l_2^2-l_3^2}{2l_2l_3}=0.43.$$

A (10) egyenletből s_1 előállítható:

$$s_{1,1}=0.5558,\qquad s_{1,2}=-0.3725.$$

A (8)-dik egyenletből s_2 meghatározható:

$$s_{2,1}=-0.9028,\qquad s_{2,2}=0.902.$$

És végül c_1 értéke (9)-ből:

$$c_{1,1}=0.83128,\qquad c_{1,2}=0.9278.$$

A második megoldás esetében a feladatot közvetlenül az (1-6) rendszer alapján oldjuk meg. Mivel ennek a rendszernek a Gröbner-bázisa a következő

$$\{-1+2c_3^2,-s_3+c_3,10000s_2^2-8151,100c_2-43,-855+6800s_2s_3+9348s_1,-2907s_3-125s_2+2337c_1\}$$

így könnyen ellenőrizhető, hogy ezen az úton is ugyanazokat a megoldásokat kapjuk.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutató munka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg.

IRODALOM

[1] DAVID COX, JOHN LITTLE, DONAL O'SHEA: Ideals, varieties, and algorithms, An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra Springer, 2007.

[2] R. PAUL: Robot Manipulators:Mathematics, Programming snd Control, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1981.