

# EGY EGYDIMENZIÓS ÁLLANDÓSULT ÁLLAPOTÚ HŐVEZETÉSI FELADAT ANALITIKUS MEGOLDÁSA

## ANALITICAL SOLUTION OF A ONE-DIMENSIONAL STEADY STATE HEAT CONDUCTION PROBLEM

Ecsedi István<sup>1\*</sup> és Baksa Attila<sup>2\*</sup>

### ABSTRACT.

A one-dimensional steady state heat conduction problem is formulated and its analytical solution is presented. The considered one-dimensional structural component consists of straight and circular arc bar segments. The heat is generated within the solid as a result of an applied constant voltage difference. The generated heat by the constant voltage heat source is assumed to be dissipated by convection into a medium at a constant temperature.

### 1. BEVEZETÉS, HŐVEZETÉS

#### VILLAMOSAN HEVÍTETT RUDAKBAN

##### 1.1. Egyenes középvonalú rúdelem

Az 1. ábra szemlélteti az egydimenziós állandó keresztmetszetű és homogén anyagú szerkezeti komponens.

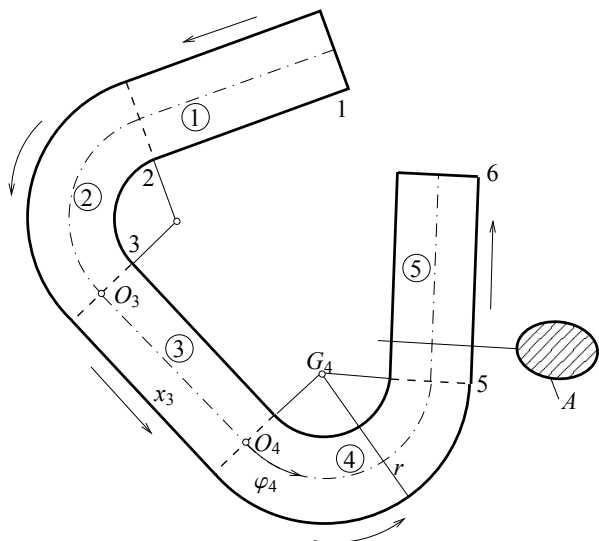
A keresztmetszetek súlypontjait összekötő egyenes és köríves szakaszból felépülő görbe a vizsgált elem középvonala, amelyet az 1. ábrán pont-vonal jelöl. Minden egyes egyenes és körív középvonalú rúdelemhez egy lokális koordináta-rendszert rendelünk. Az 1. ábrán csak az  $O_3x_3$  és a  $G_4r_4\varphi_4$  lokális koordináta-rendszerek vannak feltüntetve.

A 2. ábra egy tetszőleges  $O_iO_{i+1}$  pontokhoz tartozó egyenes középvonalú, állandó  $A$  keresztmetszetű, homogén  $L_i$  hosszúságú rúdelemet szemléltet. A rúdelem szélső keresztmetszeteinél az elektromos potenciált  $U_i$  és  $U_{i+1}$  jelöli. Jelölje  $I$  az áramerősséget, nyilvánvaló (Ohm-törvény), hogy

$$U_i - U_{i+1} = \rho \frac{L_i}{A} I, \quad (1)$$

ahol  $\rho$  a fajlagos ellenállást jelöli. A rúdelem egységnyi hosszára eső Joule hő

$$q_i = \frac{(U_i - U_{i+1})^2}{\rho L_i^2} A. \quad (2)$$



1. ábra. Egyenes és körív középvonalú rúd alakú testekből felépített szerkezeti komponens.

Az  $x_i$  és  $x_i + dx_i$  koordinátákkal kijelölt keresztmetszettekkel határolt elemi rúdszakasz termikus egyensúlyából az alábbi differenciál egyenletet nyerjük a  $T_i = T_i(x_i)$  hőmérsékletre [1, 3, 4]

$$\lambda A \frac{d^2 T_i}{dx_i^2} - \alpha K (T_i - T_0) + \frac{(U_i - U_{i+1})^2}{\rho L_i^2} A = 0, \quad 0 < x_i < L_i. \quad (3)$$

Itt  $T_0$  a külső környezet ismert hőmérsékletét,  $\alpha$  felületi hőátadási tényezőt,  $K$  pedig az  $A$  rúdkeresztmetszeti tartomány határgörbéjének hossza. A fajlagos ellenállás hőmérséklet függését a

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta (T - T_0)) \quad (4)$$

képlet alkalmazásával közelítjük, ahol  $\beta$  a fajlagos ellenállás hőfok tényezője. A

$$\vartheta_i(x_i) = T_i(x_i) - T_0 \quad (5)$$

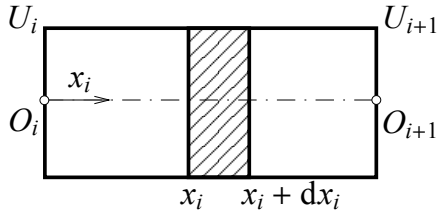
\* Miskolci Egyetem, Mechanikai Tanszék, <sup>1</sup>egyetemi tanár, <sup>2</sup>egyetemi docens

változó bevezetésével és a

$$\frac{1}{1 + \beta(T - T_0)} \approx 1 - \beta(T - T_0) \quad (6)$$

linearizáció alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\lambda A \frac{d^2 \vartheta_i}{dx_i^2} - \left[ \alpha K + \beta \frac{(U_i - U_{i+1})^2}{\rho_0 L_i^2} A \right] \vartheta_i + \frac{(U_i - U_{i+1})^2}{\rho_0 L_i^2} A = 0, \quad 0 \leq x_i \leq L_i. \quad (7)$$

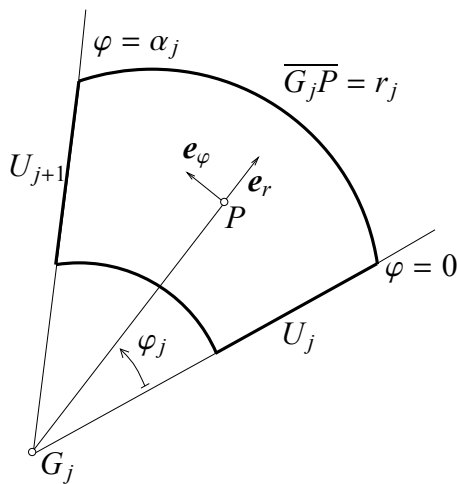


2. ábra. Egyenes rúdelem.

### 1.2. Körív középvonalú rúdelem

A 3. ábra szemlélteti a  $j$  jelű görbe rúdelemet és az elemhez kapcsolt  $G_j r_j \varphi_j$  polárkoordináta-rendszert. A szélső keresztmetszetek villamos potenciálját  $U_j$  és  $U_{j+1}$  jelöli. Első lépésben a görbült elem villamos ellenállását határozzuk meg. Alapvető feltevés, hogy a villamos térerősség vektor  $\mathbf{E}$  és az áramsűrűség vektor  $\mathbf{J}$  egyaránt  $\mathbf{e}_\varphi$  irányú. E feltevessel összhangban  $U = U(\varphi_j)$ . Tekintettel arra, hogy  $U$  harmonikus függvény  $U = U(\varphi_j)$  az alábbi alakban adható meg:

$$U(\varphi) = U_j + \frac{U_{j+1} - U_j}{\alpha_j} \varphi_j, \quad 0 \leq \varphi_j \leq \alpha_j. \quad (8)$$



3. ábra. Körív középvonalú rúdelem.

A villamos térerősség és áramsűrűség nem azonosan zérus komponenseire azt kapjuk, hogy

$$E_\varphi = -\frac{1}{r_j} \frac{dU}{d\varphi} = \frac{U_j - U_{j+1}}{r_j \alpha_j},$$

$$I_\varphi = \frac{E_\varphi}{\rho} = \frac{U_j - U_{j+1}}{\rho r_j \alpha_j}. \quad (9)$$

Az

$$I = \int_A I_\varphi dA \quad (10)$$

képlet és a (9) egyenletek alkalmazásával jutunk az

$$U_j - U_{j+1} = I \rho \frac{L_j}{A}, \quad L_j = c_j \alpha_j, \quad (11)$$

eredményre, ahol  $c_j$

$$\frac{A}{c_j} = \int_A \frac{dA}{r_j} \quad (12)$$

egyenlet alapján határozható meg. A Joule hő számítására, amely a  $\varphi_j$  és  $\varphi_j + d\varphi_j$  koordinátákkal kijelölt elemi rúdszakaszon keletkezik a villamos hevítés következtében a

$$\tilde{q}_j d\varphi = \left( \int_A \frac{E_\varphi^2}{\rho} r dA \right) d\varphi = \frac{(U_j - U_{j+1})^2}{\rho c_j \alpha_j^2} A d\varphi \quad (13)$$

összefüggést nyerjük.

A  $\varphi_j$  és  $\varphi_j + d\varphi_j$  szögkoordinátákkal kijelölt elemi rúdszakasz termikus egyensúlyának a vizsgálatából az alábbi differenciálegyenletet tudjuk levezetni a

$$\vartheta_j(x_j) = T_j(x_j) - T_0, \quad x_j = c_j \varphi_j \quad (14)$$

hőmérséklet különbségre [1, 3, 4]

$$\frac{d^2 \vartheta_j}{dx_j^2} - \left( \frac{\alpha f_j K}{\lambda A c_j} + \frac{\beta}{\rho_0 L_j^2 \lambda} (U_j - U_{j+1})^2 \right) \vartheta_j + \frac{(U_j - U_{j+1})^2}{\rho_0 L_j^2 \lambda} = 0, \quad 0 < x_j < c_j \alpha_j = L_j, \quad (15)$$

ahol  $f_j$  a keresztmetszeti határgörbe súlypontjának radiális koordinátáját jelöli.

## 2. POTENCIÁL KÜLÖNBSÉGEK SZÁMÍTÁSA

Az Ohm-törvény alkalmazásával az ①, ②, ③, ..., ② rúdszakaszokra (1. ábra) írható, hogy

$$U_1 - U_2 = \rho \frac{L_1}{A} I, \quad U_2 - U_3 = \rho \frac{L_2}{A} I, \quad \dots$$

$$U_{n-1} - U_n = \rho \frac{L_{n-1}}{A} I. \quad (16)$$

A fenti egyenletekből az következik, hogy

$$\rho \frac{I}{A} = \frac{U}{L}, \quad U = U_1 - U_n, \quad L = \sum_{i=1}^n L_i. \quad (17)$$

A (16) és (17) egyenletek kombinálásával jutunk a (18) egyenletre

$$U_1 - U_2 = U \frac{L_1}{L}, \quad U_2 - U_3 = U \frac{L_2}{L}, \quad \dots \\ U_{n-1} - U_n = U \frac{L_{n-1}}{L} \quad (18)$$

### 3. HŐVEZETÉSI EGYENLETEK MEGOLDÁSAI

Az eddigi eredmények alapján az egyenes rúdszakaszokra vonatkozó differenciálegyenletet a következő alakba írhatjuk:

$$\frac{d^2 \vartheta_i}{dx_i^2} - \omega_i^2 \vartheta_i + q_i = 0, \quad x_i \leq x \leq L_i, \quad (19)$$

ahol

$$\omega_i^2 = \frac{\alpha K}{\lambda A} + \beta \frac{U^2}{\rho_0 \lambda L^2}, \quad q_i = \frac{U^2}{\rho_0 \lambda L^2}. \quad (20)$$

A fenti differenciálegyenlet megoldása a  $\vartheta_i(0) = t_i$  és  $\frac{d\vartheta_i}{dx_i}(0) = \tau_i$  kezdeti értékekkel megadva az alábbi alakba írható:

$$\vartheta_i(x_i) = t_i \operatorname{ch} \omega_i x_i + \frac{\tau_i}{\omega_i} \operatorname{sh} \omega_i x_i + \frac{q_i}{\omega_i^2} (1 - \operatorname{ch} \omega_i x_i), \\ 0 \leq x_i \leq L_i. \quad (21)$$

Egyszerű számítással kapjuk, hogy

$$\frac{d\vartheta_i}{dx_i} = \omega_i t_i \operatorname{sh} \omega_i x_i + \tau_i \operatorname{ch} \omega_i x_i - \frac{q_i}{\omega_i} \operatorname{sh} \omega_i x_i, \\ 0 \leq x_i \leq L_i. \quad (22)$$

A görbe rúdszakaszra vonatkozó differenciálegyenlet a (18) egyenlet alkalmazásával az alábbi alakba írható:

$$\frac{d^2 \vartheta_j}{dx_j^2} - \omega_j^2 \vartheta_j + q_j = 0 \quad 0 < x_j < L_j. \quad (23)$$

Itt bevezettük a következő jelöléseket:

$$\omega_j^2 = \frac{\alpha f_j K}{\lambda A c_j} + \beta \frac{U^2}{\rho_0 \lambda L^2}, \quad (24)$$

$$q_j = \frac{U^2}{\rho_0 \lambda L^2}. \quad (25)$$

A (21) és (22) egyenletek mintájára írható, hogy

$$\vartheta_j(x) = t_j \operatorname{ch} \omega_j x_j + \frac{\tau_j}{\omega_j} \operatorname{sh} \omega_j x_j + \\ + \frac{q_j}{\omega_j^2} (1 - \operatorname{ch} \omega_j x_j), \quad (26)$$

$$\frac{d\vartheta_j}{dx_j} = \omega_j t_j \operatorname{sh} \omega_j x_j + \tau_j \operatorname{ch} \omega_j x_j - \\ - \frac{q_j}{\omega_j} \operatorname{sh} \omega_j x_j, \quad (27)$$

ahol

$$t_j = \vartheta_j(0), \quad \tau_j = \left( \frac{d\vartheta_j}{dx_j} \right)_{x_j=0}. \quad (28)$$

A megoldásokban szereplő kezdeti értékeket ( $t_i, \tau_i, t_j, \tau_j$ ) a szélső keresztmetszetekre vonatkozó peremfeltételek előírások, továbbá az egyenes és görbe rúdszakasz közös keresztmetszeteire vonatkozó illesztési feltételek kielégítése révén felírható lineáris egyenletrendszer megoldásából nyerjük. Az illesztési feltételek a hőmérsékletmező és a hőáram folytonosságát fogalmazzák meg. A követendő eljárás egy példa keretében ismerteti a tanulmány.

### 4. PÉLDA

A 4. ábra egy háromkomponensű 1–2, 2–3, 3–4 tömör körkeresztmetszetű elemet szemléltet. A 4. ábra alapján írható, hogy [1]

$$L_1 = L_3 = 150 \text{ mm}, \quad L_2 = 125,6637 \text{ mm},$$

$$a = 0,3 \text{ mm}, \quad f = 40 \text{ mm},$$

$$K = 2a\pi = 125,6637 \text{ mm},$$

$$A = a^2 \pi = 1256,6371 \text{ mm}^2,$$

$$c = \frac{a^2}{2f - 2\sqrt{f^2 - a^2}} = 33,3114 \text{ mm}, \quad [2].$$

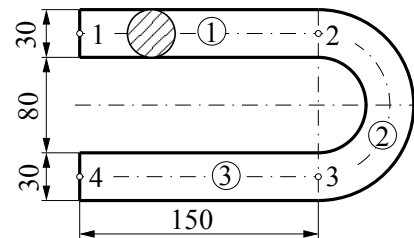
További adatok:

$$\lambda = 300 \frac{\text{W}}{\text{mK}},$$

$$\alpha = 100 \frac{\text{W}}{\text{m}^2\text{K}},$$

$$\rho_0 = 1,6 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}, \quad U = 1 \text{ V}$$

A  $\beta = 4,46 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}$  esetben az áramerősség értéke  $I = 13,37 \text{ A}$ , a  $\beta = 0$  esetben pedig  $I = 25,3 \text{ A}$  az áramerősség értéke.



4. ábra. Három komponensű elem.

Az 5. ábra szemlélteti az összetett rúd alakú test keresztmetszeteiben fellépő  $\vartheta$  hőmérséklet különbséget, mint a középvonalon értelmezett  $x$  ívkoordináta ( $0 \leq x \leq L$  függvényét a  $\beta = 4,27 \cdot 10^{-3} \text{ 1/K}$  és a  $\beta = 0$  esetekre.

## 5. KÖVETKEZTETÉSEK

Egy egydimenziós, állandósult állapotú hővezetési feladat analitikus megoldását ismerteti a tanulmány. A vizsgálat tárgyát képező szerkezeti elem egyenes és körív középvonalú rudak láncszerű, elágazás mentes összekapcsolásával van kialakítva. Villamos ellenállás fűtés következtében beálló stacionárius hővezetést vizsgálunk. A fajlagos ellenállás hőfok függésével is számol a tanulmány.

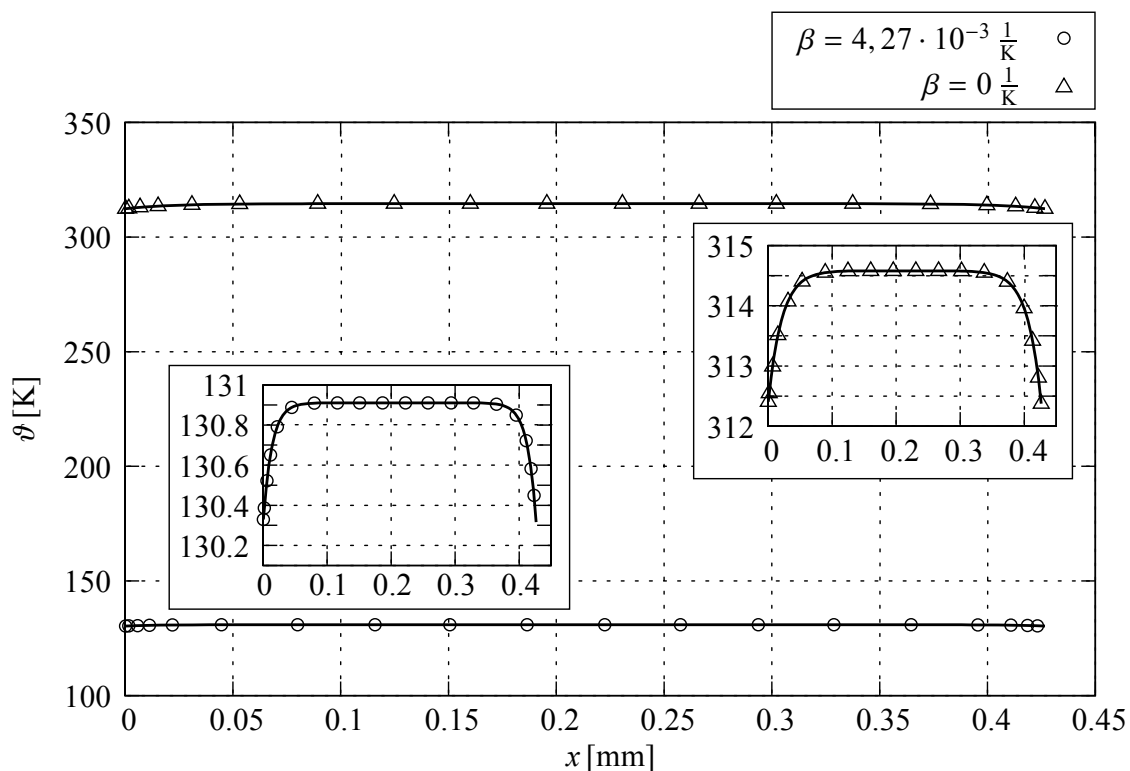
## KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A kutatás megvalósításához támogatást nyújtott az OTKA K67825 pályázat. A kutatás a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

szírozásával valósult meg.

## HIVATKOZÁSOK

- [1] H. S. Carslaw – J. C. Jaeger: *Conduction of Heat in Solids*. 2nd edition. kiad. 1959, Oxford University Press.
- [2] R. D. Cook – W. C. Young: *Advanced Mechanics of Materials*. 1985, Macmillan, New York.
- [3] T. Czibere: *Vezetékes hőátvitel*. 1988, Miskolci Egyetemi Kiadó, Miskolc.
- [4] M. N. Özisik: *Boundary value Problems of Heat Conduction*. 1968, Dover Publ. Inc. New York.



5. ábra.  $\vartheta = \vartheta(x)$  ( $0 \leq x \leq L$ ) függvény görbéi.