DOBOZ-EXTENZIÓK ALKALMAZÁSA A GYÁRTÓCELLA-KIALAKÍTÁS PROBLÉMÁJÁBAN

USING BOX EXTENTS IN SOLVING THE CELL FORMATION PROBLEM

Körei Attila[*]

ABSTRACT

Box extents are useful tools in solving grouping problems, where given objects are to be classified based on their common or similar properties. Box extents can be determined starting from a formal context, using the theory and tools of Formal Concept Analysis. This paper describes a method for generating the box extents of a formal context, and we show how to apply them in the machine-part cell formation problem.

1. BEVEZETÉS

A fogalomanalízis (Formal Concept Analysis) az alkalmazott hálóelmélet egyik gyorsan fejlődő, új irányzata. A fogalomanalízis adott objektumok és az azokat jellemző tulajdonságok kapcsolatából kiindulva értelmezi a formális fogalom definícióját, és megadja azt a relációt, mely alapján a fogalmak hálóba szervezhetőek. A fogalomháló feltárja a fogalmak közötti hierarchikus viszonyokat, de ismeretek tömör tárolására, rejtett összefüggések felfedezésére is alkalmazható. A fogalmakat felhasználva az objektumok halmazának speciális partícióit is definiálhatjuk, melyek jól alkalmazhatóak bizonyos osztályfelbontási problémákban. A dolgozatban egy, a diszkrét termelési rendszerek területéről származó feladatban, a gyártócellák és alkatrészcsaládok meghatározására alkalmazzuk a fogalomháló alapú megközelítést.

2. A FOGALOMANALÍZIS ALAPJAI

Legyen adott objektumoknak egy G halmaza, M pedig olyan tulajdonságoknak (attribútumoknak) a halmaza, melyekkel a G-beli objektumok rendelkezhetnek. Legyen továbbá $I \subseteq G \times M$ egy reláció, melynél $(g, m) \in I$ azt jelenti, hogy a g objektum rendelkezik az m tulajdonsággal.

A (G, M, I) hármast *formális kontextusnak* nevezzük. A kontextus legegyszerűbben egy táblázatban szemléltethető, melynek i-edik sorának j-edik oszlopában x-el jelöljük ha az i-edik objektum rendelkezik a j-edik tulajdonsággal (1. táblázat).

		Attribútumok				
		összetett	páros	páratlan	prím	négyzet
Objektumok	1			x		x
	2		x		x	
	3			x	x	
	4	x	x			x
	5			x	x	
	6	x	x			
	7			x	x	
	8	x	x			
	9	x		x		x

1. táblázat Pozitív, egyjegyű számok kontextusa

Ha $A \subseteq G$, jelöljük A'-vel az A-beli objektumok közös tulajdonságainak halmazát:

$$A' = \{m \in M \mid (g, m) \in I, \forall g \in A\},$$

és $B \subseteq M$ esetén legyen B' azoknak az objektumoknak a halmaza, amelyek minden B-beli tulajdonsággal rendelkeznek:

$$B' = \{g \in G \mid (g, m) \in I, \forall m \in B\}.$$

Az (A, B) párt a (G, M, I) kontextushoz tartozó *fogalomnak* nevezzük, ha $A \subseteq G$, $B \subseteq M$ és $A' = B$ valamint $B' = A$ egyaránt teljesül. Például az 1. táblázat kontextusa alapján a $(\{4,6,8\}, \{$összetett, páros$\})$ pár egy fogalmat alkot.

Az A halmazt az (A, B) fogalom *extenziójának*, míg B-t a fogalom *intenziójának* nevezzük. Könnyű látni, hogy $A \subseteq G$ pontosan akkor extenziója valamely fogalomnak, ha $A'' = A$ teljesül, továbbá extenziók tetszőleges metszete újra extenziót eredményez.

A (G, M, I) kontextushoz tartozó fogalmak teljes hálót alkotnak, ahol a fogalmak szuprémumaként és

* *egyetemi docens, Miskolci Egyetem, Alkalmazott Matematikai Tanszék*

infimumaként adódó fogalmakat az alábbi összefüggések alapján számíthatjuk ki:

$$\bigwedge_{t\in T}(A_t\,,B_t)=\left(\bigcap_{t\in T}A_t,\left(\bigcup_{t\in T}B_t\right)''\right)\quad(1)$$

$$\bigvee_{t\in T}(A_t\,,B_t)=\left(\left(\bigcup_{t\in T}A_t\right)''\,,\bigcap_{t\in T}B_t,\right)\quad(2)$$

Az (1) és (2) összefüggések a fogalomanalízis alaptételeként ismertek. A tétel bizonyítása a fogalomhálókkal kapcsolatos további eredményekkel együtt megtalálható [2]-ben.

3. DOBOZ-EXTENZIÓK

Legyen G egy tetszőleges nemüres halmaz. A G nemüres részhalmazaiból álló $P=\{G_t \mid t\in T\}$ rendszert G egy *partíciójának* nevezzük, ha páronként diszjunkt halmazokból áll, melyek egyesítése G. A G_t halmazokat a partíció *blokkjainak* nevezzük. Egy adott halmaz partíciói között definiálunk egy rendezési relációt: ha P_1 és P_2 a G halmaz partíciói, akkor azt mondjuk, hogy P_1 *finomabb*, mint P_2 (jelölése: $P_1\leq P_2$), ha P_2 minden egyes blokkja előáll P_1-beli blokkok uniójaként. Ezzel a relációval G partícióinak halmaza egy teljes hálót alkot.

Ha a G halmaz a (G,M,I) kontextus objektumhalmaza, akkor partíciói között van egy speciális típusú. Legyen $\Pi=\{G_t \mid t\in T\}$ G egy partíciója, azt mondjuk, hogy Π a (G,M,I) kontextushoz tartozó *extenzió-partíció*, ha Π minden blokkja a kontextus valamely fogalmának az extenziója, azaz $G_t=G_t{}''$ minden $t\in T$ esetén. Az extenzió-partíciók blokkjait *doboz-extenzióknak* nevezzük. Az elnevezés a témát főleg hálóelméleti szempontból megközelítő [7] cikkből származik, melyben a szerző bevezeti a dobozháló fogalmát. A dobozháló elemei a dobozelemek. Olyan fogalom lehet dobozelem, melynek extenziója szerepel az objektumhalmaz valamely, extenziókból álló partíciójában. Ha a dobozelemek halmazába a fogalomháló legkisebb elemét is beleértjük, és a dobozelemek közötti relációt a fogalomhálóbeli reláció leszűkítéseként értelmezzük, akkor igazolható, hogy a dobozelemek struktúrája egy teljes, atomisztikus háló. Az atomok alatt a legkisebb elem rákövetkezőit értjük, az atomisztikus hálóban pedig minden elem előáll a nála kisebb vagy egyenlő atomok szuprémumaként. A dobozháló atomjainak extenzióit *atomi extenzióknak* hívjuk, ezekből áll az extenzió-partíciók hálójának minimális eleme, melyet Π_0-lal jelölünk. Az 1. táblázatban szereplő kontextus esetén az atomi extenziók az {1,9}, {2}, {3,5,7} és {4,6,8} halmazok, további doboz-extenziók: {2,4,6,8}, {1,3,5,7,9}, {2,3,5,7}, valamint a teljes objektumhalmaz.

Legyen $g\in G$ egy tetszőleges objektum. Mivel Π_0 a G halmaz partíciója, van egyetlen olyan $A_g\in\Pi_0$ atomi extenzió, amely g-t tartalmazza. A következő állításban az A_g halmazok segítségével karakterizáljuk a doboz-extenziókat.

3.1. Állítás. *Legyen (G,M,I) egy kontextus, és $E\subseteq G$ a kontextushoz tartozó extenzió. A következő állítások ekvivalensek:*

(*i*) *E egy doboz-extenzió*

(*ii*) $g\in E\Longrightarrow A_g\subseteq E$

(*iii*) $g\notin E\Longrightarrow A_g\cap E=\emptyset$.

Bizonyítás: (*i*) $\Longrightarrow$ (*ii*) Tegyük fel, hogy E egy g-t tartalmazó extenzió. Az E halmaz G valamelyik partíciójának az egyik blokkja, ami szükségképpen durvább, mint a partícióháló legfinomabb eleme, a Π_0 partíció. A_g a Π_0 partíció g-t tartalmazó blokkja, ezért szükségszerű, hogy a durvább partíció g-t tartalmazó blokkja egyúttal az A_g halmazt is tartalmazza.

(*ii*) $\Longrightarrow$ (*iii*) Tegyük fel, hogy $g\notin E$ és $A_g\cap E\neq\emptyset$. Ha $y\in A_g\cap E$, akkor $y\in A_g$ amiből $g\in A_y$ is következik. Másrészt $y\in E$, ezért (*ii*) miatt $A_y\subseteq E$. Ebből $g\in E$ következik, ami ellentmondás.

(*iii*) $\Longrightarrow$ (*i*) Ha $A_g\cap E\neq\emptyset$ minden $g\notin E$ esetén, akkor az $E\cup\{A_g \mid g\notin E\}$ rendszer extenzió-partíciója G-nek, amiből következik, hogy E egy doboz-extenzió.

A következő állítás szerint a doboz-extenziók halmaza zárt a metszetképzés műveletére nézve.

3.2. Állítás. *Doboz-extenziók metszete is doboz-extenzió.*

Bizonyítás: Legyenek az E_j $(j\in J)$ halmazok doboz-extenziók, valamely J indexhalmazra. Mivel minden E_j egyúttal extenzió is, a $\bigcap_{j\in J}E_j$ halmaz is egy extenzió. Tegyük fel, hogy $g\notin\bigcap_{j\in J}E_j$, ekkor valamely $j\in J$ indexre $g\notin E_j$ is teljesül. Mivel E_j doboz-extenzió, a 3.1 Állítás (*iii*) része szerint $A_g\cap E_j=\emptyset$. Emiatt $A_g\cap\bigcap_{j\in J}E_j=\emptyset$, és újra a 3.1 Állítást alkalmazva kapjuk, hogy a $\bigcap_{j\in J}E_j$ halmaz egy doboz-extenzió.

4. A DOBOZ-EXTENZIÓK MEGHATÁROZÁSA

A doboz-extenziók meghatározásának egyik módja a definícióból adódó direkt módszer: előállítjuk a kontextushoz tartozó összes fogalom-extenziót, majd kiválogatjuk közülük azokat, amelyek egyúttal blokkjai az objektumhalmaz valamely partíciójának. Nagyméretű kontextus esetén azonban a fogalmak generálása is rendkívül számításigényes feladat, és annak eldöntése sem egyszerű probléma, hogy a fogalomextenziók közül melyek particionálják az objektumhalmazt. Ez utóbbi feladat ugyanis visszavezethető az NP-teljes részlet-összeg-problémára, amelyben adottak az $a_1,a_2,\dots,a_m$ és a b természetes számok, és el kell döntenünk, van-e az $\{a_1,a_2,\dots,a_m\}$ halmaznak olyan részhalmaza, melyben az elemek összege b. Esetünkben adott a (G,M,I) kontextushoz tartozó fogalom-extenziók

$H = \{E_t \mid t \in T\}$ rendszere, és minden $t \in T$ esetén meg kell vizsgálnunk, hogy a $G \setminus E_t$ halmaz előállítható-e a $H \setminus \{E_t\}$ családba tartozó halmazok diszjunkt uniójaként. Az NP-teljesség miatt az algoritmus számításigénye a bemenő fogalmak számának exponenciális függvénye, ezért a direkt módszer csak kisebb méretű kontextusok esetén alkalmas a doboz-extenziók meghatározására.

A [3] doktori értekezés egy olyan módszert tartalmaz a doboz-extenziók generálására, melyhez nem szükséges előállítanunk az összes fogalom-extenziót. Az eljárás a dobozháló atomisztikusságát használja ki, a fogalom-generálás naiv algoritmusához (ld.[2]) hasonló módon képezzük az extenziókat, de ha ismerjük a dobozháló atomjait, ebben a folyamatban előre kiszűrhetjük azokat az elemeket, amelyek nem lehetnek doboz-extenziók, így nem kerül sor az összes fogalom-extenzió generálására. [4]-ben ennek az algoritmusnak egy javított, és egyben egyszerűbb változatát találhatjuk. Az algoritmus alapgondolatát egy állításban fogalmazzuk meg.

4.1. Állítás. *Legyen B egy doboz-extenzió. Akkor a (B, B') fogalomban B' intenziója előáll atomi extenziókhoz tartozó intenziók metszeteként.*

Bizonyítás: A B doboz-extenzió előáll atomi extenziók uniójaként, azaz $B = \bigcup_{t \in T} A_t$, ahol $A_t \in \Pi_0$. Mivel B egy extenzió, $B'' = B$, tehát $(\bigcup_{t \in T} A_t)'' = \bigcup_{t \in T} A_t$. Képezzük az A_t extenziók által meghatározott fogalmak szuprémumát a (2) képlet szerint:

$$\bigvee_{t \in T} (A_t, A'_t) = \left(\left(\bigcup_{t \in T} A_t\right)'', \bigcap_{t \in T} A'_t\right) = \\ = \left(\bigcup_{t \in T} A_t, \bigcap_{t \in T} A'_t\right) = (B, B').$$

Az utolsó egyenlőséget az indokolja, hogy a fogalmak extenziói és intenziói kölcsönösen meghatározzák egymást, azaz, ha két fogalom extenziója azonos, akkor intenzióiknak is meg kell egyezniük, ebből következik a bizonyítandó $B' = \bigcap_{t \in T} A'_t$ összefüggés.

Az állítás felhasználásával a doboz-extenziók generálásához először előállítjuk az A_t atomi extenziókat (ennek algoritmusát ld. [5]-ben), majd meghatározzuk az ezekhez tartozó A'_t intenziókat. Ezután az összes lehetséges módon képezzük az intenziók metszeteit, és a 3.1 Állítás (ii) részében megfogalmazott $g \in E \Longrightarrow A_g \subseteq E$ implikációval ellenőrizzük, hogy az $E = (\bigcap_{k \in K} A'_k)'$ halmazok doboz-extenziók-e, vagy sem (vegyük észre, hogy a 4.1. Állítás csak szükséges feltételt fogalmazott meg, nem feltétlenül ad minden atomi intenziókból álló metszet doboz-extenzióhoz tartozó intenziót).

5. ALKALMAZÁS A GYÁRTÓCELLÁK ÉS ALKATRÉSZCSALÁDOK KIALAKÍTÁSÁNAK FELADATÁBAN

Jelölje P különböző alkatrészek egy halmazát: $P = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ és legyen $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ egy gépekből álló halmaz, melyekkel az alkatrészek megmunkálását végezzük. A gyártórendszer gép-alkatrész incidencia-mátrixán az

$$A = \left[a_{ij}\right]_{i,j=1}^{n,k}$$

bináris mátrixot értjük, ahol $a_{ij} = 1$, ha az i-edik gép megmunkálja a j-edik alkatrészt, egyébként pedig $a_{ij} = 0$. A 2. táblázatban egy, az [1] publikációból származó gép-alkatrész mátrix szerepel.

	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	p_9	p_{10}	p_{11}
m_1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0
m_2	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0
m_3	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
m_4	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0
m_5	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	1
m_6	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
m_7	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0

2. táblázat Példa gép-alkatrész incidencia-mátrixra

A mátrix alapján kell meghatároznunk az azonos, vagy hasonló megmunkálási igényű alkatrészek csoportjait (az alkatrészcsaládokat) és az egyes családok elemeit megmunkáló gépek együtteseit (a gyártócellákat). Ez a folyamat az incidencia-mátrix sorainak és oszlopainak alkalmas átrendezésével valósítható meg, úgy, hogy az eljárás végén a mátrix főátlója mentén kialakult blokkokból olvashatóak le az egymáshoz rendelt alkatrészcsaládok és gyártócellák elemei (3. táblázat).

	p_4	p_5	p_8	p_{10}	p_1	p_2	p_6	p_9	p_3	p_7	p_{11}
m_6	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
m_7	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
m_1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0
m_2	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
m_3	0	0	0	0	1	0	0	0	1	1	1
m_4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0
m_5	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1

3. táblázat A megoldásnak megfelelően átrendezett gép-alkatrész incidencia-mátrix

A különböző megoldások minőségének összehasonlítására sokféle mutatószám ismeretes az irodalomban, abban azonban a legtöbb szerző egyetért, hogy annál hatékonyabb a cellakiosztás, minél nagyobb az 1-esek aránya az egyes blokkokon belül (azaz a cellán belül a gépek kihasználtsága a lehető legnagyobb) és minél kevesebb 1-es szerepel a blokkokon kívül (azaz az alkatrészek cellák közötti mozgatása minimális mértékű). A leggyakrabban alkalmazott mérőszám a Kumar és Chandrasekharan által [6]-ban bevezetett csoportképzési hatásfok (grouping efficacy), amely következő képlettel számítható:

$$GE = 1 - \frac{n_0 + n_k}{n_0 + n_1} = \frac{n_1 - n_k}{n_1 + n_0}$$

ahol n_1 az 1-esek száma az eredeti gép-alkatrész mátrixban, n_0 a 0-k száma a kialakított csoportokon belül, n_k pedig azokat az eseteket összegzi, amikor egy alkatrészt saját csoportján kívüli gépnek is meg kell munkálnia. A 3. táblázatban szereplő megoldás esetén

$$GE = \frac{21 - 2}{21 + 6} = 0.7037.$$

Ideális esetben az egyes cellákba tartozó gépek a cellához rendelt alkatrészcsalád összes elemét megmunkálják, és nincs egyetlen kivételes alkatrész sem (azaz olyan alkatrész, amit egy másik gyártócellába is át kell vinni megmunkálásra), tehát $n_1 = 0$ és $n_k = 0$, így a maximális csoportképzési hatásfok értéke 1.

A feladat doboz-extenziókkal történő megoldásához a a gép-alkatrész incidencia-mátrix által meghatározott formális kontextusból indulunk ki: a gépeket tekintjük objektumoknak, az alkatrészeket attribútumoknak, az I relációt pedig azok a (m_i, p_j) párok alkotják, amelyek indexeire $a_{ij} = 1$. Az objektumhalmaz minden egyes extenzió-partíciója meghatároz egy gyártócella-kiosztást, hiszen a partíció minden B blokkjai eleget tesz a $B = B''$ összefüggésnek, ami azt jelenti, hogy a blokkba tartozó gépek az B' halmazba tartozó alkatrészek mindegyikét megmunkálják, és nincs több olyan gép, ami rendelkezik ezzel a tulajdonsággal. A következő lépésben meghatározzuk egy adott cellakiosztás esetén a cellákhoz hozzárendelt alkatrészcsaládokat. Legyen $P = \{C_j \mid j = 1,2,\dots,l\}$ a G halmaz egy extenzió-partíciója. Ekkor a C_j blokkba tartozó gépek alkotják a j-edik gyártócellát. A C_j cellához tartozó F_j alkatrészcsalád biztosan tartalmazza az C'_j halmaz elemeit, hiszen ezeket az alkatrészeket a cella minden gépének meg kell munkálnia. Legyen $p \in P \setminus \bigcup_{j=1}^{l} C'_j$, egy olyan alkatrész, amelyet még egyik családba sem soroltunk be és a minden $j = 1,2,\dots,l$ esetén képezzük a következő hányadost:

$$h_j(p) = \frac{\text{a } p\text{-t megmunkáló } C_j\text{-beli gépek száma}}{C_j \text{ elemszáma}}$$

majd a p alkatrészt besoroljuk abba az F_j családba, amely esetén maximális a $h_j(p)$ arány értéke. Ezzel az eljárással az adott gyártócellákhoz úgy rendeltük hozzá az alkatrészcsaládokat, hogy a kapott megoldás csoportképzési hatásfoka a lehető legnagyobb legyen. Ha minden extenzió-partíció esetén meghatároztuk a megfelelő alkatrészcsaládokat, a kapott megoldások közül kiválasztjuk azt, amelyik esetén maximális a csoportképzési hatásfok mérőszáma. A 2. táblázatban szereplő feladatra módszerünk legjobb megoldásként a következő gyártócella-alkatrészcsalád párokat határozta meg:

$$\{m_1, m_2\} - \{p_1, p_2, p_6, p_9\}$$
$$\{m_6, m_7\} - \{p_5, p_8, p_{10}\}$$
$$\{m_3, m_4\} - \{p_3, p_7\}$$
$$\{m_5\} - \{p_4, p_{11}\}$$

A megoldás csoportképzési hatásfoka 0.7083, ami megfelel az [1]-ben megadott feladat legjobb ismert megoldásának.

6. ÖSSZEGZÉS

Egy adott objektumhalmaz speciális felbontásait, az extenzió-partíciókat a fogalomanalízis eszközeinek alkalmazásával határozhatjuk meg. A dolgozatban megadtuk az extenzió-partíciók generálásának algoritmusát és megmutattuk, hogy ez a megközelítés sikeresen alkalmazható a gyártócellák és alkatrészcsaládok meghatározásának feladatában.

5. KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A bemutatott kutatómunka a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósul meg

6. IRODALOM

[1] BOCTOR F. F.: A linear formulation of the machine-part cell formation problem, International Journal of Production Research, 29, pp.343-356, 1991.

[2] GANTER B., WILLE R.: Formal Concept Analysis, Mathematical Foundations. Springer Verlag, 1999.

[3] KÖREI A.: Fogalomhálók alkalmazása osztályfelbontási problémákra, PhD értekezés, Miskolci Egyetem, 2008.

[4] KÖREI A.: Determining the box extents of a formal context, microCAD konferencia, 2012.

[5] KÖREI A., RADELECZKI S.: Box Elements in a Concept Lattice. Contributions to ICFCA 2006. Verlag Allgemeine Wissenschaft, 2006.

[6] KUMAR C., CHANDRASEKHARAN M. Grouping efficacy: a quantitive criterion for goodness of block diagonal forms of binary matrices in group technology. International Journal of Production Research, 28, pp.233-243, 1990.

[7] RADELECZKI S.: Classification systems and their lattice. Discussiones Mathematicae General Algebra and Applications, 22, pp.167-181, 2002.