A (2,1) TÍPUSÚ BALANSZ SZÁMOKRÓL

ABOUT THE (2,1)-TYPE BALANCING NUMBERS

*Olajos Péter**

ABSTRACT

A positive integer n is called a balancing number if $1+\cdots+(n-1)=(n+1)+\cdots+(n+r)$ holds for some positive integer r. Balancing numbers and their generalizations have been investigated by several authors, from many aspects. In this paper we consider the generalized (a,b)-type balancing numbers in the case when $a=2$ and $b=1$. We show that there are infinitely many $(2,1)$-type balancing numbers and a simple recurrence relation holds for them. Furthermore we investigate the connection between $(2,1)$-type balancing and Fibonacci or Lucas numbers that is we show that there is no Fibonacci or Lucas $(2,1)$-type balancing number.

1. BEVEZETÉS

Egy $R=\{R_i\}_{i=0}^{\infty}=R(A,B,R_0,R_1)$ számsorozatot *másodrendű lineáris rekurzív*nak nevezünk, ha az

$$R_i=AR_{i-1}+BR_{i-2}\qquad (i>1)$$

rekurzív reláció teljesül a tagokra, ahol A, $B\neq 0$, R_0 és R_1 rögzített egész számok és $|R_0|+|R_1|>0$. Az $f(x)=x^2-Ax-B$ polinomot az $R=R(A,B,R_0,R_1)$ rekurzív sorozat *társpolinom*jának nevezzük. Legyen $D=A^2+4B$ a diszkriminánsa f-nek. A társpolinom gyökeit jelöljük α-val és β-val. Jól ismert, hogy ha $D\neq 0$, akkor a sorozat felírható az

$$R_i=\frac{a\alpha^i-b\beta^i}{\alpha-\beta},\quad (i\geq 0),$$

alakban, ahol $a=R_1-R_0\beta$ and $b=R_1-R_0\alpha$.

1. definíció. Egy n pozitív egész számot *balansz szám*nak nevezünk (lásd [1] és [4] cikkek), ha az

$$1+\cdots+(n-1)=(n+1)+\cdots+(n+r)$$

teljesül valamilyen r pozitív egészre (ezt *balanszer*nek nevezzük). A balansz számok sorozatát B_m-mel jelöljük $(m=1,2,\ldots)$.

Könnyű ellenőrizni, hogy pl. a $B_1=6$ és a $B_2=35$, ahol a megfelelő balanszerek rendre a 2 és a 14. Megjegyezzük, hogy Behera és Panda(lásd az [1]-et) egyik eredménye alapján a

$$B_{m+1}=6B_m-B_{m-1}\qquad (m>1).$$

rekurzív tulajdonság is teljesül. Azaz végtelen sok balansz szám létezik.

A balansz számok irodalma nagyon gazdag. A [6] és [7] cikkekben Liptai bizonyítja, hogy nincsenek Fibonacci és Lucas balansz számok. Később Szalay (lásd [10]) ugyanezt az eredményt kapta egy másik módszerrel.

Egy kis módosítással kapjuk a következő definíciót:

2. definíció. Az $n\in\mathbb{N}$ számot *kobalansz* számnak nevezzük, ha az

$$1+2+\cdots+n=(n+1)+(n+2)+\cdots+(n+r^c)$$

teljesül valamilyen $r^c\in\mathbb{N}$-re. Ebben az esetben az r^c-t *kobalanszer*nek nevezzük.

Jelöljük az n-et B_m^c-mel, ha n az m-dik tagja a kobalansz számok sorozatának.

1. megjegyzés. Az első három kobalansz szám: 2, 14 és 84 rendre az 1, 6, 35 kobalanszerekkel.

A B_m^c kobalansz számok hasonló tulajdonságokkal rendelkeznek, mint a B_m balansz számok. A [9] cikkben Panda és Ray bizonyította a következő tulajdonságokat:

* *egyetemi adjunktus, Miskolci Egyetem, Alkalmazott Matematikai Tanszék*

1. állítás. Ha az $n = B_m^c$ egy kobalansz szám feltéve, hogy $m > 1$, akkor $B_{m+1}^c = 3n + \sqrt{8n^2 + 8n + 1} + 1$ és $B_{m-1}^c = 3n - \sqrt{8n^2 + 8n + 1} + 1$.

A fenti állításból kapjuk a következő rekurzív relációt a kobalansz számokra (mint a balansz számok esetén):

$$B_{m+1}^c = 6B_m^c - B_{m-1}^c + 2, \quad (m = 2,3, \dots)$$

ahol $B_1^c = 0$ a megállapodás szerint.

A [8]-ban Liptai, Luca, Pintér and Szalay általánosította a balansz számok fogalmát a következő módon. Legyen az y, k, l pozitív egészek úgy, hogy $y \geq 4$. Egy x pozitív egészt az $x \leq y - 2$ feltétel mellett (k, l)*-hatvány numerikus közép*nek nevezzük az y-ra nézve, ha az

$$1^k + \dots + (x-1)^k = (x+1)^l + \dots + (y-1)^l$$

teljesül. A [8]-ban számos effektív és ineffektív végességi eredményt bizonyítottak a (k, l)-hatvány numerikus középre vonatkozólag.

Később a „balansz" tulajdonságot rekurzív sorozatoknál is vizsgálták (lásd [2]).

Egy másik általánosítást adott Kovács, Liptai és Olajos az [5] cikkben.

2. definíció. Legyenek a, b nemnegatív relatív prím egészek. Egy $an + b$ pozitív egészt egy (a, b) *típusú balansz szám*nak nevezünk, ha az

$$\begin{aligned}(a+b) + (2a+b) + \dots + (a(n-1)+b) = \\ = (a(n+1)+b) + \dots + (a(n+r)+b)\end{aligned} \qquad (1)$$

teljesül valamilyen $r \in \mathbb{N}$-re. Itt az r-et *balanszer*nek nevezzük.

Jelöljük az $an + b$ pozitív egészt a $B_m^{(a,b)}$-mel, ha ez a szám az m-dik az (a, b) típusú balansz számok között.

2. megjegyzés. Megjegyezzük, hogy ha az $a = 1$ és $b = 0$, akkor az (a, b) típusú balansz számok éppen az eredetileg bevezetett, B_m-mel jelölt balansz számokat jelentik.

2. A (2,1) TÍPUSÚ BALANSZ SZÁMOK TULAJDONSÁGAI

A 1. egyenletből az $a = 2$, $b = 1$ esetén kapjuk a következő két összefüggést:

$$B_k^{(2,1)} = 2n^2 + 2n - 4rn - 2r^2 - 4r - 1 \qquad (2)$$

és a 1. egyenlet r-re rendezéséből

$$2r^2 + 2rU - (n-1)U = 0, \qquad (3)$$

ahol $U = B_k^{(2,1)} + 1$.

A következő eredményeket kaptuk $a = 2, b = 1$ esetben:

1. tétel. *A* $(2,1)$ *típusú balansz számokra teljesül a következő rekurzió:*

$$B_n^{(2,1)} = 3 \cdot B_{n+1} - 1 \cdot B_n.$$

2. következmény. *Mivel a* B_n *balansz számok rekurzív sorozatot alkotnak, ezért a* $B_n^{(2,1)} = 6 \cdot B_{n-1}^{(2,1)} - B_{n-2}^{(2,1)}$, $B_n^{(2,1)} = R(6, -1, 17, 99)$ *rekurzió fennáll.*

3. következmény. *Az 1. Tétel miatt a* $B_n^{(2,1)}$ *rekurzív sorozat társpolinomja meghatározható és a következőképpen adható meg:*

$$B_n^{(2,1)} = \frac{(99 - 17\lambda_2)\lambda_1^n - (99 - 17\lambda_1)\lambda_2^n}{4\sqrt{2}},$$

ahol $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$, $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$.

Bizonyítása az 1. tételnek. Észre lehet venni, hogy ha van megoldása a 1. egyenletnek, akkor a $B_k^{(2,1)} = 2n + 1$-t két tagra lehet bontani a 2. összefüggés szerint:

$$B_k^{(2,1)} = 2n + 1 = 3U_1 - U_2, \qquad (4)$$

ahol $U_1 = \frac{2}{3}n^2 + \left(-\frac{4}{3}r + \frac{1}{2}\right)n - \left(\frac{2}{3}r^2 + \frac{5}{6}r + \frac{1}{6}\right)$ és $U_2 = \frac{-n+r+1}{2} + r$. A szétbontásban a $U_2 \in \mathbb{Z}$ (és így a másik tag is egész), mivel az $-n + r + 1$ osztható 2-vel. Ezt oszthatósági vizsgálattal kapjuk a 3. összefüggésből, ugyanis a 3. összefüggés a következő alakban is felírható:

$$4n^2 - 4n + 8n(-n + r + 1) + 2(-n + r + 1)^2 = 0.$$

Az első három tag mindegyike osztható 4-gyel, azaz a $2(-n + r + 1)^2$-nek is oszthatónak kell lennie 4-gyel, amelyből következik, hogy $\frac{-n+r+1}{2} \in \mathbb{Z}$.

Mivel a 4. egyenlet bal oldala $2n+1$, ezért $3U_1=(2n+1)-U_2=3\left(\frac{n+r+1}{2}\right)$. A felbontásban szereplő két tagról belátjuk, hogy egymást követő balansz számok, azaz

$$\frac{n+r+1}{2}=B_{k+1},$$
$$\frac{-n+3r+1}{2}=B_k,$$

valamilyen $k\in\mathbb{Z}$-ra. Ehhez a következő állítást kell felhasználnunk (lásd az [1] cikkben):

1. lemma. *Egy l pozitív egész szám akkor és csak akkor balansz szám (az eredeti értelemben), ha a $8l^2+1$ egy teljes négyzet.*

A fentiek alapján az $\frac{n+r+1}{2}$ pontosan akkor balansz szám, ha $8\left(\frac{n+r+1}{2}\right)^2+1$ teljes négyzet. Az előbbi kifejezést kiszámolva kapjuk a következőt:

$$8\left(\frac{n+r+1}{2}\right)^2+1=$$
$$=2r^2+(4n+4)r+2n^2+4n+3=$$
$$=[2r^2+(4n+4)r+2-2n^2]+$$
$$+4n^2+4n+1=(2n+1)^2,$$

mivel az utolsó előtti lépésben kihasználtuk, hogy a $2r^2+(4n+4)r+2-2n^2$ éppen a 3. összefüggés, azaz értéke 0. Ezért $\frac{n+r+1}{2}$ balansz szám.

Ismerjük azt az állítást (lásd az [1]-ben a Corollary 3.2-t), hogy ha X balansz szám, akkor a $3X-\sqrt{8X^2+1}$ az előtte levő balansz szám. Ezt alkalmazva a $\frac{n+r+1}{2}$-re kapjuk (felhasználva azt, hogy négyzetgyök alatt a $(2n+1)^2$ van, az előzőek miatt):

$$3\left(\frac{n+r+1}{2}\right)-\sqrt{8\left(\frac{n+r+1}{2}\right)^2+1}=$$
$$=\frac{-n+3r+1}{2}.$$

Ezért a $\frac{-n+3r+1}{2}$ is balansz szám.

A kezdőelemekre vonatkozó egyezés alapján (pl.

$17=B_0^{(2,1)}=3B_1-B_0=3\cdot 6-1$

vagy

$99=B_1^{(2,1)}=3B_2-B_1=3\cdot 35-6$)

látható, hogy a bizonyításban használt k és n indexek megegyeznek, azaz $B_n^{(2,1)}=3B_{n+1}-B_n$.

Ezzel érvényes az 1. Tétel és a következmények, ahol kihasználtuk a balansz számok rekurzív tulajdonságát. □

4. LUCAS ÉS FIBONACCI SZÁMOK, SZIMULTÁN PELL-EGYENLETEK

Az általános 3. egyenletből kiindulva kapjuk a következő Pell-egyenletet. Mivel az r-re rendezés miatt a diszkriminánsnak négyzetszámnak kell lennie, ezért kapjuk a következőt:

$$8\left(B_k^{(a,b)}\right)^2+a^2-4ab-4b^2=z^2$$

valamilyen $z\in\mathbb{Z}$-re (lásd még a [5]-ben a Lemma 1-et).

Konkrét a,b párok esetén felírhatók ezek a Pell-egyenletek, és vizsgálhatóak a Fibonacci és Lucas számok tekintetében, így szimultán Pell-egyenletekre jutunk. Ekkor a következő állítást használhatjuk fel Fergusontól (lásd a [3]):

2. lemma. Az

$$x^2-5y^2=\pm 4 \tag{5}$$

egyenlet megoldásai pontosan az $x=\pm L_n$, $y=\pm F_n$ $(n=0,1,2,\ldots)$, ahol L_n és F_n rendre az n-dik tagjai a Lucas és a Fibonacci sorozatoknak.

A mi esetükben a következő két szimultán Pell-egyenletet kapjuk. Az első esetben a következőt:

$$5x^2-y^2=\pm 4, \tag{6}$$

$$8x^2-z^2=8, \tag{7}$$

ahol $x=B_m^{(2,1)}=F_l$. A második esetben a következőt kell megoldani:

$$x^2-5y^2=\pm 4, \tag{8}$$

$$8x^2-z^2=8, \tag{9}$$

ahol $x=B_m^{(a,b)}=L_p$.

A fenti szimultán Pell-egyenletek megoldásához Szalay cikkében (lásd a [10]-t) levő módszert ill. annak MAGMA-s implemetációját felhasználva kapjuk a következő eredményt:

2. tétel. *Nem létezik* $(2,1)$ *típusú Fibonacci vagy Lucas balansz szám.*

Bizonyítása 2. tételnek. A Szalay féle módszer alkalmazásakor a szimultán Pell-egyenletek egy megfelelő Thue egyenlet(ek)re vezetnek, amelyet a MAGMA **Solutions** függvénye kezel. A módszer könnyebb alkalmazása érdekében elkészült annak implemetációja a MAGMA makrók segítségével és így az implementáció egyetlen függvény meghívásával alkalmazható (ez a függvény a **PellianSystem** nevet kapta). A MAGMA program segítségével az első esetben az (x, y, z)-re a következő megoldásokat kaptuk:

$(1,1,0)$, $(3,7,8)$, $(1,3,0)$.

A második esetben a megoldások a következők (x, y, z)-re:

$(3,1,8)$, $(1,1,0)$.

Jól látható, hogy egyik esetben sem kaptunk $(2,1)$ típusú balansz számot, mivel a legkisebb értéke a sorozatnak a 17, így a tétel bizonyítva van. □

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

A tanulmány a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként – az Új Magyarország Fejlesztési Terv keretében – az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával valósult meg.

IRODALOM

[1] Behera, A., Panda, G. K., On the square roots of triangular numbers, *Fibonacci Quarterly*, 37 No. 2 (1999) 98–105.

[2] Bérczes, A., Liptai, K., Pink, I., On generalized balancing numbers, *Fibonacci Quarterly*, 48 No. 2 (2010) 121–128.

[3] Ferguson, D. E., Letter to the editor, *Fibonacci Quarterly*, 8 (1970), 88–89.

[4] Finkelstein, R. P., The House Problem, *American Math. Monthly*, 72 (1965) 1082–1088.

[5] Kovács, T., Liptai, K., Olajos, P., About (a, b)-type balancing numbers, *Publ. Math. Debrecen*, 77 No. 3-4 (2010), 485–498.

[6] Liptai, K., Fibonacci balancing numbers, *Fibonacci Quarterly*, 42 No. 4 (2004) 330–340.

[7] Liptai, K., Lucas balancing numbers, *Acta Math. Univ. Ostrav.*, 14 No. 1 (2006) 43–47.

[8] Liptai, K., Luca F., Pintér, Á., Szalay L., Generalized balancing numbers, *Indagationes Math. N. S.*, 20 (2009) 87–100.

[9] Panda, G. K., Ray, P. K., Cobalancing numbers and cobalancers, *Int. J. Math. Sci.*, No. 8 (2005) 1189–1200.

[10] Szalay, L., On the resolution of simultaneous Pell equations, *Annales Mathematicae et Informaticae*, 34 (2007) 77–87.